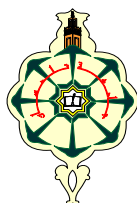


THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE ABOU-BAKR BELKAÏD – TLEMCEM



Pour obtenir le grade de Docteur en Physique

Option « Physique Electronique et Modélisation »

Par

Mme BEKKOUCHE Sifia Née BELGHERRAS

**Modélisation du Confinement Magnétique d'un
Plasma dans un Tokamak**

Devant le jury d'examen

Président

N. GHOUALI

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaïd – Tlemcen

Directeur de Thèse

T. BENOUAZ

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaïd – Tlemcen

Examineurs

H. BOUSLOUS

Professeur à l'Université Caddy Ayad Marrakech

S.M. BOUGUIMA

Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaïd – Tlemcen

A. BELGHACHI

Professeur à l'Université de Bechar

A. HELMAOUI

Professeur à l'Université de de Bechar

Année Universitaire 2009 ~ 2010

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail:

À mes chers parents qui ont fait preuve de beaucoup de patience et de sacrifice, qu'ils trouvent ici un modeste témoignage de mon indéfini tendresse... Il y a tant d'amour et de générosité dans vos âmes.

À mon mari qui m'a toujours aidé, encouragé et motivé tout au long de mes travaux,

À ma soeur et mes frères.

À toute la famille et toutes mes copines.

À tous ce qui me sont chers.

À tous les membres du laboratoire de Physique Electronique et Modélisation de l'Université Abou-Bekr Belkaid de Tlemcen.

BELGHERRAS Sifia

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés au sein du Laboratoire de Physique Electronique et Modélisation du Département de Physique de la Faculté des Sciences de l'Université Abou-Bakr Belkaid de Tlemcen, sous la direction de Monsieur T. BENOUAZ Professeur à l'Université de Tlemcen.

Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude pour la clarté de son enseignement, les conseils judicieux et le soutien constant qu'ils m'a prodigués au cours de l'élaboration de cette thèse, ainsi que l'esprit initiative et de recherche qu'il a su me transmettre.

Je remercie vivement Monsieur N. GHOUALI Professeur à l'Université Abou-Bakr Belkaid, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence de ce jury.

Je remercie vivement, Monsieur A. BELGHACHI, Professeur à l'Université de Bechar, Monsieur S.M. BOUGUIMA Professeur à l'Université de Tlemcen, Monsieur H. BOUSLOUS Professeur à l'Université de Marrakech, , Monsieur A. HELMAOUI Professeur à l'Université de Bechar, pour l'honneur qu'ils me font d'examiner ces travaux,

Au delà de ces activités, je tiens à remercier encore Mr L. YELLES pour la qualité de nos échanges ces dernières années et surtout pour son aide.

Enfin, que tous ceux qui ont apporté leurs contributions, de près ou de loin, à la réalisation du présent travail et plus particulièrement: tous les membres du Laboratoire du Physique Electronique et Modélisation.

BELGHERRAS Sifia

Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I	Fusion et Equilibre Magnétohydrodynamique d'un Plasma de Tokamak
------------	--

1.1	Introduction.....	6
1.2	Quelques généralités sur la fusion.....	6
1.2.1	Les réactions de fusion.....	7
1.2.2	Les conditions nécessaires.....	8
1.2.3	Les moyens.....	10
1.3	Confinement magnétique et Tokamak.....	11
1.4	Equilibre et notions de surfaces magnétiques.....	12
1.5	Formulation du problème et résolution numérique.....	14
	Références.....	16

Chapitre II	Modèle de Turbulence Fluide Pour l'Instabilité ITG
-------------	--

2.1	Introduction.....	18
2.2	Modes de transport dans le plasma de Tokamak.....	18
2.3	Equation d'équilibre de particules.....	20
2.4	Transport néoclassique.....	21
2.5	Transport anormal.....	24
2.5.1	Macroinstabilités.....	24
2.5.2	Microinstabilités.....	26
2.6	Instabilité d'échange.....	27
2.7	Instabilité de gradient de température ionique ITG.....	28
2.7.1	Modèle non linéaire de mode ITG toroïdal.....	30
2.7.2	Analyse linéaire du modèle.....	31
2.7.3	Modèle de faible degré de liberté de 18 EDO.....	33
2.7.4	Résultat de la simulation numérique.....	38
	Exemple 1.....	39
	Exemple 2.....	41
	Exemple 3.....	42

Exemple 4.....	43
Exemple 5.....	44
2.8 Conclusion.....	47
Références.....	48

Chapitre III Turbulence d'Ondes de Dérive dans le Plasma de Bord de Tokamak

3.1 Introduction.....	52
3.2 Modèle d'interaction à trois ondes.....	53
3.3 Analyse linéaire.....	56
3.4 Application au plasma de bord de Tokamak.....	58
3.5 Stabilité asymptotique du système à trois ondes.....	61
3.6 Simulations numériques.....	63
3.7 Contrôle du chaos.....	66
3.8 Conclusions.....	69
Références.....	70

Chapitre IV Modèle de Transition L-H d'un Plasma Confiné Pour l'Etude de la Suppression de la Turbulence

4.1 Introduction.....	74
4.2 Transition L-H.....	74
4.3 Théorie de singularité et analyse de stabilité. Singularités persistantes dégénérées.....	76
4.4 Modèle dynamique réduit pour les transitions du confinement.....	80
4.5 Cas de la singularité piégée.....	83
4.5.1 Une prédiction non physique.....	95
4.5.2 Présence d'une singularité piégée.....	96
4.5.3 Génération des turbulences par le flux de cisaillement.....	97
4.6 Deux tranches révélant deux régimes d'hystérésis.....	106
4.7 Conclusion.....	109
Références.....	110

Conclusion générale.....	112
--------------------------	-----

Introduction Générale

Introduction générale

La production d'énergie électrique à partir des réactions de fusion thermonucléaire est un enjeu primordial pour l'avenir de l'humanité. En effet, les besoins énergétiques ne vont cesser d'augmenter au cours des décennies à venir alors que les ressources en combustibles fossiles (pétrole, charbon, gaz naturel,...) tendent à l'épuisement. De plus, les productions d'énergie associées devront diminuer à cause des émissions de gaz carbonique qu'elles génèrent. L'énergie nucléaire classique ne produit pas de gaz à effet de serre mais la production de déchets radioactifs à durée de vie longue pose un grave problème à son extension durable, à ajouter au risque d'un accident. La fusion thermonucléaire, quant à elle, ne produit pas de gaz à effet de serre et génère des déchets radioactifs moins coûteux à gérer. De plus, elle est par nature sûre puisque les réactions de fusion ne peuvent s'emballer et conduire ainsi à une catastrophe majeure.

Les années 1950 sont le moment où ils ont pensé à domestiquer cette énergie. Le principe de la fusion était quant à lui connu depuis quelques décennies dans les étoiles: faire collisionner des atomes légers entre eux pour en produire de plus lourds tout en libérant de l'énergie [1]. Pour cela, il faut créer et maintenir un plasma d'ions à une température de l'ordre de 10 keV [2], soit environ 100 millions de degrés, pendant plusieurs secondes. Donc, la configuration la plus stable et la plus prometteuse pour la fusion par confinement magnétique est le Tokamak.

La question du confinement est centrale dans les plasmas de fusion. Le confinement dans un plasma de Tokamak est essentiellement contrôlé par les pertes diffusives de particules et de chaleur. Deux types de transport expliquent la diffusion des particules: néoclassique et anormal, tel que ce dernier est généralement lié à des phénomènes turbulents dans le plasma. En réalité, ces pertes sont déterminées par un transport turbulent généré par des micro-instabilités qui se développent dans le plasma. La compréhension et le contrôle du transport turbulent dans un plasma magnétisé sont donc un sujet d'étude majeur pour la fusion thermonucléaire contrôlée.

Le transport de l'énergie est alors caractérisé par le temps de confinement défini comme le rapport du contenu énergétique à la puissance perdue. Ce transport est principalement de nature diffusive / convective: une faible partie provenant des collisions (transport néoclassique) tandis que la majeure partie (transport anormal) est associée à la turbulence du plasma. En effet, le

plasma est rendu instable par les gradients de densité et de température. Ces instabilités appelées ondes de dérive croissent puis saturent non linéairement. L'état turbulent qui en résulte est associé à des fluctuations de densité, de température et de champ électromagnétique [3].

Comprendre l'origine et la nature du transport turbulent dans le plasma d'un Tokamak est un des enjeux majeurs de la réussite de la fusion par confinement magnétique. Notre étude est basée sur des modèles de différentes instabilités, où ils doivent être forcément non linéaires puisqu'ils sont destinés à décrire la turbulence du plasma de fusion. La résolution numériquement de ces modèles non linéaires de turbulence nous permet de voir l'effet du transport turbulent sur le confinement, en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre dans l'environnement Matlab

Dans un premier chapitre, nous avons utilisé les équations de la magnétohydrodynamique MHD idéale pour l'étude de confinement magnétique dans un Tokamak. On peut confirmer par les solutions numériques qu'un bon confinement représente une condition nécessaire et importante pour la production de l'énergie électrique qui est due au phénomène de fusion thermonucléaire. Un modèle mathématique a été proposé pour la description de l'équilibre d'un plasma confiné dans un Tokamak. Les résultats trouvés dans ce chapitre font l'objet d'un papier portant sur " Mathematical Model for Magnetohydrodynamic Equilibrium Study of Tokamak Plasma " publié dans International Review of Physics I.RE.PHY.

Lors du second chapitre, nous procéderons à l'étude d'une instabilité associée à la turbulence de gradient de température ionique ITG au cœur de plasma qui est le siège des réactions de fusion. Pour ce faire, nous avons utilisé un modèle de faible degré de liberté composé de dix huit équations différentielles ordinaires proposé par Takeda, Benkadda, Hamaguchi et Wakatani. Cette étude permet d'expliquer les évolutions non linéaires d'onde de dérive ainsi que les instabilités magnétohydrodynamiques MHD dans le cœur de plasma de Tokamak.

Un modèle d'interaction de trois modes non linéaires est utilisé pour étudier l'apparition de la turbulence d'ondes de dérive conduite par les gradients de pression dans le plasma de bord d'un Tokamak dans le troisième chapitre. Ce modèle est proposé par Batista et al, où ils ont ajouté au modèle de Horton et Hasegawa les taux de croissance / décroissance pour les trois ondes afin de simuler la redistribution d'énergie entre les différents modes.

Après avoir donné les effets des instabilités sur le confinement, le chapitre quatre est consacré à l'étude du phénomène de la suppression de la turbulence dans les plasmas de fusion confinés grâce à un modèle de dynamique couplée des transitions de confinement L-H.

Autres résultats et études ont été l'objet de plusieurs communications internationales à savoir:

- Etude de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un plasma, cas des ondes Magnétohydrodynamique.
- Elaboration d'un Modèle Mathématique pour l'Etude de l'Equilibre MHD d'un Plasma de Tokamak.
- Confinement Magnétique d'un Plasma de Tokamak, effet de Cisaillement.

Références

- [1] J. Adam, " La Fusion Nucléaire : une Source d'Energie pour l'Avenir ", Paris Janvier 1999.
- [2] J. B. Lister, F. Hofmann, J. M. Moret, F. Buhlmann, M. J. Dutch, D. Fasel, " The Control of Tokamak Configuration Variable Plasmas ", Fusion Technology, vol. 32, num. 3, (1997).
- [3] X. Garbet, " Instabilités, Turbulence et Transport dans un Plasma Magnétisé ", Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Provence, Juin 2001

Chapitre I
Fusion et Equilibre
Magnétohydrodynamique d'un
Plasma de Tokamak

Chapitre I

Fusion et Equilibre

Magnétohydrodynamique d'un

Plasma de Tokamak

1.1 Introduction

Un bon confinement représente une condition nécessaire et importante pour la production de l'énergie électrique qui est due au phénomène de fusion thermonucléaire. L'étude de confinement exige la détermination de l'état d'équilibre. Pour cela, nous utilisons les équations de la MHD idéale. La magnétohydrodynamique MHD est un outil très puissant pour traiter les problèmes d'équilibre dans les plasmas magnétisés. La résolution de ce système d'équations assortie des conditions aux limites adéquates conduit à l'équation de Grad Shafranov. Sa résolution se fait dans un espace orthogonal où elle se réduit à un Laplacien.

La surface du plasma a des frontières libres, donc, le vecteur normal à cette surface n'est pas constant, ce qui rend difficile de poser des conditions aux limites. Pour ce faire, nous proposons un modèle mathématique qui décrit l'équilibre d'un plasma confiné dans un Tokamak.

1.2 Quelques généralités sur la fusion

La fusion est une des sources d'énergie envisageables dans le futur. Etant d'origine nucléaire, elle a été l'objet de nombreuses recherches. La voie de recherche de la fusion par confinement magnétique consiste à confiner le plasma dans une boîte immatérielle en anneau creux, Tore créé par des champs magnétiques intenses.

La matière première, Hydrogène et Lithium, est disponible dans l'eau de mer sur des échelles de temps de l'ordre du million d'années. La fusion apparaît donc comme une voie prometteuse au côté des énergies renouvelables et des nouvelles centrales à fission.

1.2.1 Les réactions de fusion

Deux noyaux d'atomes légers, chargés positivement, se repoussent par la force de Coulomb. La fusion consiste à rapprocher le plus possible ces noyaux afin de franchir la barrière de répulsion [1]. De même que la fission de noyaux lourds, la fusion de noyaux légers libère de l'énergie (Figure 1.1).

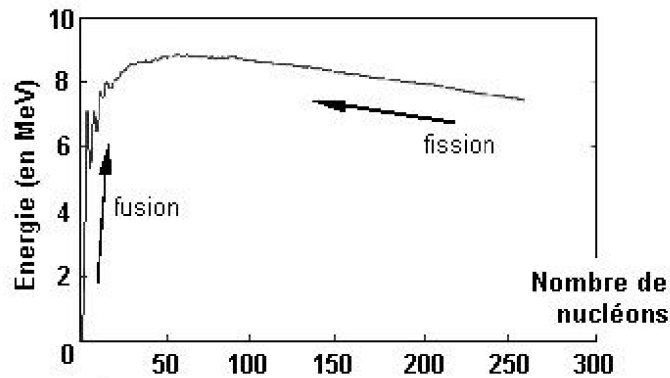
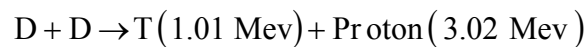
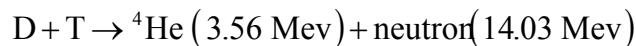


Fig. (1.1): Energie de liaison par nucléon des noyaux en fonction de la masse atomique

Les réactions possibles avec les éléments les plus légers sont les suivantes :



Parmi ces réactions envisageables, la plus favorable actuellement pour un réacteur est celle qui fait fusionner deux isotopes de l'hydrogène, le deutérium (${}^2_1\text{H}$) et le tritium (${}^3_1\text{H}$), pour produire une particule α (${}^4\text{He}$, avec une énergie de 3,52 MeV) et un neutron (avec une énergie de 14,06 MeV). Autrement, elle a la probabilité la plus élevée à la température de travail envisagée pour le futur réacteur (Figure 1.2).

Malheureusement, elle présente l'inconvénient d'avoir besoin de Tritium et elle produit des neutrons rapides, susceptibles d'activer de nombreux matériaux. Le Tritium est un élément radioactif de durée de vie courte, 11 ans, à comparer aux dizaines de milliers d'années de durée de vie des déchets issus de la fission nucléaire. Le Deutérium est disponible en grande quantité dans l'eau de mer (33g/m^3) ainsi que le Lithium nécessaire à la production de Tritium via la réaction:

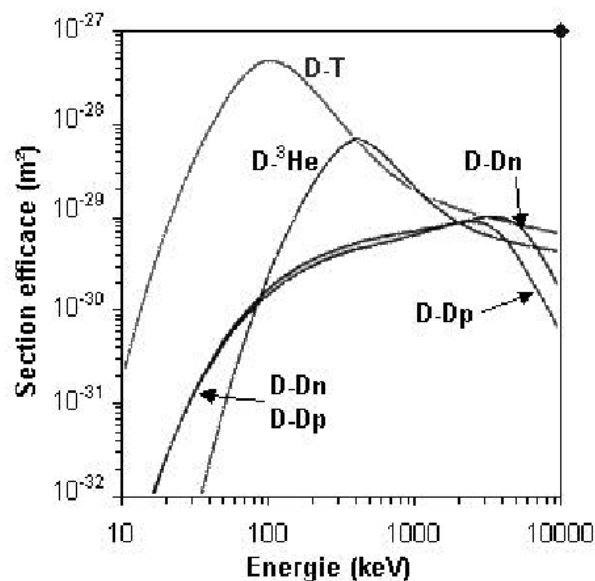
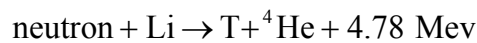


Fig. (1.2): Section efficace des principales réactions de fusion envisagées.

Du fait de la délicate manipulation du Tritium et de son coût, le gaz utilisé au laboratoire c'est le Deutérium (voir l'Hydrogène pour les études de confinement).

1.2.2 Les conditions nécessaires

Pour faire fusionner deux noyaux chargés positivement, il faut les porter à une énergie suffisamment élevée pour leur permettre de passer la barrière de potentiel coulombien par effet tunnel dans une proportion suffisante. On suppose un plasma où la fonction de distribution des vitesses est maxwellienne. Pour que le nombre de noyaux susceptibles de fusionner par effet tunnel soit suffisamment important, l'énergie doit être de l'ordre de 10Kev (plasma D-T), et

d'une température de l'ordre d'environ de 100 millions de degrés Celsius (la température à la surface du soleil est de 15 millions de degrés Celsius). La condition de passage de la barrière de potentiel est caractérisée par la valeur du taux de réaction $\langle \sigma v \rangle$ où :

σ : est la section efficace.

v : la vitesse relative des deux noyaux.

La puissance par unité de volume libérée par les réactions de fusion P_{fus} est proportionnelle au taux de réaction, au nombre de noyaux de Deutérium n_D et de Tritium n_T et à l'énergie libérée par chaque réaction E_{fus} , telle que:

$$P_{\text{fus}} = n_D n_T \langle \sigma v \rangle E_{\text{fus}} \quad (1.1)$$

On définit le temps de confinement de l'énergie dans un plasma τ_E comme le rapport de l'énergie thermique par unité de volume du plasma sur la puissance perdue par le plasma:

$$\tau_E = \frac{W_{\text{th}}}{P_{\text{perte}}} \quad (1.2)$$

En régime stationnaire, P_{perte} est la somme de la puissance cédée par les particules alpha (Noyaux d'Helium d'énergie E_{He}) issues des réactions de fusion P_α et la puissance apportée de l'extérieur pour chauffer le plasma qui se couple effectivement à ce dernier P_{ext} :

$$P_\alpha = P_{\text{fus}} \frac{E_{\text{He}}}{E_{\text{He}} + E_n} \quad (1.3)$$

$$P_{\text{perte}} = P_\alpha + P_{\text{ext}} \quad (1.4)$$

En supposant une efficacité de chauffage de 100% par les particules alpha, on peut définir le facteur d'amplification du plasma Q comme suit:

$$Q = \frac{\int_{\text{volume}} P_{\text{fus}}}{P_{\text{ext}}} \quad (1.4)$$

La réaction est auto-entretenu lorsque $Q \rightarrow \infty$, c'est ce que l'on appelle l'ignition. Le «Breakeven» est quant à lui défini par $Q = 1$ lorsque la puissance de fusion équivaut à la puissance externe fournie au plasma. En 1997, les chercheurs du JET (Join European Torus, UE) ont obtenu un facteur d'amplification $Q = 1$ pour un plasma D-T [2].

Le critère de Lawson [3,4] stipule que pour un facteur Q fixé, les choix de la température, de la densité et de temps de confinement sont intrinsèquement liés. Pour une énergie des particules alpha égale à 3.5 MeV, une approximation de ce critère est sous forme d'un triple produit

$$n\langle T \rangle \tau_E > 3.10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ KeVs} \quad (1.4)$$

Où $\langle T \rangle$ est la température moyenne du plasma. Cette approximation n'est valable que lorsque $\langle \sigma v \rangle$ est proportionnel à $\langle T \rangle^2$. Le triple produit est une façon simple pour présenter les conditions de température, la densité et de temps nécessaire de confinement. Par exemple, cette condition est remplie pour $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $T = 10 \text{ KeV}$ et $\tau = 3 \text{ s}$.

1.2.3 Les moyens

Pour obtenir $n T \tau_E > 3.10^{21} \text{ m}^{-3} \text{ KeVs}$, deux voies principales ont été poursuivies:

- Le travail avec des temps de confinement courts ($\sim 10^{-11} \text{ s}$) et des densités supérieures à 10^{31} m^{-3} . C'est ce que l'on appelle la voie de la fusion inertielle. Une introduction à la physique de cette filière est à la référence [5].
- Le travail avec des densités réduites (10^{20} m^{-3}) donc des temps de confinement longs ($\sim 1 \text{ s}$). C'est la voie de la fusion magnétique. Pour un Tokamak, la stabilité du plasma est limitée par des critères magnétiques liés au paramètre β .

La densité du plasma est limitée par des critères de stabilité, tels que $n \leq I_p / (\pi a^2)$ avec une densité n qui égale à 10^{20} m^{-3} .

$$\beta = \frac{8\pi n_i (T_e + T_i)}{B^2} \quad (1.5)$$

I_p (en MA) et a (en m) sont respectivement le courant et le petit rayon du plasma. On parle de limite de Greenwald.

Dans ce qui suit, nous allons considérer uniquement l'option du confinement magnétique et plus particulièrement de la filière Tokamak qui est celle étudiée avec le Tokamak Tore Supra au DRFC du centre CEA de Cadarache.

1.3 Confinement magnétique et Tokamak

Le Tokamak est une configuration magnétique aux lignes de champ fermées (figure 1.3), donc nécessairement de forme torique [6]. La forme la plus simple est un solénoïde torique dont les lignes de force sont des cercles de même axe. Cette structure est insuffisante pour confiner des particules du fait d'une dérive verticale de celles-ci [7]. En ajoutant une composante poloïdale B_ϕ au champ magnétique toroïdal B_θ , on perfectionne la configuration et les lignes de force qui sont enroulées en spirale sur des surfaces toroïdales appelées surfaces magnétiques. Une particule chargée s qui se déplace dans ce champ est alors parfaitement confinée. Elle s'enroule autour des lignes de champ en décrivant une spirale de rayon ρ_s .

$$\rho_s \equiv \frac{v_{th,s}}{\omega_{c,s}} = \frac{(T_s/m_s)^{1/2}}{eB/m_s} \quad (1.6)$$

Où $v_{th,s}$ et $\omega_{c,s}$ sont la vitesse thermique et la pulsation cyclotronique de la particule s , respectivement. Ce rayon de giration est appelé également rayon de Larmor.

Le champ poloïdal B_θ est principalement créé par le courant circulant toroïdalement dans le plasma: le plasma crée sa propre " cage " (figure 1.4). Le champ toroïdal B_ϕ est quant à lui, créé par un courant circulant dans des bobines extérieures, peuvent être supraconductrices comme dans un Tore Supra. Le courant plasma est généré par un champ électrique toroïdal induit par un changement de flux à travers le tore, lui-même généré par un courant circulant dans une bobine primaire.

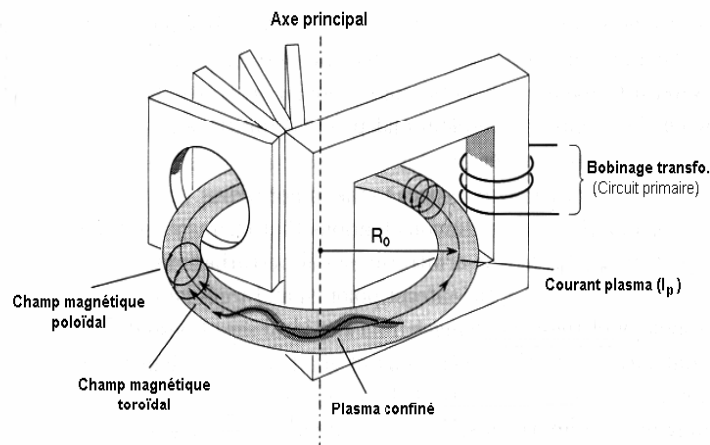


Fig. (1.3): Vue schématique d'un Tokamak.

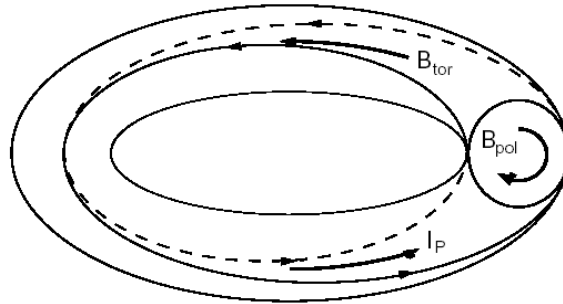


Fig. (1.4): Une ligne de champ sur une surface $q = 2$ magnétique. On peut voir que la ligne de champ magnétique se referme sur elle-même après deux rotations toroïdales.

Le facteur de sécurité q caractérise le taux d'enroulement des lignes de champ tel que:

$$q = \frac{r B_\phi}{R B_\theta} \quad (1.7)$$

B_ϕ , B_θ sont les champs magnétiques toroïdal et poloïdal, respectivement.

Le confinement dans un plasma de Tokamak est essentiellement contrôlé par les pertes diffusives de particules, où le champ magnétique agit sur une particule via la force de Lorentz (1.8).

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1.8)$$

Si les composantes du vecteur de vitesse sont perpendiculaires au champ, cela donne lieu à une force de telle façon que la particule est accélérée avec une accélération constante, où elle exécutera un mouvement circulaire, dans ce cas, la particule aura un confinement parfait. Or dans la direction parallèle au champ, la particule ne subit aucune force, elle ne sera pas confinée. Le mouvement total sera la somme d'un mouvement rectiligne sans accélération superposée à un mouvement circulaire qui donne naissance à un mouvement en hélice. Autrement dit, la particule décrit une hélice autour de la ligne du champ magnétique, on se trouve alors dans une configuration où la direction du champ magnétique est purement toroïdale.

1.4 Equilibre et notions de surfaces magnétiques

L'équilibre magnétique dans les Tokamaks peut être décrit au moyen des équations de la magnétohydrodynamique ou MHD. Cette théorie considère le plasma d'ions et d'électrons comme un seul et même fluide conducteur, caractérisé par ses grandeurs macroscopiques moyennes telles que la densité n , la température T ou la pression P , la vitesse v et la densité de courant j .

Un modèle simple de la MHD idéale est donné par les équations décrites ci-dessous [8-10]:

$$\begin{cases} \vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \end{cases} \quad (1.9)$$

La résolution de ce système permet d'accéder à la forme et aux propriétés des surfaces magnétiques. Ce sont des surfaces fermées, emboîtées et tangentes en tout point au champ magnétique.

Soit $\psi(r)$ constante, l'équation d'une surface magnétique correspondante au champ magnétique $B_0(r)$. Nous avons donc:

$$\nabla \psi \cdot B_0 = 0 \quad (1.10)$$

A l'équilibre, $p_0(r)=\text{constante}$ (p_0 est la pression), elles sont aussi des surfaces magnétiques.

$$\nabla p_0 \cdot B_0 = (j_0 \wedge B_0) \cdot B_0 = 0 \quad (1.11)$$

Si nous définissons de la même manière les surfaces de courant, on remarque que les surfaces $p_0(r)=\text{constante}$ sont aussi des surfaces de courant.

$$\nabla p_0 \cdot j_0 = (j_0 \wedge B_0) \cdot j_0 = 0 \quad (1.12)$$

La résolution de ce système d'équations dans un plasma est associée à des conditions aux limites adéquates qui conduisent à l'équation de Grad-Shafranov [11].

Pour simplifier l'équation de Grad-Shafranov, on utilise le principe de la dynamique des contours, ensuite un nouvel espace orthogonal de travail est défini afin de simplifier l'équation de Grad-Shafranov. Puis une discrétisation de cette équation est proposée. La résolution dans l'espace de flux consiste à résoudre l'équation de Laplace, autrement dit l'équation de Grad Shafranov se réduit à un Laplacien.

$$\nabla^2 U = 0 \quad (1.13)$$

La surface du plasma peut se déformer et donc le vecteur normal à cette surface n'est pas constant, ce qui rend difficile de poser des conditions aux limites. Alors, nous proposons un modèle mathématique qui permet de décrire la géométrie du plasma.

1.5 Formulation du problème et résolution numérique

Un modèle mathématique s'est présenté ci-dessous afin de décrire le comportement de flux de champ magnétique et afin de déterminer la géométrie du plasma [8-10, 12].

$$\begin{cases} -\Delta u = j & \text{dans } w \\ -\Delta u = 0 & \Omega/w \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

j : densité du courant.

u : flux du champ magnétique.

w : région occupée par le plasma.

Ω : domaine total et

$\partial\Omega$: la frontière.

Ce modèle contient des équations de type EDP, alors pour la résolution de ce système d'équations, on utilise la méthode des éléments finis.

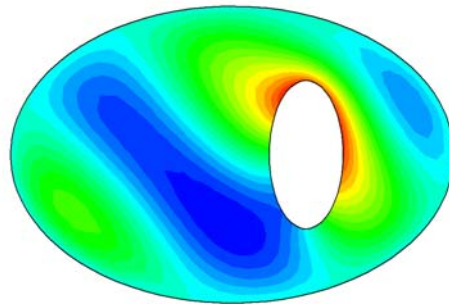


Fig. (1.5): Confinement du plasma par un champ magnétique non uniforme.

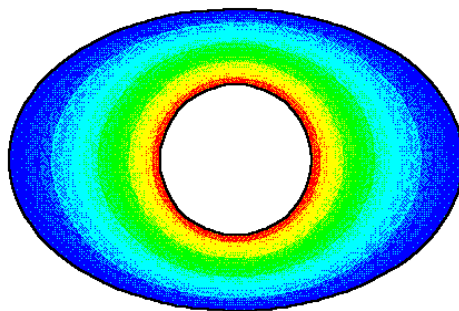


Fig. (1.6): Confinement du plasma par un champ magnétique uniforme.

Dans la figure (1.5), on constate que l'intensité du champ magnétique n'est pas uniforme, donc le plasma se dirige vers la région où l'intensité du champ est forte. Par contre, dans la figure (1.6)

où l'intensité du champ magnétique est uniforme, le plasma se trouve au centre et aura la forme d'un tore.

En supposant que le plasma a la géométrie d'un disque, où $j=\lambda$ un paramètre $\in \mathfrak{R}$, $\Omega = B(0,1) \subset \mathfrak{R}^2$ un disque si Ω a la géométrie d'un disque, le modèle mathématique se réduit à:

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = -\lambda & \text{si } 0 < r < r_0 \\ u'' + \frac{1}{r}u' = 0 & r_0 < r < 1 \\ u(1) = 0, u'(0) = 0, u(r_0) = 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

et en cherchant des solutions radiales, c'est-à-dire $u = u(r)$ (r le rayon de disque), on trouve que:

$$u(r) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{2} r_0^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) & \text{dans le vide} \\ 1 + \frac{\lambda}{4} (r_0^2 - r^2) & \text{dans le plasma} \end{cases} \quad (1.16)$$

Il s'ensuit qu'on peut tracer ces solutions pour voir le comportement de flux du champ magnétique dans le plasma et dans le vide.

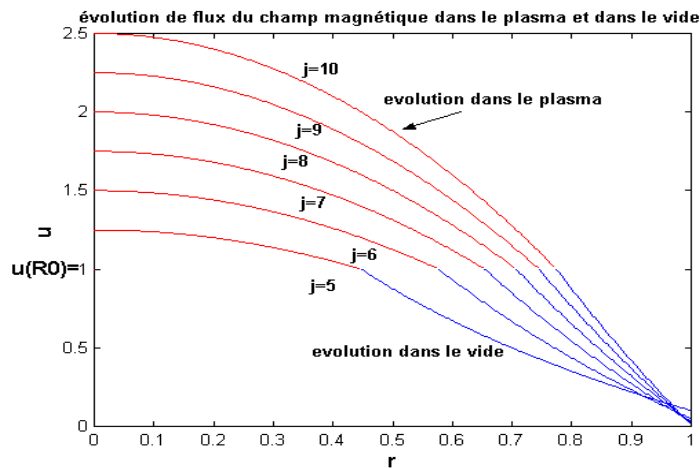


Fig. (1.7): Comportement de flux de champ magnétique dans le plasma et dans le vide

On observe dans la figure (1.7) pour différentes valeurs de j un ensemble de contours emboîtés les uns dans les autres. On déduit que ces contours représentent les surfaces magnétiques confinant le plasma en une structure toroïdale.

On est arrivé à conclure que :

- La modélisation des équations de la magnétohydrodynamique (MHD) permet de traduire le confinement d'un plasma par un problème à frontière libre.
- Pour avoir un bon confinement, il faut que le champ magnétique soit uniforme, et le plasma doit avoir la configuration d'un disque.
- Le flux de champ magnétique est toujours maximum au sein du plasma.

Références

- [1] J. Adam, " La Fusion Nucléaire : une Source d'Energie pour l'Avenir ", Paris Janvier 1999.
- [2] M. Keilhacker, A. Gibson, C. Gormezano, P.J. Lomas, P.R. Thomas, M.L. Watkins, " High Fusion Performance From Deuterium-Tritium Plasmas in JET ", Nuclear Fusion, 39, 2, (1999).
- [3] J.D. Lawson, " Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor ", Proceedings of the Physical Society, B 70, 6, (1957).
- [4] J Wesson, " Tokamaks ", Second Edition, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, (1997).
- [5] R. Dautray, J.P. Watteau, " Fusion Thermonucléaire Contrôlée ", Revue Générale Nucléaire, N° 6, (1980) 562.
- [6] Collection CEA, Série Scientifique, " La fusion Thermonucléaire Contrôlée par Confinement Magnétique ", Masson, Paris, (1987).
- [7] B. Labit, " Transport de Chaleur Electronique dans un Tokamak par Simulation Numérique Directe d'une Turbulence de Petite Echelle ", Thèse de Doctorat de l'Université de Provence, 2002, France.
- [8] S. Belgherras, " Etude de l'Interaction d'un Plasma avec un Champ Magnétique, Application au Confinement d'un Plasma dans un Tokamak ", Thèse de Magister: Université de Tlemcen, Juin 2006 Algérie.
- [9] S. Belgherras, T. Benouaz, " Etude de l'Interaction d'une Onde Electromagnétique avec un Plasma, Cas des Ondes Magnétohydrodynamique ", ISESC, Université de Jijel, pp 72-73, 2005, Algérie.
- [10] S. Belgherras, T. Benouaz, " Elaboration d'un Modèle Mathématique pour l'Etude de l'Equilibre MHD d'un Plasma de Tokamak ", Sipe8, Université de Bechar, pp 116-117 (2006).
- [11] Pierre-Alexandre Gourdain, " Résolution de l'Equilibre Axisymétrique de MHD Idéale avec Frontière Libre en Utilisant un Principe Variationnel ", Thèse : Ecole Centrale de Lyon, 36 Avenur Guy de Collongue-69131 Ecully Cedex, (2001), France.
- [12] S. Belgherras, T. Benouaz, A. Cheknane, " Mathematical Model for Magnetohydrodynamic Equilibrium Study of Tokamak Plasma " International Review of Physics (I.RE.PHY), Vol.2,N.6, pp. 341-343, December.

Chapitre II

Modèle de Turbulence Fluide Pour l'Instabilité ITG

Chapitre II

Modèle de Turbulence Fluide Pour l'Instabilité ITG

2.1 Introduction

Comprendre l'origine et la nature du transport turbulent dans le plasma d'un Tokamak est l'un des enjeux majeurs de la réussite de la fusion par confinement magnétique. Le plasma de Tokamak est loin d'être un milieu stable. Localement, des instabilités apparaissent (tourbillons par exemple) et elles peuvent conduire à une réduction de la qualité du confinement magnétique.

Le but de ce chapitre est de présenter les considérations importantes de physique qui nous ont permis de développer un modèle de faible degré de liberté réduit et composé de 18 équations différentielles ordinaires non linéaires EDO. C'est un modèle capable de rendre compte de l'instabilité liée au gradient de température ionique, permet d'étudier les évolutions non linéaires de l'onde de dérive ainsi que les instabilités magnétohydrodynamiques (MHD). Mais tout d'abord, il est instructif de donner une brève introduction sur les modes de transport dans le plasma de Tokamak en indiquant la classe des instabilités d'échange à laquelle appartient l'instabilité ITG.

2.2 Modes de transport dans le plasma de Tokamak

Dans un plasma de collision avec des lignes du champ magnétique rectilignes, les particules se déplacent le long des orbites hélicoïdales composées d'une trajectoire circulaire de rayon ρ_L (rayon de Larmor) selon la direction perpendiculaire au champ magnétique et une autre trajectoire qui correspond à un mouvement libre dans la direction du champ magnétique.

$$\rho_L = \frac{m v_{\perp}}{e B} \quad (2.1)$$

Dans un tel plasma, il n'existe pas un mouvement perpendiculaire de particules d'une ligne de champ à l'autre et il n'y a pas donc un transport perpendiculaire. Les collisions mènent à la déviation de la trajectoire des particules. Dans la direction perpendiculaire au champ magnétique, les particules ont été déplacées à une distance de l'ordre du rayon de Larmor ρ_L . Le pas de temps $(1 / \nu)$ de ce parcours aléatoire guidé par des événements de diffusion indépendants est le temps caractéristique entre deux collisions, où ν est la fréquence de collision. L'expression suivante donne le coefficient de diffusion à travers le champ magnétique:

$$D \sim \rho_L^2 \nu \quad (2.2)$$

Dans le cas d'un plasma complètement ionisé, ν est la fréquence de collision de l'électron-ion. Ce transport induit par les collisions dans un cylindre est appelé transport classique. Le transport classique est très faible et les pertes de plasma qui lui sont associés ne seraient pas de préoccupation dans un système de confinement magnétique. Sous l'influence de la dérive du champ magnétique non homogène d'un périphérique toroïdal, la caractéristique de l'étape de déplacement des particules est sensiblement supérieure au rayon de Larmor. Le coefficient de diffusion sera donc nettement plus élevé par rapport au cas d'un cylindre carré. Cette théorie qui prend en compte l'influence de la courbure de champ magnétique est appelée théorie néoclassique.

Le transport de la chaleur est un phénomène tout à fait analogue au transport des particules. On peut classer son mécanisme en deux catégories :

- Les effets des collisions entre particules qui vont dévier aléatoirement de leur trajectoire initiale, donnant lieu à une diffusion radiale lorsqu'elles sautent d'une surface magnétique à une autre sous l'effet du choc. C'est le transport dit néoclassique [1-2].
- Le transport anormal [3-4] est dû aux effets de la turbulence. En effets, les fluctuations des champs électrique et magnétique donnent lieu à une lente dérive qui conduit les particules du centre de la décharge vers le bord. Plus ce phénomène de transport est important, moins le confinement est bon.

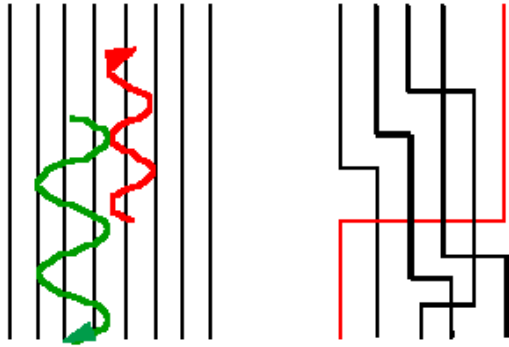


Fig. (2.1): Transport néoclassique

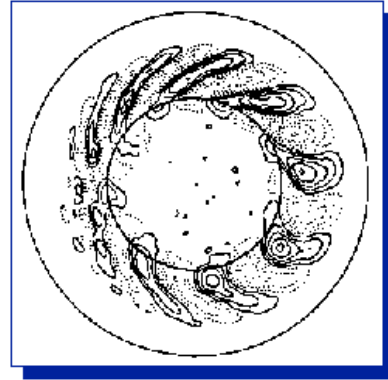


Fig. (2.2): Transport anormal

2.3 Equation d'équilibre de particules

Pour décrire l'évolution de la densité des particules de plasma sur des échelles de temps, on utilise généralement une description fluide. Pour ce faire, l'équation d'équilibre de particules s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nabla \bar{\Gamma} + Q \quad (2.3)$$

$\bar{\Gamma}$: densité de flux de particules.

Q: représente les sources et les puits dus à l'ionisation.

La recombinaison et la charge change. Dans le cas où il y a la diffusion et la convection, $\bar{\Gamma}$ a la forme suivante:

$$\bar{\Gamma}(r, t) = -D(\rho) \bar{\nabla} n(\rho, t) + n(\rho, t) \bar{V}(\rho) \quad (2.4)$$

Où le coefficient de proportionnalité de $\bar{\nabla}$ est le coefficient de diffusion et V a les dimensions d'une vitesse appelée vitesse de pincement. Le coefficient de diffusion est positif par définition et par convention. Un V positif conduit à un flux de particules vers l'extérieur, alors que si V est négatif, cela conduit à un flux de convection vers l'intérieur.

Dans l'état stable ($\partial n_e / \partial t = 0$), si les sources de particules peuvent être négligées ($Q = 0$), le flux de particules est nul et l'équation d'équilibre de particules devient:

$$\frac{\nabla n}{n} = \frac{\bar{V}}{D} \quad (2.5)$$

De cette relation, il est considéré que dans l'étude d'état, la vitesse de pincement négative conduit à la formation d'un profil de densité qui a un pic au centre (gradient de densité négatif). La vitesse

de pincement positif conduit à un profil de densité de cavité. Ainsi, le rapport de D et V peut être facilement obtenu à partir de la longueur de gradient de densité de profil d'état d'équilibre L_n .

$$L_n = \frac{n}{|\nabla n|} \quad (2.6)$$

Toutefois, afin de déterminer séparément D et V , il est nécessaire d'effectuer plus de mesures r solvues en temps de la densité sous des conditions non stationnaires.

2.4 Transport néoclassique

La déformation d'un cylindre dans un tore axisymétrique conduit à un champ toroïdal non uniforme dans un plan poloïdal. Le champ toroïdal est défini par la relation (2.7).

$$B \cong B_0 (1 - \varepsilon \cos \theta) \quad (2.7)$$

ε : est le rapport d'aspect inverse avec un maximum B_{\max} à l'intérieur du tore et un minimum B_{\min} à l'extérieur.

$$\varepsilon = \frac{r}{R} \quad (2.8)$$

Les particules d'énergie E et d'impulsion magnétique μ passent librement le long de la ligne de champ si $E > \mu B_{\max}$.

$$\mu = mv_{\perp}^2 / 2B \quad (2.9)$$

Où $mv_{\perp}^2 / 2$ est l'énergie cinétique de particules perpendiculaire et B représente le champ magnétique. Ces particules sont appelées passantes. Les particules dont $E < \mu B_{\max}$ sont diffusées de la région de fort champ magnétique et vont être piégées. La projection du mouvement des particules piégées sur la section globale poloïdal est une trajectoire de forme banane. L'existence de ces trajectoires bananes a un effet profond sur le transport, puisque les collisions qui dispersent les électrons de leurs orbites piégées font déplacer les particules à travers la surface de flux par la largeur d'orbite banane. La largeur de la banane est d'environ $q\rho_e / \varepsilon^{1/2}$ et par conséquent, le seuil est plus grand que le seuil de la longueur de rayon de Larmor ρ_L associé à la diffusion classique.

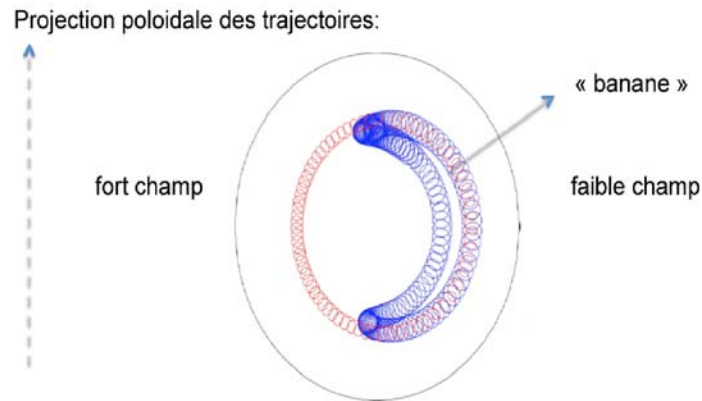


Fig. (2.3): Particules piégées et trajectoires bananes

L'existence de particules piégées exige que la fréquence de collision d'angle d'attaque de diffusion soit:

$$\nu = \frac{\nu_{ei}}{\epsilon} \quad (2.10)$$

Où ν_{ei} est la collisionnalité d'électron-ion et ϵ est le rapport d'aspect, il est assez petit pour permettre aux particules piégées à exécuter de nombreuses orbites bananes avant d'être libres par collision.

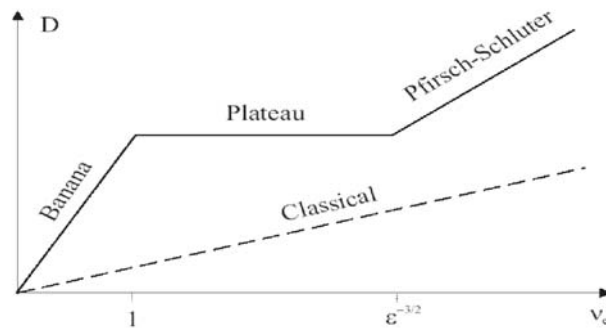


Fig. (2.4): prédiction néo-classique de la variation de D avec la fréquence de collision.

Les lignes en pointillés correspondent au comportement du coefficient de diffusion classique. En termes de paramètres de collision

$$v^* = \frac{v}{\omega_{be}} = \frac{v_{ei} q R}{\varepsilon^{3/2} v_{th}} \quad (2.11)$$

Où

ω_{be} est la fréquence de rebondissement de la trajectoire banane

q : est le facteur de sécurité

R : est le grand rayon et

v_{th} la vitesse thermique.

L'exigence de base ici, c'est juste $v^* < 1$. Les particules satisfaisantes à ce critère seront soumises à un régime banane. Il est à noter que la fréquence v_{ei} dans l'équation (2.11) est la fréquence des collisions entre les électrons et les ions, parce que les collisions entre les particules de la même espèce, en moyenne, ne produisent pas de diffusion nette. Lorsque les collisions sont suffisamment fréquentes pour piéger les particules dans la région de faible champ magnétique qui devient négligeable $v^* > \varepsilon^{-3/2}$, les particules ont un régime dit Pfirsch-Schlüter. Le régime est intermédiaire " régime plateau " lorsque les particules piégées peuvent remplir de nombreuses orbites de transit avant de subir une dispersion Coulomb.

Le calcul exact des coefficients de transport néoclassique sont complexes et peuvent être trouvés dans les références [5-6]. Dans la figure (2.4), nous donnons seulement une image d'illustration de coefficient de diffusion néoclassique avec le comportement de la fréquence de collision. Dans le régime banane, pour $v < 1$, la dépendance de D sur v est linéaire.

Dans le régime plateau qui existe en $1 < v^* < \varepsilon^{3/2}$, le coefficient de diffusion ne dépend pas de la collision. Une nouvelle augmentation de v conduit à une augmentation linéaire de D sur v dans le régime de Pfirsch-Schlüter. Dans tous les régimes, les valeurs de la diffusion néo-classique sont plus élevées que celles de la diffusion classique. En plus de l'augmentation du coefficient de diffusion, la géométrie torique produit aussi une dépendance à l'égard du flux de particules sur les gradients de forces thermiques autres que gradient de densité. En général, le flux de particules néo-classique peut être écrit sous la forme suivante:

$$\Gamma_{nc} = -D_{nc} \nabla n + n \left(c_{T_e} \nabla T_e + c_{T_i} \nabla T_i + c_w E_{||} \right) \quad (2.12)$$

Le premier terme de droite désigne la diffusion (voir figure 2.3), or que selon l'équation (2.4), les termes entre parenthèses représentent la convection de particules. Les termes proportionnels aux gradients de température sont appelés thermodiffusion. La dérive des particules dirigées

radialement vers l'intérieur due au champ électrique parallèle est appelée effet de pincement de Ware [7]. La théorie néoclassique prédit des valeurs positives pour c_{T_e} et c_{T_i} qui correspondent aux particules de pincement dirigées vers l'intérieur. Toutefois, ces coefficients sont très petits et la thermodiffusion néoclassique est généralement négligeable.

Effet de pincement de Ware

Le dernier terme dans l'équation (2.12) n'existe que dans les régimes banane et plateau parce que les particules piégées dépensent énormément de temps dans les parties supérieure et inférieure du tore lorsque le champ électrique torique sera présent [7]. Une interaction du champ électrique parallèle avec les particules piégées dans les orbites bananes résulte en annulation incomplète de la dérive. Des calculs détaillés conduisent à l'expression de pincement de Ware:

$$V_{\text{Ware}} = 2.44 \frac{E_{\parallel}}{B_0} \quad (2.13)$$

Où B_0 est le champ magnétique poloïdal.

Dans notre travail, on ne s'intéresse pas au transport néoclassique [8].

2.5 Transport anormal

Il est généralement admis que le niveau observé expérimentalement des transports dans le Tokamak est dû à des instabilités, à des fluctuations du potentiel électrique et à un champ magnétique du plasma. Conformément à l'échelle des instabilités, elles peuvent être classées en deux catégories: macroscopique et microscopique. La première catégorie concerne les déplacements physiques de plasma à une échelle beaucoup plus grande que le rayon de Larmor et peut être donc décrit par des équations magnétohydrodynamiques. Les instabilités microscopiques sont produites par de petites fluctuations du champ électrique ou magnétique. L'amélioration de la longueur caractéristique du déplacement radial des particules conduit à des transports anormaux de l'énergie et de particules.

2.5.1 Macroinstabilités

Une forte anormalité du transport de particules peut être associée à l'excitation à grande échelle de diverses instabilités MHD: les modes de ballonnements idéal et résistif, les instabilités kinks et les modes de déchirement [9]. Certaines de ces instabilités apparaissent rarement dans les

plasmas du Tokamak, les autres sont facilement déstabilisées et présentées dans un large éventail de conditions d'exploitation. Dans la suite, nous présenterons seulement les instabilités de dents de scie ainsi que le mode localisé au bord qui sont souvent des macroinstabilités présentés dans les plasmas de Tokamak où ils influent fortement sur le transport des particules et de la chaleur.

Tokamaks sont souvent soumis à des instabilités de type dents de scie dans le centre du plasma. Cette instabilité est caractérisée par des relaxations avec un effondrement rapide ou un crash de pression de plasma centre suivie d'un renforcement progressif de la phase. La présence de dents de scie est un canal important de perte d'énergie de la région centrale. La compréhension du mécanisme physique sous-jacente est encore incomplète. Les modèles existants supposent que pour $m = 1$ et $n = 1$, le mode interne résistif est instable pour $q_0 < 1$.

m et n sont respectivement les nombres de modes poloïdaux et toroïdaux

q est le facteur de sécurité à l'axe magnétique [10-12].

Les dents de scie de crash sont les résultats de la reconnexion magnétique pour $m = 1$ de l'île formée à l'intérieure de la surface $q = 1$. L'instabilité est déclenchée lorsque les pics de profil de courant et q deviennent plus petits que 1, tandis que l'abaissement du profil de courant pour $q = 1$ apparait après le crash. Lors de l'écrasement en dents de scie, un mouvement de convection à grande échelle crée l'amélioration des transports dans la région centrale et provoque l'aplatissement des profils de température et de densité au dessus soit disant du rayon de mixtion. La récupération des profils s'effectue par un processus diffusif sur une échelle du temps plus lent. En dehors de rayon inverse r_{inv} , l'effet de l'écrasement en dents de scie se manifeste comme une impulsion de chaleur et de particules se propageant vers l'extérieur.

L'amélioration du régime de confinement connue sous le nom de mode-H est souvent perturbée par les séries quasipériodiques des oscillations de relaxation impliquant des éclatements d'activité MHD et d'émission et connues sous le nom " modes localisés aux bords (ELM) ". ELM résultent de la perte rapide (< 1 ms) de particules et de l'énergie de la région près de la frontière du plasma, ce qui réduit le confinement d'énergie global moyen de 10 à 20 %. Un effet positif de ces oscillations de relaxation permet d'obtenir des conditions d'exploitation quasi-stationnaires. De nombreux modèles ELM ont été proposés mais les mécanismes fondamentaux de ce phénomène ne sont pas encore connus [13, 14].

2.5.2 Microinstabilités

Les microinstabilités sont caractérisées par des longueurs d'onde de l'ordre de quelques rayons de Larmor ionique. L'approximation de déplacement moyen de particules de plasma causée par des microinstabilités est caractérisée par des longueurs d'onde typiquement perpendiculaires du spectre instable $1/k_{\perp}$ et par un temps caractéristique de période de croissance linéaire $1/\gamma$. On peut obtenir une estimation de coefficient de diffusion:

$$D \approx \gamma / k_{\perp}^2 \quad (2.14)$$

Selon le taux de croissance γ , le coefficient de diffusion résultant peut être nettement plus grand que la valeur néoclassique. En outre, selon le type de l'instabilité, une convection dirigée vers l'intérieur ou l'extérieur peut apparaître.

Une classe particulière importante de microinstabilités sont appelées instabilités de dérive, se produisent à la suite de la déstabilisation des ondes de dérive. Les ondes de dérive existent à la suite de petites fluctuations du champ électrique ainsi que la densité et / ou des gradients de température. Lorsque les électrons et les ions sont expulsés de la phase par les processus dissipatifs, tels que les collisions ou les résonances de particules d'ondes, les particules peuvent transférer l'énergie aux ondes qui se développent. La présence de particules piégées a une influence essentielle sur le développement des instabilités de dérive. Ceci est due au fait que les particules passantes et piégées réagissent très différemment par rapport aux oscillations de basse fréquence du potentiel avec des petites vitesses de phase.

Une des plus importantes instabilités de dérive qui résulte de la dynamique des particules passantes est le mode de gradient de température ionique (ITG). Le mode ITG est une onde de dérive conduit par un gradient de pression ionique et déstabilisé par le couplage avec la dérive de transport parallèle dans la courbure magnétique défavorable. Le paramètre η_i est une valeur prévue dépend de gradient de densité logarithmique, du rapport des températures des électrons, des ions et des effets associés à un cisaillement magnétique ou à la présence des impuretés [15-19].

$$\eta_i \equiv \frac{d \ln T_i}{d \ln n_i} \quad (2.15)$$

Les modes d'électrons piégés (TEM) sont essentiellement des ondes de dérive qui sont déstabilisées par un gradient de température des électrons en présence d'une population

d'électrons piégés. Le seuil pour le mode TEM est une valeur critique de $-R\nabla T_e/T_e$ qui dépend de gradient de densité et de la fraction de particules piégées.

L'importance de collision résulte du fait que les particules piégées et passantes se comportent différemment en perturbation du potentiel électrostatique. Lorsque le mode de fréquence ω_{De} est supérieur par rapport à la fréquence de collision de particules, le piégeage peut être négligé pour ces espèces. Par exemple, certains calculs fluides prédisent une disparition de flux de convection et un abaissement des profils de densité pour les collisions effectives définies pour les instabilités d'onde de dérive.

$$v_{\text{eff}} = \frac{v_{ei}}{\omega_{De}} \sim 3 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon^{3/2} v_{ei}^*}{q} \sim 10^{-14} \frac{n_e R Z_{\text{eff}}}{T_e^2} \geq 1 \quad (2.16)$$

Où ω_{De} est la fréquence de dérive de la courbure [20],

Z_{eff} : est la charge effective (C).

R : est le grand rayon (m)

T_e : est la température en (ev).

Les ondes de dérive électrostatiques déstabilisées par des particules piégées et des modes de gradient de température ionique sont les principaux critères pour expliquer les observations de transport de particules anormal. Toutefois, dans certains cas, la contribution des fluctuations magnétiques telles que les instabilités MHD à grand nombre de mode poloïdal qui conduit à une île magnétique à petite échelle (par exemple micro déchirement) semble être évident [21]. Il est probable que les différentes situations physiques se produisent dans différentes régions de la décharge pour plusieurs instabilités magnétiques et électrostatiques. On peut donc tenir compte de la phénoménologie expérimentale à travers la section global du plasma.

2.6 Instabilité d'échange

Les instabilités d'échange ont été d'abord observées et étudiées en dynamique des fluides. Une des plus connues est l'instabilité de Rayleigh-Bénard [22] dont le schéma de principe est présenté sur la figure (2.5.a). Lorsque l'on chauffe un liquide contenu dans un récipient, il se forme un gradient de température. Ce gradient de température ∇T est alors dans le même sens que le champ de gravitation \vec{g} . Au-delà d'un gradient de température critique, il se forme des rouleaux

de convection menant à un état de turbulence. Cette instabilité opère un échange entre régions de différentes températures d'où le nom d'échange.

Dans le Tokamak, le confinement magnétique donne lieu à une température et une densité suffisamment élevées au centre du tore. A ce propos, on distingue trois régions: le cœur du plasma, siège des réactions de fusion; la région dite " de gradient ", caractérisée par des gradients importants de densité et de température; et la région dite " de bord ", où les gradients sont réduits par une forte turbulence. Il existe donc inévitablement une zone située sur le bord extérieur de la machine torique où la situation est analogue à celle d'un fluide lourd se trouvant au dessus d'un fluide léger dans le champ gravitationnel de la terre (instabilité de type Rayleigh Taylor, figure 2.5.b), la force due à la courbure jouant le rôle de la pesanteur.

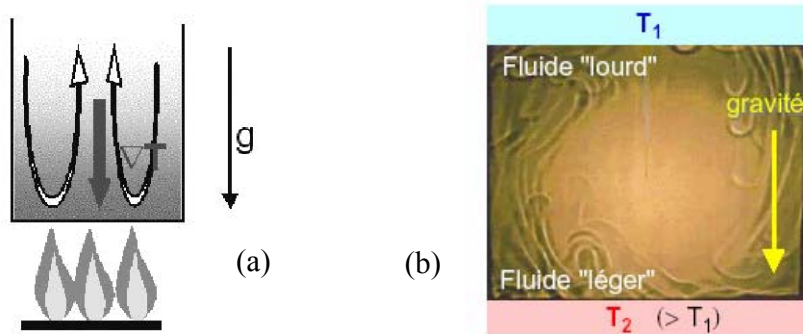


Fig. (2.5): Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

2.7 Instabilité de gradient de température ionique ITG

La turbulence régie par un gradient de température ionique ITG est considérée comme la principale cause de transport thermique anormal des ions dans la région de cœur de Tokamak. De nombreuses simulations numériques ont montré que les flux de cisaillement auto-générés par la turbulence ITG suppriment la turbulence ITG et réduisent le transport thermique des ions à travers les surfaces magnétiques.

Les modes ITG ont deux branches, le mode slab [23-26] et toroïdal [27-28]. Chacun de ces modes deviennent instables lorsque le rapport de gradient de température ionique au gradient de densité η_i devient suffisamment grand. Le mode ITG toroïdal est déstabilisé par η_i et ∇B courbure de la dérive. Le mécanisme impérieux de ce mode est semblable à celle de l'instabilité d'échange. Dans le présent travail, nous nous concentrons nos études sur le mode ITG toroïdal. Afin de comprendre la physique de l'interaction non linéaire entre le transport de convection et le

flux de plasma cisailé, plusieurs modèles non linéaires réduits les décrivent. Par exemple, les modèles de faible degré de liberté pour le mode de gradient de température de l'ion non linéaire (ITG).

Un modèle de faible degré de liberté peut être obtenu auprès de la projection de la dynamique régie par les équations aux dérivées partielles PDE décrivant l'instabilité à un petit nombre d'équations différentielles ordinaires EDO. Le modèle de Lorenz de convection de Rayleigh-Bénard est l'un des exemples les plus connus et les plus réussis. Howard et Krishnamurti ont étendu le modèle de Lorenz à un système de 6 EDO afin d'inclure la formation de flux de cisaillement dans le problème de convection de Rayleigh-Bénard. La dynamique de la turbulence d'échange résistive a aussi été étudiée par des systèmes similaires aux EDO.

Takayama et al résolvent des modèles sous forme des systèmes de cinq et de sept équations différentielles ordinaires EDO de modes d'échange résistif. Ils observent des oscillations dans l'énergie cinétique et le nombre de Nusselt. Ils ont également montré que les flux de cisaillement perpendiculaires à la fois au champ magnétique et à la direction de gradient de pression d'équilibre sont générés et supprimés par la turbulence d'échange résistif. Bian et al ont présenté un autre modèle simple de turbulence d'échange résistif. Le modèle ne contient que le mode fondamental dans la direction poloidal mais le degré de liberté est infini dans la direction de gradient de pression (c'est-à-dire, la direction de petit rayon). Avec ce mode, ils ont montré que l'éclat intermittent (soi-disant avalanches) a lieu dans l'énergie cinétique et le flux de convection lorsque le système est assez instable.

Contrairement à la convection de Rayleigh-Bénard ou la turbulence d'échange résistif, les modes d'onde de dérive tels que les modes ITG comprennent des solutions d'ondes et intrinsèquement ont deux fois plus de degrés de liberté. Par exemple, Hu et Horton ont présenté un modèle de 11 EDO de modes ITG toroidal, avec lequel ils ont montré la présence d'une transition de faible à haut confinement (L-H) et d'une oscillation d'énergie cinétique. Dans le modèle, les flux de cisaillement observés sont faibles et aucun transport de rupture intermittent n'a été observé.

Afin de clarifier le rôle de flux de cisaillement et la transition dynamique pour les modes ITG toroïdaux, Takeda, Benkadda, Hamaguchi et Wakatani ont utilisé 18 degrés de liberté [29], au lieu de 11 selon Hu et Horton [30], ils ont y inclus plus de nombres de modes radiaux dans le

modèle EDO. Dans ce travail, nous avons étudié le mode ITG toroïdal en utilisant 18 degrés de liberté afin de comparer les résultats numériques.

2.7.1 Modèle non linéaire de mode ITG toroïdal

Les instabilités de basses fréquences de type ITG (gradient de température ionique) [6-9] ont reçu une attention considérable de la part des théoriciens des plasmas, dont le comportement est similaire à celui observé dans l'instabilité Rayleigh-Bénard. Ce mode permet de contrôler le transport turbulent de la chaleur dans le cœur des Tokamaks. Le modèle non linéaire PDE de l'instabilité d'énergie toroïdale ITG est donné par les équations de tourbillons et de pression de l'ion données par Horton, Choi et Tang [31]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\perp}^2 \phi - \phi) + [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] = (1 - g + K_i \nabla_{\perp}^2) \frac{\partial \phi}{\partial y} - g \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla_{\perp}^2 \nabla_{\perp}^2 \phi \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [\phi, p] = -K_i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \kappa \nabla_{\perp}^2 p \quad (2.18)$$

Où

$$[a, b] \equiv \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \quad (2.19)$$

C'est le crochet de Poisson. Le champ magnétique uniforme (et donc cisailé) est supposé suivant la direction z de l'ion, alors que le gradient de pression se présente dans la direction x .

Notez que pour ce mode, les dynamiques perpendiculaire et parallèle sont découplées, alors il suffit d'étudier le plan à deux dimensions (2D) de la géométrie sous-jacente.

Dans les équations ci-dessus, g est la gravité effective due à la courbure du champ magnétique.

$$g = \frac{2 L_n}{R} \quad (2.20)$$

μ : la viscosité.

κ : la conductivité thermique.

K_i : le gradient de pression d'ion à l'équilibre

$$\eta_i = \frac{d \ln T_i}{d \ln(n)} \quad (2.21)$$

$$K_i = \frac{T_i}{T_c (\eta_i + 1)} \quad (2.22)$$

x : correspond à la direction radiale et y correspond à la direction poloïdale. Les normes des unités d'onde de dérive sont données par:

$$x \equiv \frac{x}{\rho_s} \quad (2.23)$$

$$y \equiv \frac{y}{\rho_s} \quad (2.24)$$

$$t \equiv \frac{L_n t}{c_s} \quad (2.25)$$

$$p \equiv \frac{L_n T_{i0}}{\rho_s P_{i0} T_{e0}} p \quad (2.26)$$

$$\phi \equiv \frac{e L_n}{B_0 T_{e0} \rho_s} \phi \quad (2.27)$$

$$\mu \equiv \frac{e L_n}{B_0 T_{e0} \rho_s} \mu \quad (2.28)$$

Elles sont utilisées pour la normalisation.

c_s : la vitesse du son d'ion

$$\rho_s = \frac{c_s}{\Omega_i} \quad (2.29)$$

Ω_i : la fréquence cyclotron ionique et l'indice 0 indique les quantités d'équilibre.

Le mode ITG toroïdal est gouverné par le mécanisme d'échange de Rayleigh-Taylor. Ce mécanisme est analogue à celui de la convection de Rayleigh-Bénard dans les fluides neutres et l'instabilité d'échange résistive dans le bord de plasmas. En se basant sur ce principe, on peut définir le nombre de Rayleigh Ra pour le mode ITG qui est similaire aux instabilités mentionnées auparavant.

$$Ra \equiv \frac{g K_i L_x^3}{\mu \kappa} \quad (2.30)$$

Où L_x est la dimension du domaine dans la direction x. Le nombre de Rayleigh est le rapport entre la force de poussée et la force de viscosité. Il caractérise l'effet de la force motrice qui génère la convection thermique dans le système. Nous notons que le nombre de Rayleigh est proportionnel au gradient de pression d'ion, c'est-à-dire :

$$Ra \propto K_i$$

2.7.2 Analyse linéaire du modèle

Nous allons dans cette partie procéder à l'analyse linéaire des équations (2.17) et (2.18) pour obtenir le mode le plus instable. En supposant que les fluctuations ont la forme de :

$$\exp(k_x x + k_y y - i\omega t)$$

Avec

$$k_x = \frac{\pi}{L_x} \quad (2.31)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} \quad (2.32)$$

Par linéarisation des équations (2.17) et (2.18), on obtient la relation de dispersion pour le mode toroïdal ITG:

$$\left(-i(1+k_\perp^2)\omega + ik_y(1-g-K_i k_\perp^2) + \mu k_\perp^2\right)\left(-i\omega + k k_\perp^2\right) - g K_i k_y^2 = 0 \quad (2.33)$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui peut être résolue en considérant que ω égale à:

$$\omega = \frac{1}{2(1+k_\perp^2)} \left(k_y(1-g-K_i k_\perp^2) - i(k k_\perp^2(1+k_\perp^2) + \mu k_\perp^4) \pm \sqrt{D_k} \right) \quad (2.34)$$

Où

$$D_k = \left(k_y(1-g-K_i k_\perp^2) + i(k k_\perp^2(1+k_\perp^2) - \mu k_\perp^4) \right)^2 - 4(1+k_\perp^2)g K_i k_y^2 \quad (2.35)$$

Le taux de croissance est la dérivée de γ .

$$\gamma = \text{Im}(\omega) \quad (2.36)$$

Il s'ensuit que le système devient instable si

$$\frac{(1-g-K_i k_\perp^2)^2 k_\perp^2 k_y^2 \mu / k}{(1+k_\perp^2(1+\mu/\kappa))^2} + \mu k k_\perp^6 - g K_i k_y^2 < 0 \quad (2.37)$$

À partir de l'équation (2.34), le mode le plus instable se produit lorsque:

$$k_x^2 \ll k_y^2 \quad (2.38)$$

$$k_y^2 \sim k_\perp^2 \quad (2.39)$$

$$k_\perp^2 = \frac{1-g}{K_i} \quad (2.40)$$

Partant de ce constat, nous choisissons le mode fondamental de nos simulations numériques d'être un mode adéquat:

$$k_x = \frac{k_y}{2} \quad (2.41)$$

Avec

$$k_x = \sqrt{\frac{1-g}{5 K_i}} \quad (2.42)$$

Notez que ce mode est à proximité du mode le plus instable.

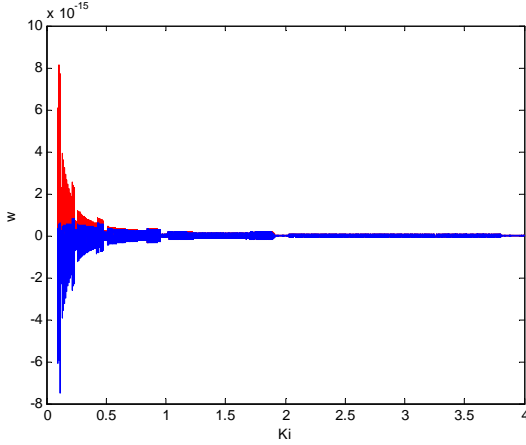


Fig. (2.6): Mode ITG dans les deux sens en fonction de gradient de pression ionique K_i .

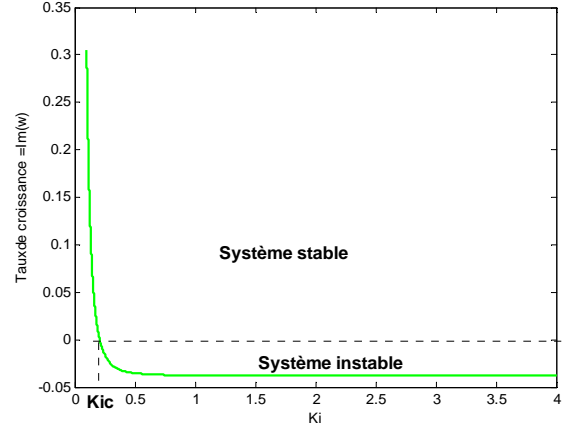


Fig. (2.7): Taux de croissance γ en fonction de gradient de pression ionique K_i .

La figure 2.6 représente l'évolution de mode ITG dans les deux sens en fonction de gradient de pression ionique K_i . Tandis que la courbe tracée dans la figure 2.7 donne la variation du taux de croissance γ en fonction de gradient de pression ionique K_i . Elle indique que le système devient instable à partir de $K_{ic} = 0.21$. Donc, K_{ic} est par définition le seuil d'instabilité.

2.7.3 Modèle de faible degré de liberté de 18 EDO

C'est un modèle obtenu à partir des modes plus instables sélectionnés dans la sous-section précédente et à partir des petits nombres harmoniques plus élevés $(\ell k_x, m k_y)$.

Avec:

$$1 \leq \ell \leq 3 \quad (2.43)$$

$$0 \leq m \leq 1 \quad (2.44)$$

Où, ℓ et m sont les nombres de mode.

k_x et k_y sont les nombres d'ondes minimums dans les directions x et y .

En substituant les équations (2.19) et (2.20) dans les équations (2.45) et (2.46), nous obtenons des équations différentielles ordinaires couplées (EDO) pour les harmoniques. Les composants sélectionnés pour ϕ et p sont donnés par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, t) = & \phi_1^0(t) \sin(k_x x) + \phi_2^0(t) \sin(2k_x x) + \phi_3^0(t) \sin(3k_x x) + \phi_1^c(t) \sin(k_x x) \\
& \cos(k_y y) + \phi_1^s(t) \sin(k_x x) \sin(k_y y) + \phi_2^c(t) \sin(2k_x x) \cos(k_y y) \\
& + \phi_2^s(t) \sin(2k_x x) \sin(k_y y) + \phi_3^c(t) \sin(3k_x x) \cos(k_y y) \\
& + \phi_3^s(t) \sin(3k_x x) \sin(k_y y)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
p(x, y, t) = & p_1^0(t) \sin(k_x x) + p_2^0(t) \sin(2k_x x) + p_3^0(t) \sin(3k_x x) + p_1^c(t) \sin(k_x x) \\
& \cos(k_y y) + p_1^s(t) \sin(k_x x) \sin(k_y y) + p_2^c(t) \sin(2k_x x) \cos(k_y y) \\
& + p_2^s(t) \sin(2k_x x) \sin(k_y y) + p_3^c(t) \sin(3k_x x) \cos(k_y y) \\
& + p_3^s(t) \sin(3k_x x) \sin(k_y y)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

La différence entre le modèle proposé par Takeda et al et celui de Hu-Horton, c'est que le premier contient les modes $(3k_x, k_y)$ tandis que le deuxième comprend les modes $(2k_x, k_y)$. Cependant, Takeda et al ont également montré que les flux cisailés générés par la turbulence dans le modèle de onze équations différentielles ordinaires ne sont pas assez forts pour supprimer les instabilités. Ils ont aussi constaté que le modèle de dix huit équations différentielles ordinaires génère des oscillations de relaxation et des transports intermittentes lorsque le système est largement instable. Cela indique que, dans les conditions de Takeda et al employées, au moins quatre modes (c'est-à-dire, $0 \leq \ell \leq 3$) dans la direction x sont nécessaires pour provoquer des oscillations de relaxation des instabilités ITG.

Les dix huit équations différentielles ordinaires non linéaires couplées utilisées sont données par les expressions numérotées de (2.47) à (2.64):

$$(1 + k_x^2) \frac{d\phi_1^0}{dt} = \frac{k_{xy}^2}{2} k_x^2 \left[3 (\phi_1^c \phi_2^s - \phi_1^s \phi_2^c) + 5 (\phi_2^c \phi_3^s - \phi_2^s \phi_3^c) \right] - \mu k_x^4 \phi_1^0 \tag{2.47}$$

$$(1 + 4k_x^2) \frac{d\phi_2^0}{dt} = 8k_{xy}^2 k_x^2 (\phi_1^c \phi_3^s - \phi_1^s \phi_3^c) - 16\mu k_x^4 \phi_2^0 \tag{2.48}$$

$$(1 + 9k_x^2) \frac{d\phi_3^0}{dt} = \frac{9}{2} k_{xy}^2 k_x^2 (\phi_1^s \phi_2^c - \phi_1^c \phi_2^s) - 81\mu k_x^4 \phi_3^0 \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
(1 + k_1^2) \frac{d\phi_1^c}{dt} = & -k_{xy}^2 \left[(k_2^2 - k_x^2) \phi_1^0 \phi_2^s - 2 (k_1^2 - 4k_x^2) \phi_2^0 \phi_1^s \right. \\
& \left. + 2 (k_3^2 - 4k_x^2) \phi_2^0 \phi_3^s - 3 (k_2^2 - 9k_x^2) \phi_3^0 \phi_2^s \right] \\
& - (1 - g - K_1 k_1^2) k_y \phi_1^s + g k_y p_1^s - \mu k_1^4 \phi_1^c
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$(1+k_1^2) \frac{d\phi_1^s}{dt} = k_{xy}^2 \left[\begin{aligned} & \left(k_2^2 - k_x^2 \right) \phi_1^0 \phi_2^c - 2 \left(k_1^2 - 4k_x^2 \right) \phi_2^0 \phi_1^c \\ & + 2 \left(k_3^2 - 4k_x^2 \right) \phi_2^0 \phi_3^c - 3 \left(k_2^2 - 9k_x^2 \right) \phi_3^0 \phi_2^c \end{aligned} \right] \quad (2.51)$$

$$+ (1-g-K_i k_1^2) k_y \phi_1^c - g k_y p_1^c - \mu k_1^4 \phi_1^s$$

$$(1+k_2^2) \frac{d\phi_2^c}{dt} = -k_{xy}^2 \left[\begin{aligned} & \left(k_1^2 - k_x^2 \right) \phi_1^0 \phi_1^s + 2 \left(k_3^2 - k_x^2 \right) \phi_1^0 \phi_3^c \\ & - 3 \left(k_1^2 - 9k_x^2 \right) \phi_3^0 \phi_1^s \end{aligned} \right] \quad (2.52)$$

$$- (1-g-K_i k_2^2) k_y \phi_2^s + g k_y p_2^s - \mu k_2^4 \phi_2^c$$

$$(1+k_2^2) \frac{d\phi_2^s}{dt} = k_{xy}^2 \left[\begin{aligned} & \left(k_1^2 - k_x^2 \right) \phi_1^0 \phi_1^c + \left(k_3^2 - k_x^2 \right) \phi_1^0 \phi_3^c \\ & - 3 \left(k_1^2 - 9k_x^2 \right) \phi_3^0 \phi_1^c \end{aligned} \right] \quad (2.53)$$

$$+ (1-g-K_i k_2^2) k_y \phi_2^c - g k_y p_2^c - \mu k_2^4 \phi_2^s$$

$$(1+k_3^2) \frac{d\phi_3^c}{dt} = -k_{xy}^2 \left[\left(k_2^2 - k_x^2 \right) \phi_1^0 \phi_2^s + 2 \left(k_1^2 - 4k_x^2 \right) \phi_2^0 \phi_1^s \right] \quad (2.54)$$

$$- (1-g-K_i k_3^2) k_y \phi_3^s + g k_y p_3^s - \mu k_3^4 \phi_3^c$$

$$(1+k_3^2) \frac{d\phi_3^s}{dt} = k_{xy}^2 \left[\left(k_2^2 - k_x^2 \right) \phi_1^0 \phi_2^c + 2 \left(k_1^2 - 4k_x^2 \right) \phi_2^0 \phi_1^c \right] \quad (2.55)$$

$$+ (1-g-K_i k_3^2) k_y \phi_3^c - g k_y p_3^c - \mu k_3^4 \phi_3^s$$

$$\frac{dp_1^0}{dt} = \frac{k_{xy}^2}{2} \left(p_1^s \phi_2^c - p_1^c \phi_2^s + p_2^s \phi_1^c - p_2^c \phi_1^s + p_3^s \phi_2^c - p_3^c \phi_2^s + p_2^s \phi_3^c - p_2^c \phi_3^s \right) - k k_x^2 p_1^0 \quad (2.56)$$

$$\frac{dp_2^0}{dt} = k_{xy}^2 \left(p_1^c \phi_1^s - p_1^s \phi_1^c + p_1^c \phi_3^s - p_1^s \phi_3^c + p_3^c \phi_1^s - p_3^s \phi_1^c \right) - 4k k_x^2 p_2^0 \quad (2.57)$$

$$\frac{dp_3^0}{dt} = -\frac{3k_{xy}^2}{2} \left(p_1^s \phi_2^c - p_1^c \phi_2^s + p_2^s \phi_1^c - p_2^c \phi_1^s \right) - 9k k_x^2 p_3^0 \quad (2.58)$$

$$\frac{dp_1^c}{dt} = k_{xy}^2 \left[\begin{aligned} & \left(p_1^0 \phi_2^s - p_2^s \phi_1^0 \right) - 2 \left(p_2^0 \phi_1^s - p_1^s \phi_2^0 \right) \\ & + 2 \left(p_2^0 \phi_3^s - p_3^s \phi_2^0 \right) - 3 \left(p_3^0 \phi_2^s - p_2^s \phi_3^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (2.59)$$

$$- K_i k_y \phi_1^s - k k_1^2 p_1^c$$

$$\frac{dp_1^s}{dt} = -k_{xy}^2 \left[\begin{aligned} & \left(p_1^0 \phi_2^c - p_2^c \phi_1^0 \right) - 2 \left(p_2^0 \phi_1^c - p_1^c \phi_2^0 \right) \\ & + 2 \left(p_2^0 \phi_3^c - p_3^c \phi_2^0 \right) - 3 \left(p_3^0 \phi_2^c - p_2^c \phi_3^0 \right) \end{aligned} \right] \quad (2.60)$$

$$+ K_i k_y \phi_1^c - k k_1^2 p_1^s$$

$$\frac{dp_2^c}{dt} = k_{xy}^2 \left[(p_1^0 \phi_1^s - p_1^s \phi_1^0) + (p_1^0 \phi_3^s - p_3^s \phi_1^0) - 3 (p_3^0 \phi_1^s - p_1^s \phi_3^0) \right] - K_i k_y \phi_2^s - k k_2^2 p_2^c \quad (2.61)$$

$$\frac{dp_2^s}{dt} = -k_{xy}^2 \left[(p_1^0 \phi_1^c - p_1^c \phi_1^0) + (p_1^0 \phi_3^c - p_3^c \phi_1^0) - 3 (p_3^0 \phi_1^c - p_1^c \phi_3^0) \right] + K_i k_y \phi_2^c - k k_2^2 p_2^s \quad (2.62)$$

$$\frac{dp_3^c}{dt} = k_{xy}^2 \left[(p_1^0 \phi_2^s - p_2^s \phi_1^0) + 2 (p_2^0 \phi_1^s - p_1^s \phi_2^0) \right] - K_i k_y \phi_3^s - k k_3^2 p_3^c \quad (2.63)$$

$$\frac{dp_3^s}{dt} = -k_{xy}^2 \left[(p_1^0 \phi_2^c - p_2^c \phi_1^0) + 2 (p_2^0 \phi_1^c - p_1^c \phi_2^0) \right] + K_i k_y \phi_3^c - k k_3^2 p_3^s \quad (2.64)$$

Sachant que:

$$k_1^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.65)$$

$$k_2^2 = 4k_x^2 + k_y^2 \quad (2.66)$$

$$k_3^2 = 9k_x^2 + k_y^2 \quad (2.67)$$

$$k_{xy}^2 = \frac{1}{2} k_x k_y \quad (2.68)$$

Les grandeurs caractéristiques du système qui peuvent être évaluées à partir des solutions numériques sont:

- L'énergie cinétique du système:

$$K = \frac{1}{2} \int \phi^2 + (\nabla_{\perp} \phi)^2 dV / V = \frac{1}{2} \langle \phi^2 + (\nabla_{\perp} \phi)^2 \rangle_V \quad (2.69)$$

Où

V est le volume total du système.

$\langle \rangle_V$ signifie le volume moyen.

- Energie cinétique du flux de cisaillement moyen ($m = 0$)

$$K_0 = \sum_{\ell=1}^{\ell=3} \frac{1}{4} (1 + \ell^2 k_x^2) (\phi_1^0)^2 \quad (2.70)$$

- Les composants du mode radial fondamental ($m = 1$) peuvent être définis par (2.71)

$$K_\ell = \frac{1}{8} (1 + \ell^2 k_x^2 + k_y^2) \left[(\phi_\ell^c)^2 + (\phi_\ell^s)^2 \right] \quad \ell = 1, 2, 3 \quad (2.71)$$

Il faut noter que le flux moyen du plasma dans la direction de y , c'est-à-dire :

$$V_y(x, t) = - \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle_y \quad (2.72)$$

$$\langle \rangle_y = \int \frac{dy}{L_y} \quad (2.73)$$

est caractérisé par le mode $m = 0$ du potentiel électrique ϕ , c'est-à-dire:

$$\langle \phi \rangle_y = \phi_1^0(t) \sin(k_x x) + \phi_2^0(t) \sin(2k_x x) + \phi_3^0(t) \sin(3k_x x) \quad (2.74)$$

Les flux de plasma générés par la turbulence changent les caractéristiques du transport anormal, car ils tendent à réduire le taux de croissance ou même de supprimer complètement les instabilités. Les flux sont généralement produits par le rapport de tension de Reynolds S_R qui est défini par:

$$S_R = \langle v_x v_y \rangle_v \quad (2.75)$$

Avec

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.76)$$

$$v_y = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.77)$$

Le transport anormal de la chaleur se caractérise par le flux de chaleur par convection Γ donné par la relation (2.78). Or que le nombre de Nusselt Nu est défini par l'équation (2.79).

$$\Gamma(x, t) = \int p v_x dy / L_y = \langle p v_x \rangle_y \quad (2.78)$$

$$N_u = 1 + \langle p v_x \rangle_v / \left(k \frac{dP_0}{dx} \right) = 1 + \frac{\langle p v_x \rangle_v}{k K_i} \quad (2.79)$$

Il faut tenir compte que le nombre de Nusselt est le rapport entre le flux de chaleur total (c-à-d la somme des flux de chaleur par convection et par conduction) et le flux de chaleur par conduction.

C'est un nombre qui est typiquement élevé lorsque le système est dans son état turbulent où le flux convectif est habituellement beaucoup plus grand que le flux de chaleur par conduction.

2.7.4 Résultat de la simulation numérique

Nous avons essayé dans cette sous section de trouver et de découvrir les solutions des équations dynamiques qui sont très intensives pour la détermination de l'énergie cinétique et du nombre de Nusselt pour différentes valeurs de K_i . Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 puisqu'il s'agit d'un système d'équations différentielles non linéaires. Cette méthode assure, en général, une meilleure stabilité de la solution que la méthode d'Euler.

Le choix des paramètres sera relatif au Takeda et al:

$$g = 0.05, \quad \mu = 0.04 \quad \text{et} \quad k = 0.01$$

Les équations sont résolues dans une zone rectangulaire avec des parois parfaitement conductrices étant située de $x = 0$ à $x = L$.

$$0 \leq x \leq L_x \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq L_y$$

Les conditions aux limites périodiques sont imposées dans la direction de y .

$$\phi(x=0, L_x) = 0 \quad p(x=0, L_x) = 0$$

Le gradient de pression (température) ionique d'équilibre normalisé $K_i(\eta_i)$ est un paramètre d'équations (2.17) et (2.18) qui contrôle le taux de croissance du mode ITG.

En vertu de ces paramètres, le seuil d'instabilité pour le paramètre K_i est donné par $K_{ic} = 0.21$.

Exemple 1

Prenons une valeur légèrement au-dessus du seuil de stabilité ($K_i = 0.3$). Le système dans ce cas atteint un autre état d'équilibre avec les flux de convection finis.

Les figures (2.8), (2.9) et (2.10) donnent respectivement les solutions des composants de ϕ et de p ainsi que celles de ϕ et p en même temps obtenues en résolvant le modèle proposé par Takeda et al.

La figure (2.11) indique l'évolution temporelle des énergies cinétiques. On remarque que l'énergie K_1 est dominante et presque égale à K_{totale} . À l'état stationnaire $K_0 \approx K_2$, on peut dire aussi que dans ces conditions au moins quatre modes (c-à-d $0 \leq l \leq 3$) dans la direction x sont nécessaires pour provoquer des oscillations de relaxation des instabilités ITG.

La variation temporelle du nombre de Nusselt ($N_u = f(t)$), le plan de phase (nombre de Nusselt en fonction de l'énergie du flux de cisaillement K_0) et l'espace de mouvement ($N_u = f(t, K_0)$) sont présentés sur les figures (2.12), (2.13) et (2.14). Ces courbes indiquent explicitement que le système converge vers une limite fixe à un tel état d'équilibre.

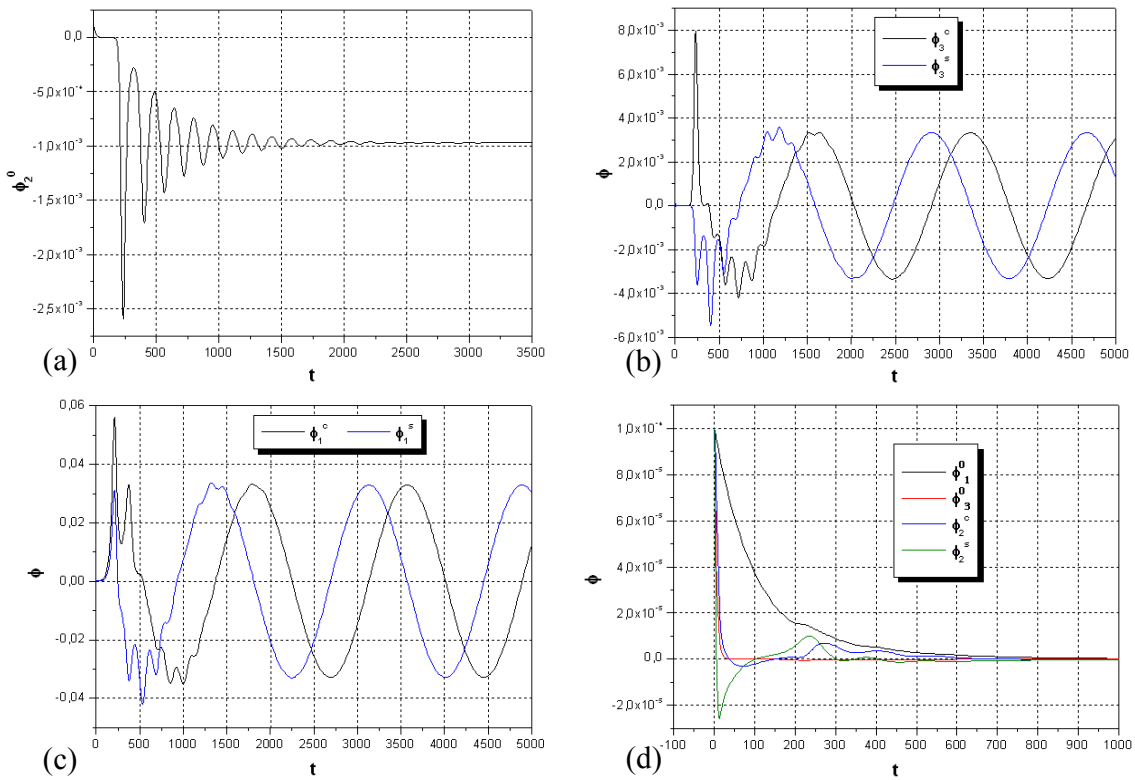


Fig. (2.8): Solutions ϕ du modèle de Takeda. (a): donne $\phi_2^0 = f(t)$. (b): donne $\phi_3^c = f(t)$, $\phi_3^s = f(t)$. (c): donne $\phi_1^c = f(t)$, $\phi_1^s = f(t)$. (d): donne ϕ_1^0 , ϕ_3^0 , ϕ_2^c et ϕ_2^s en fonction du temps.

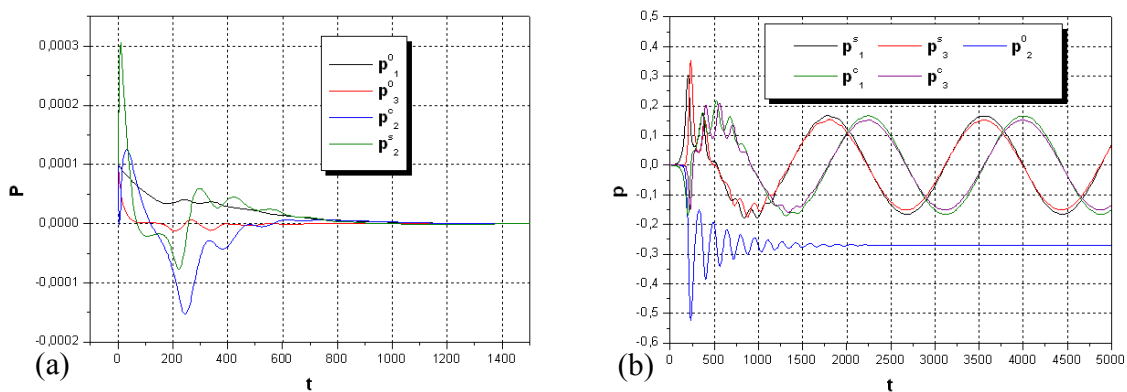


Fig. (2.9): Solutions P du modèle de Takeda. (a): donne p_1^0 , p_3^0 , p_2^c et p_2^s en fonction du temps. (b) donne p_1^s , p_3^s , p_2^0 , p_1^c et p_3^c en fonction du temps

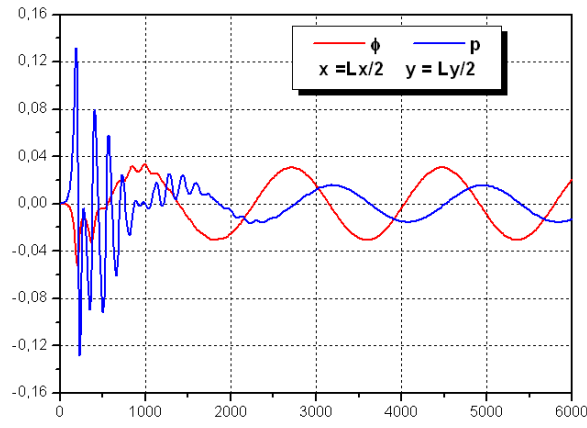


Fig. (2.10): Solutions numériques de $\phi(t, L_x/2, L_y/2)$ et de $p(t, L_x/2, L_y/2)$ obtenues à partir des équations (2.45) et (2.46).

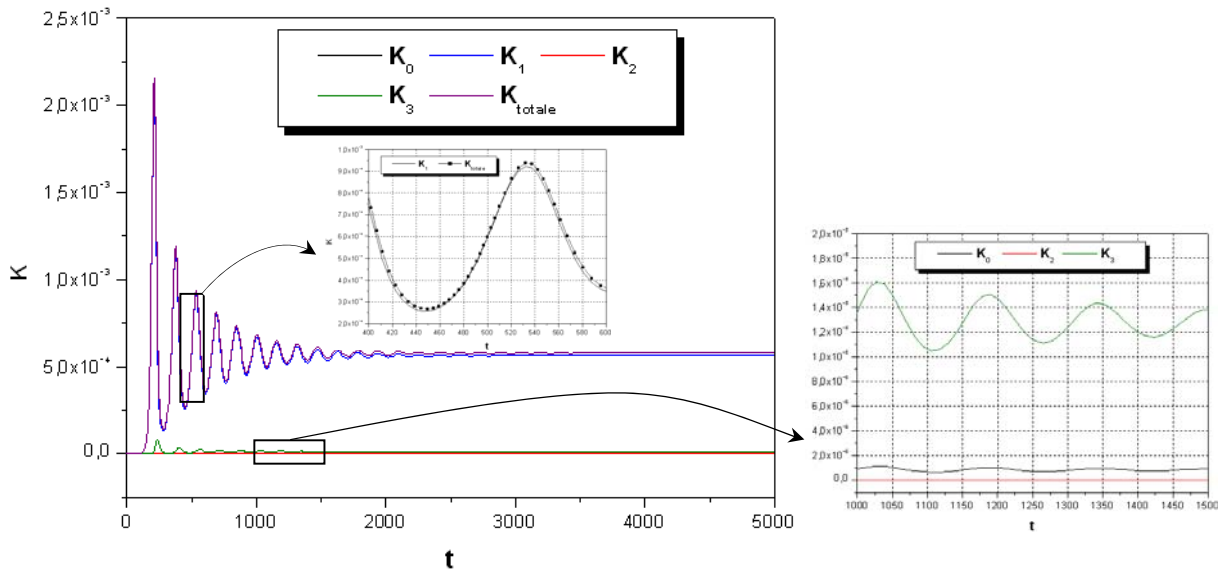


Fig. (2.11): Energies cinétiques en fonction du temps. K_1 est dominante ($K_1 \approx K_{totale}$) et $K_0 \approx K_2$ (état stationnaire).

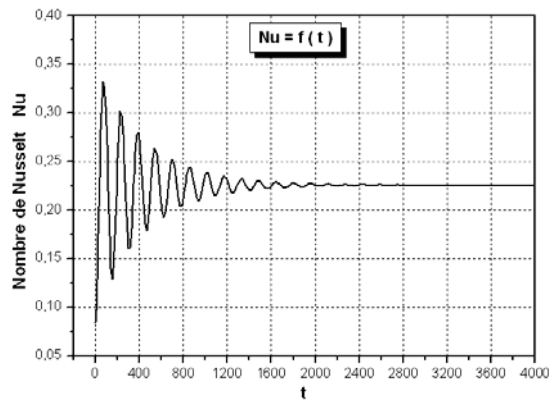


Fig. (2.12): Evolution temporelle du nombre de Nusselt

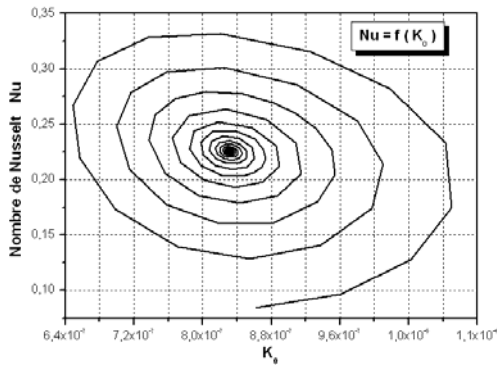


Fig. (2.13): Plan de phase. $Nu = f(K_0)$.

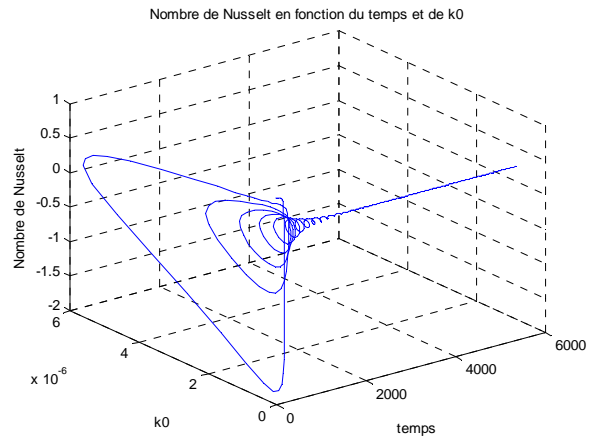


Fig. (2.14): Espace de mouvement. $Nu = f(t, K_0)$.

Exemple 2

Le comportement des énergies cinétiques suivant le temps est représenté sur la figure (2.15). Ces courbes tracées prouvent que ces énergies évoluent de façon périodique et décalée. Le paradigme fondamental de l'écologie théorique dans cet exemple, est que le système délivre des valeurs fournissant des oscillations stables en considérant que $K_i = 0.3637$.

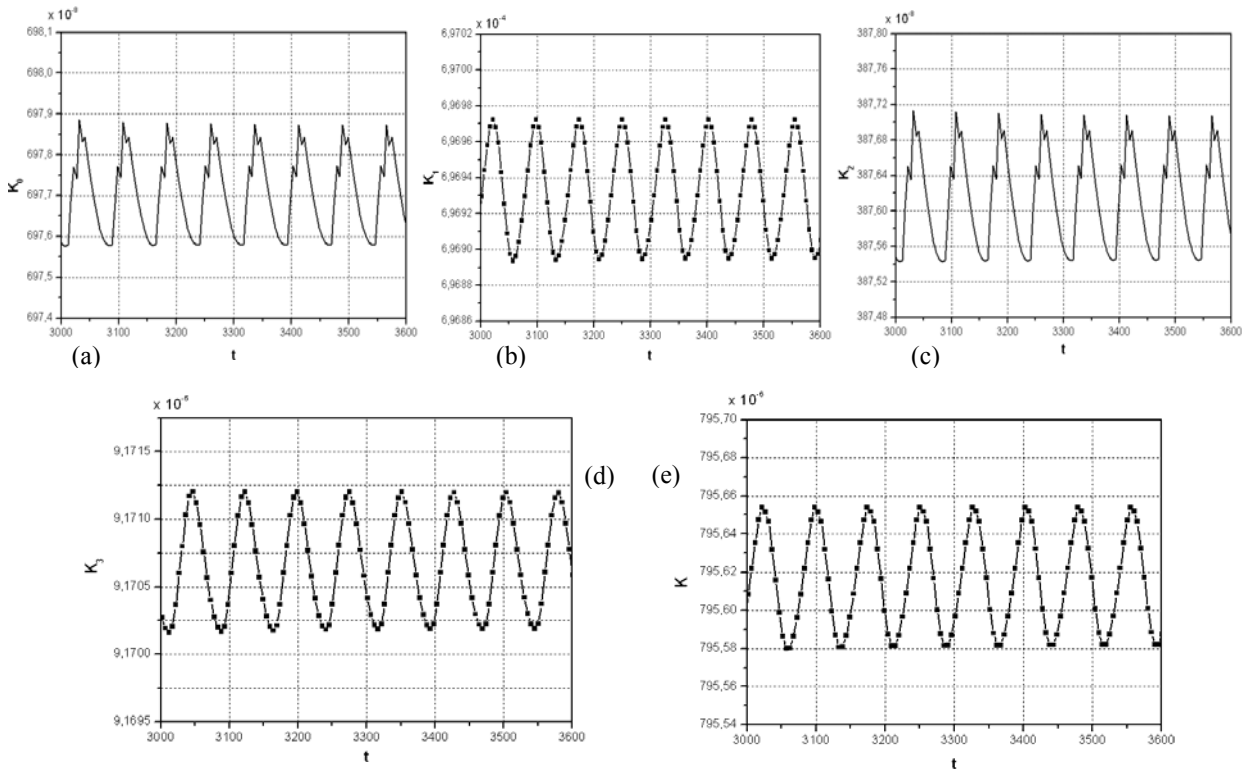


Fig. (2.15): Energies cinétiques en fonction du temps. (a): $K_0 = f(t)$. (b): $K_1 = f(t)$. (c): $K_2 = f(t)$. (d): $K_3 = f(t)$. (e): $K_{totale} = f(t)$.

De même, on remarque d'après la figure (2.16) que le nombre de Nusselt N_u subit des oscillations périodiques entretenues éternellement avec amplitude constante. Notez aussi qu'un tel comportement a été également apparu selon la figure (2.17) qui prouve que le tracé de l'espace de mouvement donne un cycle de limite simple.

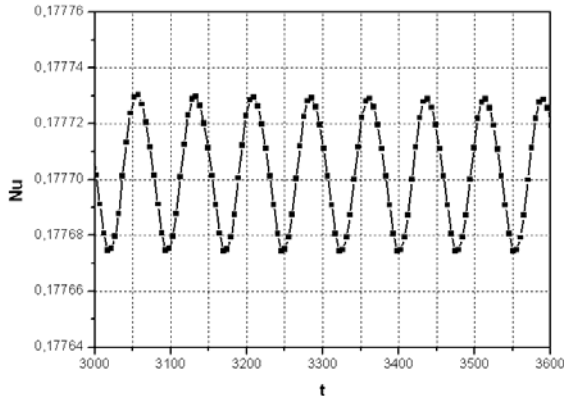


Fig. (2.16): Variation instantanée du nombre de Nusselt

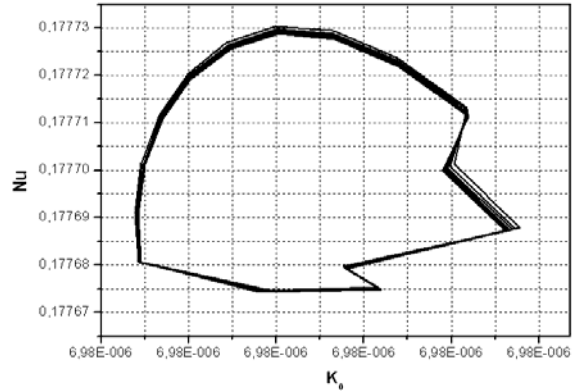


Fig. (2.17): Plan de phase. $Nu = f(K_0)$.

Exemple 3

A partir du programme de calcul réalisé, il a été prouvé par l'intermédiaire de la figure (2.18) qu'il existe de nombreuses variantes pour les énergies cinétiques si $K_i = 0.5$.

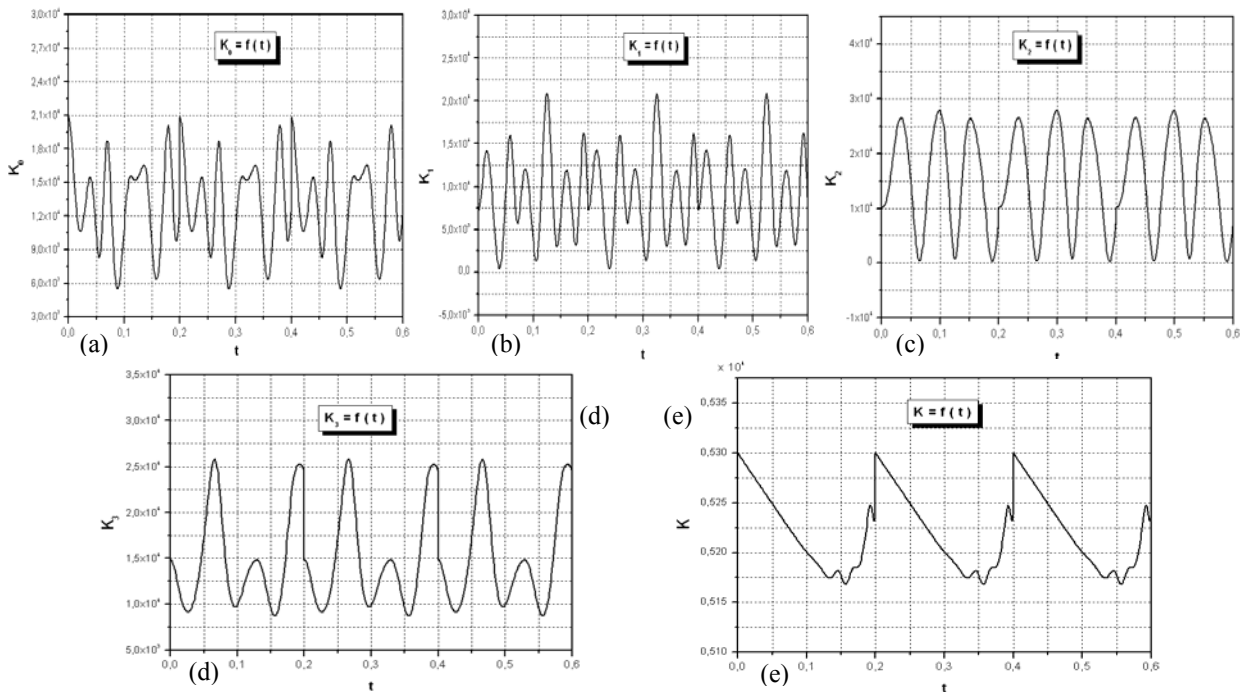


Fig. (2.18): Energies cinétiques en fonction du temps. (a): $K_0 = f(t)$. (b): $K_1 = f(t)$. (c): $K_2 = f(t)$. (d): $K_3 = f(t)$. (e): $K_{totale} = f(t)$.

Les figures (2.19) et (2.20) donnent respectivement la variation instantanée de Nu et la trajectoire dans le plan de phase (K_0, N_u). Nous avons constaté que les fréquences des oscillations changent lorsque K_i augmente mais le système présente encore des oscillations périodiques. Il s'ensuit qu'on trouve aussi la trajectoire est sous forme un autre type de cycle de limite.

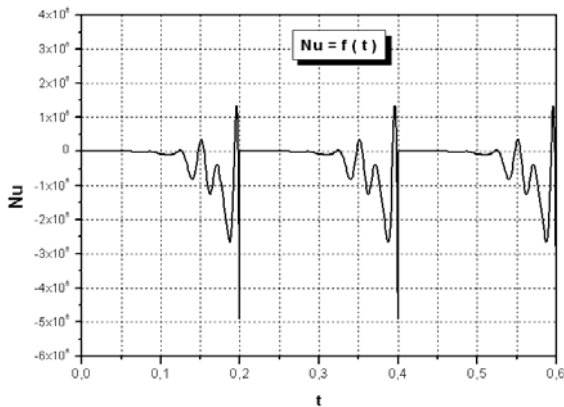


Fig. (2.19): Evolution temporelle du nombre de Nusselt

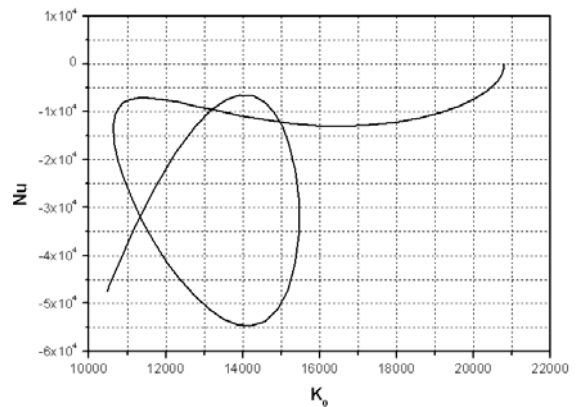


Fig. (2.20): Plan de phase. $Nu = f(K_0)$.

Exemple 4

Lorsque K_i augmente progressivement (étant donné que la valeur de K_i égale à 0.6), le système bifurque vers un état chaotique plus compliqué.

Les solutions de ϕ et de p calculées à partir de la résolution du modèle de Takeda et al sont illustrées sur les figures (2.21) et (2.22).

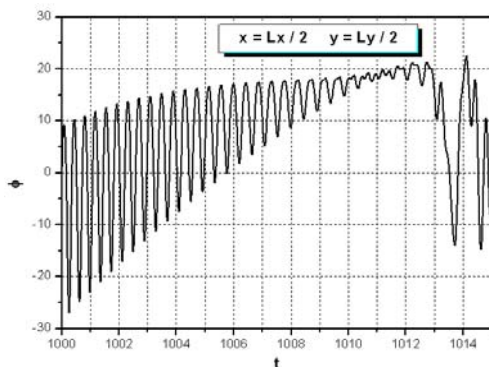


Fig. (2.21): Variation instantanée de $\phi(t, L_x/2, L_y/2)$

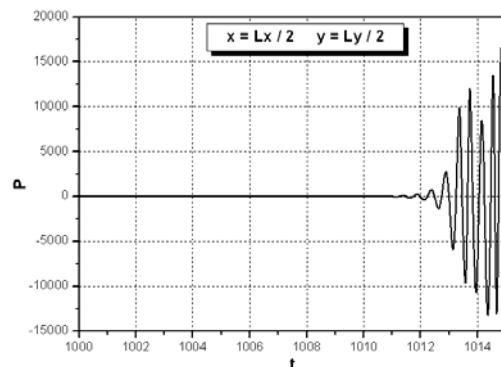


Fig. (2.22): Variation instantanée de $p(t, L_x/2, L_y/2)$

Comme c'est indiqué sur les graphes (2.23) et (2.24), les évolutions des énergies cinétiques et le nombre de Nusselt en fonction du temps ne sont plus des oscillations périodiques. Ces remarques

sont confirmées aussi par la figure (2.25) qui réaffirme que le système présente une trajectoire complexe dans l'espace de phase (K_0, N_u) .

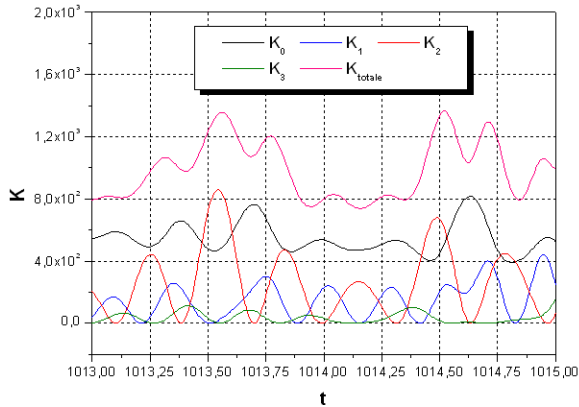


Fig. (2.23): Variations instantanées des énergies cinétiques.

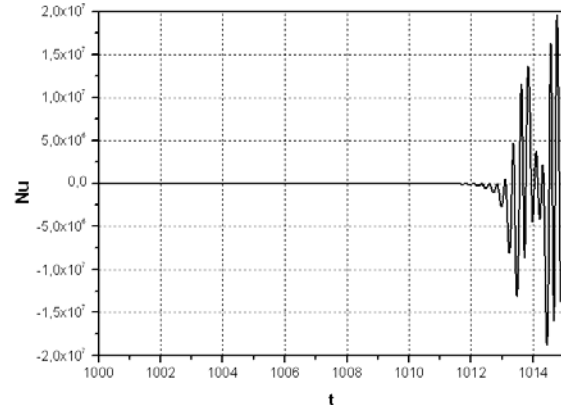


Fig. (2.24): Evolution temporelle du nombre de Nusselt

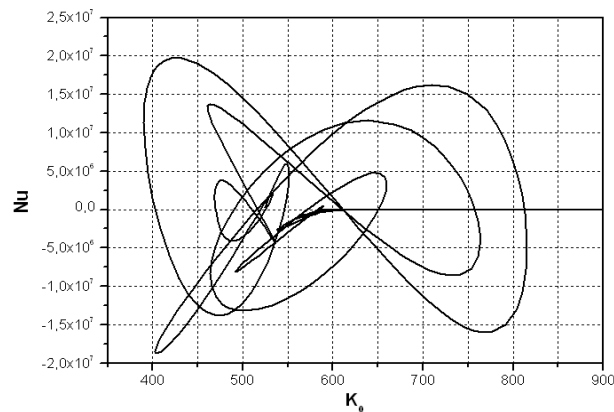


Fig. (2.25): Plan de phase. $Nu = f(K_0)$.

Exemple 5

Si K_i augmente encore et dépasse la valeur 3, le système devient fortement turbulent. Dans ces conditions, les fluctuations montrent un phénomène d'intermittence. Pour ce faire, nous avons choisi la valeur de 4 pour voir et découvrir le comportement des énergies cinétiques et du nombre de Nusselt cette fois ci dont les courbes relatives sont tracées sur les graphes (2.26) et (2.27). Dans ces figures, l'accroissement de l'explosion intermittent de ces quantités est clairement visible. Une telle évolution dans le temps de ces quantités physiques peut être expliquée par l'accroissement des modes ITG, ce qui va provoquer par conséquent un développement approprié de la turbulence puis un amortissement. Ces aspects continuent alternativement. Nous appelons cette phase la " Phase de Rupture ". Ce mécanisme peut s'analyser par l'amortissement des modes ITG. C'est un mécanisme qui est dû à l'élévation du flux de cisaillement, ce qui

permet de supprimer les modes ITG. Ensuite, le flux généré cisailé par les modes ITG continuera d'exister pour un certain temps, mais se dégrade progressivement en raison de l'amortissement visqueux.

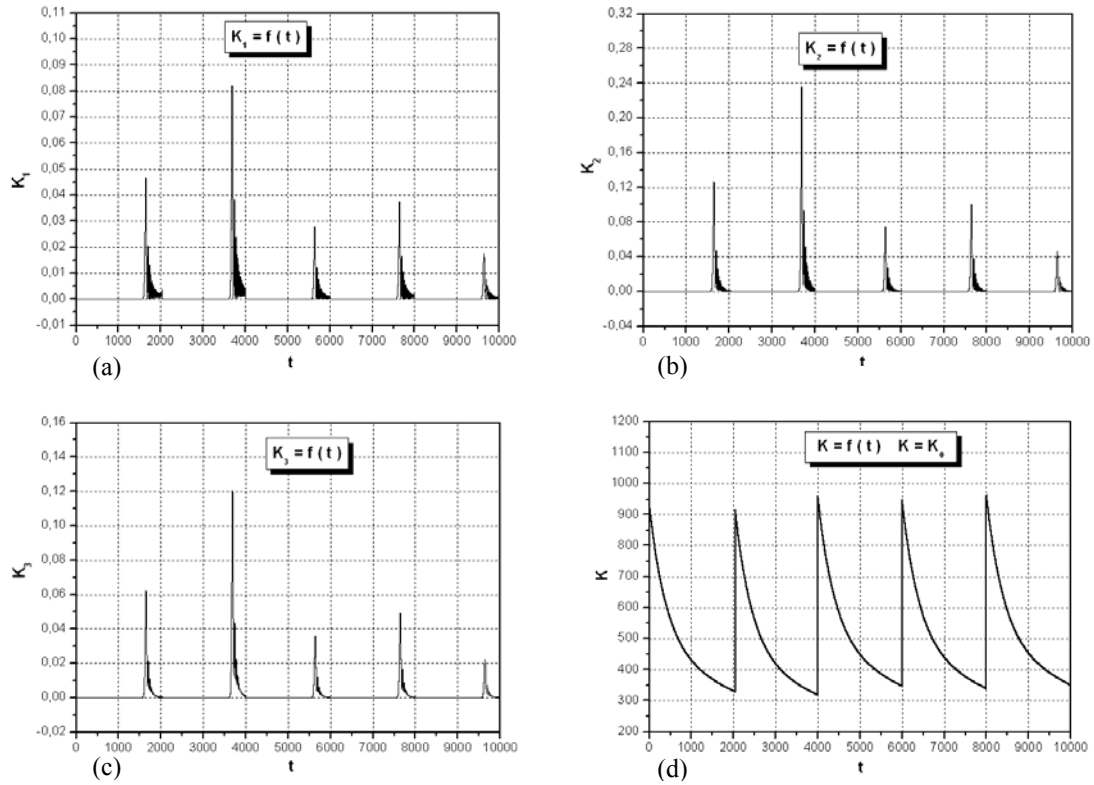


Fig. (2.26): Energies cinétiques en fonction du temps. (a): $K_1 = f(t)$. (b): $K_2 = f(t)$.
(c): $K_3 = f(t)$. (d): $K_{\text{totale}} = K_0 = f(t)$.

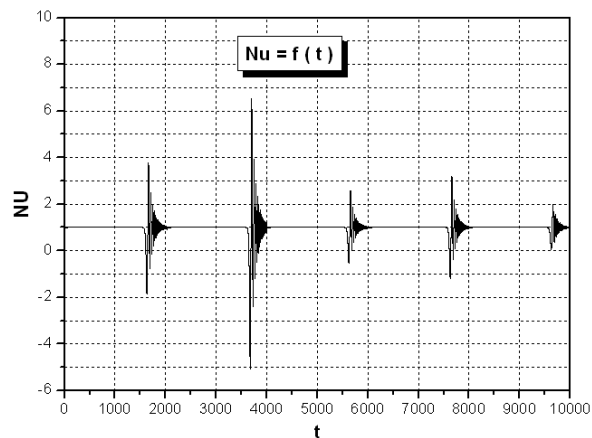


Fig. (2.27): Evolution temporelle du nombre de Nusselt

Les trajectoires définies dans l'espace des phases (K_0 , N_u) sont tracées sur la figure (2.28). (a) phase d'éclatement, (b) phase laminaire, et (c) phases de basculement.

Dans la phase d'éclatement, le système est dans un état fortement turbulent, la trajectoire est plus complexe que ceux dans toutes les autres phases. Nous notons également que l'amplitude des K_0 et N_u peut être largement variable. Dans la phase laminaire, le système suit une trajectoire qui correspond à la valeur de K_0 , l'amplitude de l'oscillation N_u diminue progressivement. La diminution de K_0 , c'est-à-dire que l'énergie du flux cisaillement est due à l'amortissement visqueux. Dans la phase de basculement, le flux de cisaillements continu à diminuer, mais N_u et particulièrement le transport de chaleur par convection croît progressivement en raison de la ré-excitation d'instabilités ITG.

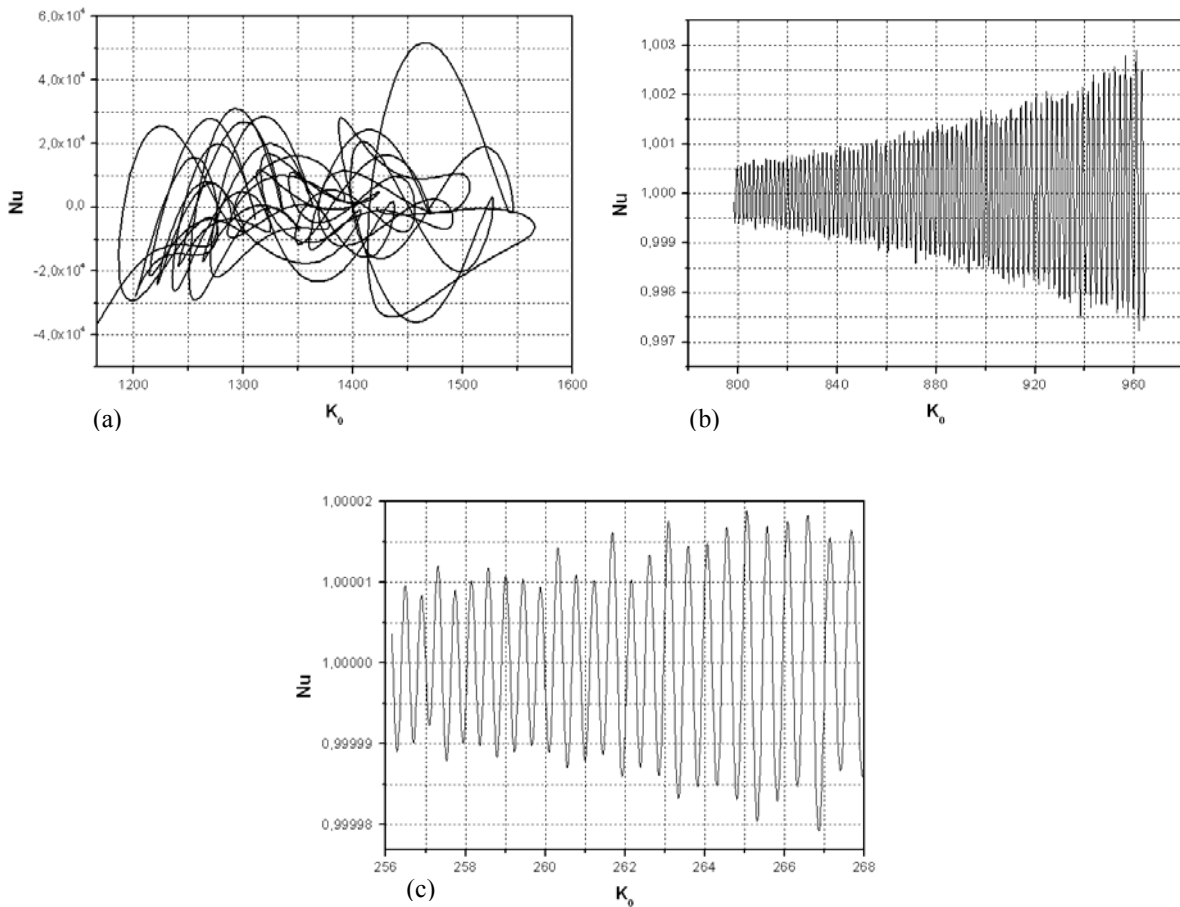


Fig. (2.28): Plans des phases. $N_u = f(K_0)$. (a) phase d'éclatement. (b) phase laminaire et (c) phase de basculement.

2.8 Conclusion

Le transport anormal de la chaleur dans les Tokamaks a pour origine l'état turbulent dans lequel se trouve le plasma. Cette turbulence est générée par de forts gradients de densité, de température, etc... Nous avons étudié dans ce chapitre l'évolution non linéaire de transport de chaleur convectif qui est soumise à des instabilités ITG en utilisant un modèle de faible degré de liberté composé de 18 équations différentielles ordinaires. Ce modèle a été proposé par Takeda, Benkadda, Hamaguchi et Wakatani, où ils ont développé un autre modèle de 11 équations différentielles ordinaires que Hu et Horton ont proposé.

On constate que les résultats obtenus sont très proches par rapport à celles obtenues par Takeda, Benkadda, Hamaguchi et Wakatani. La présence de quelques différences revient au choix de la méthode numérique utilisée (Runge-Kutta d'ordre quatre au lieu de cinq) et des conditions initiales. Nous avons noté encore que ces résultats sont dissemblables à ceux du système d'équations différentielles ordinaires de 11 degré de liberté proposé par Hu et Horton où aucun éclatement intermittent n'a été signalé.

Lorsque le système est légèrement au-dessus du seuil de stabilité ITG, c'est-à-dire que le paramètre de contrôle K_i est supérieur ou égal K_{ic} , la convection conduite par le mode ITG atteint un état stable. L'augmentation de K_i un peu plus, ramène à l'apparition des oscillations périodiques de l'énergie cinétique et du transport de chaleur par convection. Si K_i continue sa croissance, le système bifurque à un régime turbulent. Lorsque la turbulence est suffisamment forte, des éclatements intermittents (la transition d'un état périodique stable vers le chaos) sont observés.

A partir de cette étude, nous arrivons à la même conclusion que l'intermittence observée dans le modèle de 18 EDO est due à la concurrence de trois facteurs:

- Génération du flux de cisaillement et la suppression de la turbulence ITG,
- Réduction progressive du flux de cisaillement en raison de la viscosité et,
- Croissance rapide de modes ITG due à la réduction de flux de cisaillement.

Il convient de noter que le rôle de la viscosité est essentiel pour l'apparition de l'intermittence. Alors sans viscosité ($\mu = 0$), pas d'intermittence observée. Cependant, avec une viscosité finie, on dit que le système est dans un état d'auto-organisation critique (SOC); la relaxation vers un

état d'équilibre est créée lorsque l'énergie des différents états du système dessine une trajectoire complexe, le système peut spontanément évoluer vers une situation plus ordonnée.

A partir de la simulation numérique, nous avons remarqué que le système chaotique dépend fortement des conditions initiales. Finalement, on peut dire que le modèle d'EDO 18 est utile pour étudier les oscillations intermittentes.

Références

- [1] X. Garbet et al, " Turbulent Particle Transport in Magnetized Plasmas ", Phys. Rev. Lett., Vol. 91, p. 03500, 2003.
- [2] L. M. Kovrizhnykh, " Neoclassical Theory of Transport Processes in Toroidal Magnetic Confinement Systems ", Nucl. Fusion, vol. 24, p. 851, 1984.
- [3] F. Miskane and X. Garbet, " Anomalous Particle Pinch in Tokamaks ", Phys. Plasmas, vol. 7, p. 4197, 2000.
- [4] C. Angioni et al., " Density Peaking, Anomalous Pinch, and Collisionality in Tokamak Plasmas ", Phys. Rev. Lett., vol. 90, p. 205003, 2003.
- [5] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine, " Theory of Plasma Transport ", Rev. Mod. Phys., vol. 48, p. 239, 1976.
- [6] S. Hirshmann and D. Sigmar, " Neoclassical Transport of Impurities in Tokamak ", Nucl. Fusion 21 1079 (1981).
- [7] A. A. Ware, " Pinch Effect for Trapped Particles in a Tokamak ", Phys. Rev. Lett., vol. 25, p. 916, 1970.
- [8] A. Zabolotskiy " Particle Transport in Tokamak Plasmas ", M.Sc in Physics, Université de Novosibirsk, Russie, 2005.
- [9] J. Wesson, " Tokamaks ", Clarendon Press Oxford, Third edition, 2004.
- [10] B. B. Kadomtsev, " Tokamak Plasma: A Complex Physical System ", IOP Publishing Ltd, Bristol, 1992.
- [11] R. J. Hastie, " Sawtooth Instability in Tokamak Plasmas ", Astrophysics and Space Science, vol. 256, p. 177, 1998.
- [12] J. Wesson, " Sawtooth Oscillations ", Plasma Phys, Control Fusion, vol. 28, p. 243, 1986.
- [13] J. W. Connor, " A Review of Models for ELMs ", Plasma Phys. Control. Fusion, vol. 40, p. 191, 1998.
- [14] J. W. Connor, " Edge-Localized Modes - Physics and Theory ", Plasma Phys. Control. Fusion, vol. 40, p. 531, 1998.

- [15]J. Q. Dong, W. Horton, and J. Y. Kim, " Toroidal Kinetic v_i - Mode Study in High Temperature Plasmas ", Physics of Fluids B, vol. 4, p. 1867, 1992.
- [16]W. Horton, " Drift Waves and Transport ", Rev. Mod. Phys, vol. 71, p. 735, 1999.
- [17]W. Horton, D. Choi, and W. M. Tang, " Toroidal Drift Modes Driven by Ion Pressure Gradients ", Physics of Fluids, vol. 24, p. 1077, 1981.
- [18]P. N. Guzdar, L. Chen, W. M. Tang, and P. H. Rutherford, " Ion-Temperature Gradient Instability in Toroidal Plasmas ", Physics of Fluids, vol. 26, p. 673, 1983.
- [19]X. Garbet et al, " Physics of Transport in Tokamaks ", Plasma Phys. Control. Fusion, vol. 46, 2004.
- [20]C. Angioni et al., " Density Peaking, Anomalous Pinch, and Collisionality in Tokamak Plasmas ", Phys. Rev. Lett., vol. 90, p. 205003, 2003.
- [21]J. W. Connor, " Tokamak Turbulence - Electrostatic or Magnetic ? ", Plasma Phys. Control. Fusion, vol. 35, 1993.
- [22]L. Benoît, " Transport de Chaleur Electronique dans un Tokamak par Simulation Numérique Directe d'une Turbulence de Petite Echelle ", Thèse Présentée à l'École Doctorale de Physique et Sciences de la Matière de l'Université de Provence, 2002.
- [23]W. Horton and R. D. Estes and C. Biskamp, " Fluctuations and Transport Due to Ion-Temperature-Gradient-Driven Instabilities ", Plasma Phys, 22, 663 (1980).
- [24]S. Hamaguchi and W. Horton, " Scaling Laws for Plasma Transport Due to η_i -Driven Turbulence ", Phys. Fluids B2, 1834 (1990).
- [25]S. Hamaguchi and W. Horton, " Intermittent Transport and Relaxation Oscillations of Nonlinear Reduced Models for Fusion Plasmas ", Phys. Fluids B2, 3040 (1990).
- [26]S. Hamaguchi and W. Horton, " Generic Mechanism of Microturbulence Suppression by Vortex Flows ", Phys. Fluids B4, 319 (1992).
- [27]A. Jarmen and P. Anderson and J. Weiland, " Fully Toroidal Ion Temperature Gradient Driven Drift Modes ", Nuclear Fusion 27, 941 (1987).
- [28]H. Mordman and J. Weiland, " Study of Transport Regimes in Ion Temperature Gradient Driven Turbulence ", Nuclear Fusion 27 941 (1987).
- [29]K.Takeda, S.Benkadda, S.Hamaguchi, M.Wakatani, " Onset of Intermittent Thermal Transport by Ion-Temperature-Gradient-Driven Turbulence Based on a Low-Degree-of-Freedom Model, Physics of Plasmas ", Volume 11, Number 7 (July 2004).
- [30]G. Hu and W. Horton, " Intermittent Transport and Relaxation Oscillations of Nonlinear Reduced Models for Fusion Plasmas ", Phys. Plasmas 3, 3262 (1997).

- [31]A. Takayama and M. Wakatani, " ELM Modelling Based on the Nonlinear Interchange Mode in Edge Plasma ", Plasma Phys. Controlled Fusion 38, 1411 (1996).

Chapitre III
Turbulence d'Ondes de
Dérive dans le Plasma de
Bord de Tokamak

Chapitre III

Turbulence d'Ondes de Dérive dans le Plasma de Bord de Tokamak

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les considérations importantes de physique qui nous ont permis d'étudier un modèle d'interaction de trois modes non linéaires. L'utilisation et l'insertion d'un taux de croissance ou décroissance linéaire permet d'étudier l'apparition de la turbulence des ondes de dérive qui sont conduites par les gradients de pression dans le plasma de bord d'un Tokamak. Ces ondes jouent un rôle important dans la physique du transport et dans les plasmas de Tokamak fortement magnétisés [1].

Pour les hautes températures, la présence de gradients de densité qui sont assez élevés dans le bord du plasma peut donner lieu à la turbulence d'onde de dérive. C'est une onde qui est considéré comme un candidat probable pour expliquer le taux de transport anormal observé [1]. Hasegawa et Mima ont obtenu une équation aux dérivées partielles non linéaire pour décrire la propagation des ondes de dérive et l'émergence de transport du champ transverse dans les plasmas de Tokamak [2]. Cette équation a été le point de départ pour de nombreuses études de l'instabilité d'onde de dérive monochromatique, une onde qui croît linéairement jusqu'à ce qu'elle atteigne un seuil au point où elle décroît, génère deux bandes latérales couplées [3, 4]. L'équation de Hasegawa et Mima a donné naissance à des modèles additionnels comme le modèle à trois ondes introduit par Horton et Hasegawa [3].

Dans le présent travail, nous avons étudié le modèle proposé par Batista et al, où ils ont ajouté au modèle de Horton et Hasegawa les taux de croissance / décroissance pour les trois ondes afin de simuler la redistribution d'énergie entre les différents modes. Notre travail consiste à étudier le modèle d'interaction de trois modes non linéaires en utilisant la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre dans l'environnement Matlab 7.0.4 au lieu de la méthode d'Adams d'ordre 12 simulée

sous le logiciel LSODA par Batista et al. Mais tout d'abord, il est instructif de donner les arguments théoriques conduisant à l'équation de Hasegawa-Mima.

3.2 Modèle d'interaction à trois ondes

La description de la turbulence d'onde de dérive par l'équation de Hasegawa-Mima débute par la supposition de la propagation d'une onde électrostatique à une fréquence ω dans un plasma magnétisé et inhomogène [3].

La fréquence d'onde est supposée plus petite par rapport à la fréquence cyclotron ionique $\omega_{ci} = eB/m_i$, où m_i est la masse des ions. On considère évidemment que le champ magnétique est dirigé selon la direction positive z ($\mathbf{B} = B\hat{z}$), la densité du plasma du milieu est symbolisée par n_0 . Une onde linéaire existe dans cette situation si la vitesse de phase le long du champ magnétique satisfait aux inégalités:

$$v_{T_i} < (\omega/k_z) < v_{T_e} \quad (3.1)$$

où v_{T_s} est la vitesse thermique des ions ($s = i$) et des électrons ($s = e$).

Il est supposé également que la température ionique T_i est beaucoup plus faible par rapport à la température électronique T_e au bord du plasma de telle façon qu'il est suffisant de considérer seulement la dynamique ionique et de décrire les ions en fonction de la vitesse du fluide v .

L'onde de dérive se caractérise par un potentiel électrostatique ϕ avec:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (3.2)$$

Les équations appropriées du fluide dans cette situation constituent la loi de conservation de densité ionique et la loi de force dont la force de Lorentz correspond à l'onde de dérive. La condition de quasi neutralité de plasma évolue vers une densité électronique qui devient égale à la densité d'ions dont cette dernière satisfait à la distribution de Boltzmann.

$$n \approx n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{T_e}\right) \quad (3.3)$$

Pour obtenir un ensemble fermé d'équations, il est nécessaire d'envisager une équation du tourbillon de mouvement d'ions $\Omega = \nabla \times v$ car une onde de dérive est en fait un mode de tourbillon. Dans la description d'onde de dérive, le tourbillon est supposé très inférieur à la

fréquence cyclotron ionique de sorte que le ratio $\varepsilon = |\Omega|/\omega_{ci}$ peut être utilisé comme un petit paramètre de développement dans les calculs.

En introduisant les variables non dimensionnelles suivantes,

$$x' := \frac{x}{\rho_s}, \quad y' := \frac{y}{\rho_s}, \quad t' := \omega_{ci} t, \quad \phi' := \frac{e\phi}{T_e} \quad (3.4)$$

L'ensemble des équations décrivant le mouvement du fluide ionique dont l'approximation d'onde de dérive peut être combinée pour donner l'équation de Hasegawa-Mima [2].

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi - \phi) - [(\nabla \phi \times \hat{z}) \cdot \nabla] \left[\nabla^2 \phi - \ln \left(\frac{n_0}{\omega_{ci}} \right) \right] = 0 \quad (3.5)$$

L'opérateur $\nabla = \hat{X} \partial / \partial x + \hat{Y} \partial / \partial y$ indique le gradient dans les directions transverses au champ magnétique. Nous avons négligé les premiers nombres pour les variables non dimensionnelles afin de simplifier la notation. Ils ont pensé que la turbulence électrostatique au bord du plasma de Tokamak est conduite par des gradients de densité du plasma. Pour des faibles béta des plasmas, c'est tout à fait raisonnable de négliger le champ magnétique inhomogène. Le gradient de densité est associé à la propagation des ondes de dérive, leur relation de dispersion est donnée par [3]:

$$\omega = \omega_k = \frac{1}{1+k^2} \left[(\mathbf{K} \times \hat{z}) \cdot \nabla \ln \left(\frac{n_0}{\omega_{ci}} \right) \right] := \frac{\omega_*}{1+k^2} \quad (3.6)$$

ω : la fréquence d'onde de dérive.

\mathbf{K} : le vecteur d'onde dans la direction perpendiculaire au champ magnétique.

En tenant l'approximation pour une longue longueur d'onde $k^2 \ll 1$, la fréquence d'onde de dérive se réduit à l'expression connue suivante:

$$\omega_k = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_d \equiv \omega_* \quad (3.7)$$

\mathbf{v}_d : la vitesse de dérive diamagnétique.

La dimension \mathbf{K} est obtenue en multipliant le vecteur d'onde avec ρ_s , telle que l'équation (3.6) est utilisée pour la dimension $k \gg 1$ pour un plasma d'ions froids et avec $T_i/T_e \ll 1$ (plasma de bord).

Pour analyser le spectre de Fourier nous développons le potentiel électrostatique,

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\phi_k(t) \exp(i \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}) + \phi_k^*(t) \exp(-i \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}) \right] \quad (3.8)$$

où ϕ sont les modes électrostatiques dans l'espace de Fourier. L'utilisation de la conservation de l'énergie et l'entropie de Hasegawa permet d'obtenir le spectre stationnaire suivant [5]:

$$\langle |\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{W_{\mathbf{k}}}{1 + k^2} \sim \frac{1}{(\alpha + \beta k^2)(1 + k^2)} \quad (3.9)$$

$W_{\mathbf{k}}$ est le spectre d'énergie.

$$W_{\mathbf{k}} = (\alpha + \beta k^2)^{-1} \quad (3.10)$$

En substituant (3.8) dans l'équation de Hasegawa-Mima (3.5), on obtient un système infini d'équations différentielles ordinaires EDO couplées pour les modes de Fourier (Horton et Hasegawa 1994) [3,6].

$$\frac{d\phi_{\mathbf{K}}}{dt} + i\omega_{\mathbf{K}} \phi_{\mathbf{K}} = \sum_{\mathbf{K}_\alpha, \mathbf{K}_\beta, \mathbf{K}_\gamma} \Lambda_{\mathbf{K}_\beta, \mathbf{K}_\gamma}^{\mathbf{K}_\alpha} \phi_{\mathbf{K}_\beta}^* \phi_{\mathbf{K}_\gamma}^* \quad (3.11)$$

où la sommation des vecteurs d'onde satisfait à la relation triplet suivante:

$$\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\beta + \mathbf{K}_\gamma = 0 \quad (3.12)$$

Pour tout choix de \mathbf{K} , les fréquences de mode de l'onde de dérive sont données par la relation de dispersion (3.6) or que les coefficients de couplage sont donnés par l'équation (3.13):

$$\Lambda_{\mathbf{K}_\beta, \mathbf{K}_\gamma}^{\mathbf{K}_\alpha} = \frac{(k_\gamma^2 - k_\beta^2)}{2(1 + k_\alpha^2)} (\mathbf{K}_\beta \times \mathbf{K}_\gamma) \hat{z} \quad (3.13)$$

La question principale de la théorie de la turbulence est de savoir la valeur du nombre infini de modes de Fourier $\phi_{\mathbf{k}}$. Ce nombre est nécessaire pour décrire correctement la turbulence d'onde de dérive. L'étude de d'autres équations aux dérivées partielles non linéaires, telles que les équations non linéaires de Zakharov et de Schrödinger suggère qu'il suffit d'analyser quelques modes lorsque la turbulence n'est pas encore tout à fait développée [7].

Pour de telles situations de faible turbulence, il a été constaté que trois modes peuvent être suffisants pour décrire des scénarios physiquement intéressants. Du point de vue de systèmes dynamiques, il est utile d'utiliser au moins trois modes de Fourier, parce que l'autonomie d'un écoulement à trois dimensions peut présenter des solutions chaotiques [8].

Le système à trois ondes est supposé de telle façon qu'il existe des vecteurs d'ondes \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 et \mathbf{K}_3 satisfaisant à la condition triplet (3.12),

$$\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 = 0 \quad (3.14)$$

En outre, d'après Terry et Horton, ils ont introduit les termes dissipatifs phénoménologiques qui décrivent le mode de croissance ou décroissance sous la forme $\gamma_i \phi_{k_i}$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$ où γ_i sont les coefficients de croissance / décroissance. La simplification du système couplé (3.11) avec l'incorporation des termes dissipatifs donne:

$$\frac{d\phi_1}{dt} + i\omega_1\phi_1 = \Lambda_{2,3}^1 \phi_2^* \phi_3^* + \gamma_1 \phi_1 \quad (3.15)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} + i\omega_2\phi_2 = \Lambda_{3,1}^2 \phi_3^* \phi_1^* + \gamma_2 \phi_2 \quad (3.16)$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} + i\omega_3\phi_3 = \Lambda_{1,2}^3 \phi_1^* \phi_2^* + \gamma_3 \phi_3 \quad (3.17)$$

Pour simplifier, on introduit les notations suivantes:

$$\phi_j(t) = \phi_{K_j}(t), \quad \omega_j = \omega_{K_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.18)$$

On peut déduire les expressions des coefficients de couplage à partir de l'équation (3.13).

$$\Lambda_{K_2, K_3}^{K_1} = \Lambda_{2,3}^1 = \frac{(k_3^2 - k_2^2)}{2(1 + k_1^2)} (\mathbf{K}_2 \times \mathbf{K}_3) \cdot \hat{z} \quad (3.19)$$

$$\Lambda_{K_3, K_1}^{K_2} = \Lambda_{3,1}^2 = \frac{(k_1^2 - k_3^2)}{2(1 + k_2^2)} (\mathbf{K}_3 \times \mathbf{K}_1) \cdot \hat{z} \quad (3.20)$$

$$\Lambda_{K_1, K_2}^{K_3} = \Lambda_{1,2}^3 = \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{2(1 + k_3^2)} (\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2) \cdot \hat{z} \quad (3.21)$$

Au sein de cette approximation, le développement de Fourier du potentiel électrostatique est donné par:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_1(t) \exp(i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{x}) + \phi_2(t) \exp(i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{x}) + \phi_3(t) \exp(i\mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{x}) + c.c.] \quad (3.22)$$

3.3 Analyse linéaire

Notre approche de la turbulence concerne l'étude des flux d'énergie entre les différents modes. Alors il est intéressant d'analyser la façon dont un mode donné peut transférer l'énergie aux autres. À ce propos, en fixant les vecteurs d'onde des trois modes de sorte que $k_1 \leq k_2 \leq k_3$, où k_2 représente l'inductance ou l'onde pompe, ce qui génère une bande latérale ou des modes

résultants avec les nombres d'ondes k_1 et k_3 . Par conséquent, le mode k_2 est considéré plus excité que k_1 et k_3 , ce qui revient à la condition $|\phi_2| \gg |\phi_{1,3}|$.

Avant de se lancer dans une analyse numérique, on présente une analyse linéaire standard du modèle afin de faire ressortir quelques caractéristiques nécessaires pour la simulation numérique [9] dans laquelle les paramètres $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 \equiv 0$. Dans la suite, le mode pompe est supposé avoir une amplitude constante A_2 , alors que les deux modes résultants évoluent dans le temps tel que:

$$\phi_1(t) = A_1(t) e^{-i\omega_1 t} \quad (3.23)$$

$$\phi_2(t) = A_2 e^{-i\omega_2 t} \quad (3.24)$$

$$\phi_3(t) = A_3(t) e^{-i\omega_3 t} \quad (3.25)$$

En différenciant l'équation (3.23) par rapport au temps et en substituant le résultat dans l'équation (3.15), il en résulte:

$$\frac{dA_1}{dt} = \Lambda_{2,3}^1 A_2^* A_3^* e^{i\Delta\omega t} \quad (3.26)$$

Où $\Delta\omega := \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ est le décalage de fréquence entre l'onde de l'inductance et ses deux modes de bande latérale. De manière analogue, on trouve le troisième mode:

$$\frac{dA_3}{dt} = \Lambda_{1,2}^3 A_1^* A_2^* e^{i\Delta\omega t} \quad (3.27)$$

En différenciant l'équation (3.26) et en utilisant l'équation (3.27), on obtient:

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} - i\Delta\omega \frac{dA_1}{dt} - \Lambda_{2,3}^1 \Lambda_{1,2}^3 |A_2|^2 A_1 = 0 \quad (3.28)$$

En supposant que $A_1 \sim e^{pt}$, on pourra avoir les deux valeurs propres suivantes:

$$p = \frac{1}{2} \left\{ i\Delta\omega \pm \sqrt{-(\Delta\omega)^2 + 4\Lambda_{2,3}^1 \Lambda_{1,2}^3 |A_2|^2} \right\} = i \left(\frac{\Delta\omega}{2} \right) \pm \Gamma \quad (3.29)$$

$$\Gamma = \sqrt{-\left(\frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 + \Lambda_{2,3}^1 \Lambda_{1,2}^3 |A_2|^2} \quad (3.30)$$

Par conséquent, si A_2 est maintenu constant, les modes résultants A_1 et A_3 peuvent croître (décroître) de façon exponentielle à un taux Γ lorsque l'amplitude pompe A_2 dépasse le

décalage de fréquence en fonction de $|A_2|^2 > (\Delta\omega/2)^2 (\Lambda_{2,3}^1 \Lambda_{1,2}^3)^{-1}$. Pour les simulations numériques $|A_2|^2 > 10^{-4}$ (valeur expérimental [10]).

3.4 Application au plasma de bord de Tokamak

Afin de mieux explorer le rôle des termes non linéaires des équations (3.15)-(3.17), Batista et al ont fait appel à l'intégration numérique. En préparation pour les calculs numériques, ils ont discuté les valeurs de paramètres. Pour faciliter la comparaison avec les résultats expérimentaux, ils ont utilisé les valeurs de paramètres extraites des données à partir d'un ensemble de mesures typiques faites sur le TBR (Petit Tokamak Brésilien). Pour cette machine, le champ toroïdal $B = 0.4$ T, la température électronique centrale $T_e = 10$ eV, et la densité électronique centrale $n_0 = 7 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ [10,11]. Un certain nombre de sondes ont été développés par l'équipe TBR pour mesurer la densité de particules et les fluctuations de température dans la région de bord, ainsi que pour mesurer le temps de confinement des particules [10]. Les résultats expérimentaux de TBR suggèrent que le transport turbulent est principalement de nature électrostatique. Des observations similaires ont été faites aussi sur d'autres Tokamaks [12].

Pour le plasma TBR, ils ont estimé que la fréquence cyclotron ionique soit de l'ordre de 3.82×10^7 Hz, la longueur d'échelle est d'environ $\rho_s \approx 10^{-3}$ m. Ils ont constaté que ces valeurs s'avèrent compatibles avec celles des autres machines, tels que les Tokamaks TEXT [13] et PLT [14]. Le gradient de densité radiale au bord du plasma a été estimé [15] sur la base des mesures de flux de particules.

$$N := \rho_s \left| \nabla \ln \left(\frac{n_0}{\omega_{ci}} \right) \right| = \rho_s \left| \frac{\nabla n_0}{n_0} \right| \approx 0.17 \quad (3.31)$$

En outre, les mesures des fluctuations du potentiel au bord, utilisant une sonde électrostatique triple indiquent un nombre d'onde poloïdal k_θ dans une gamme de $(1-5) \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ et avec un contenu spectral large ($\omega_{\text{exp}} \approx 50 \text{ kHz}$) [11].

Ils ont supposé une géométrie de grand coefficient d'aspect pour le Tokamak, de telle manière que les effets de courbure sont négligeables dans les deux directions toroïdale et poloïdale. Cela permet d'utiliser la géométrie carrée " Slab ". Les coordonnées rectangulaires (x, y, z) représentent la position radiale mesurée à partir de la paroi du Tokamak et à partir des angles

poloïdal et toroïdal rectifiés. Par conséquent, ils ont choisi les composants du vecteur de l'onde k_{ix} , k_{iy} et k_{iz} , avec $i = 1, 2, 3$ de telle façon qu'ils sont orientés selon les directions radiale, poloïdale et toroïdale, respectivement. Sans perte de généralité, ils ont supposé la disparition de la composante z des trois vecteurs d'onde. Cela signifie que la condition de correspondance, $K_1 + K_2 + K_3 = 0$ définit un triangle vecteur dans un plan à z constant qui est une surface de section transversale à une coordonné toroïdale.

La valeur expérimentale du nombre d'onde poloïdal qui domine les fluctuations de plasma de bord est censée d'être la valeur d'entrée $k_{iy} = k_0 = 5 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ qui correspond à une valeur normalisée de $k_{iy} = 5$. On se retrouve donc avec cinq composants inconnus des vecteurs d'onde compris dans le triplet. Pour plus de commodité, ils ont supposé des relations linéaires entre les composants du vecteur d'onde:

$$k_{1x} = c_{11} k_{iy}, \quad k_{2x} = c_{22} k_{iy}, \quad k_{3x} = c_{33} k_{iy}, \quad k_{2y} = c_{32} k_{iy}, \quad k_{3y} = c_{31} k_{iy} \quad (3.32)$$

c_{11}, c_{22}, \dots etc sont des coefficients numériques à déterminer. L'étude expérimentale leurs permet de faire des différents choix pour les valeurs de ces coefficients. Afin d'attribuer des valeurs numériques pour toutes les grandeurs physiques impliquées dans ce problème, ils ont sélectionné quelques unes d'entre eux à être compatible avec le spectre de vecteur d'onde observé:

$$c_{22} = -\frac{3}{2}, \quad c_{33} = -2, \quad c_{32} = -\frac{1}{2} \quad (3.33)$$

et en tenant compte de la condition de correspondance $K_1 + K_2 + K_3 = 0$, il est alors possible d'obtenir d'autres coefficients comme

$$c_{11} = \frac{7}{2}, \quad c_{31} = -\frac{1}{2} \quad (3.33)$$

On obtient ensuite pour les vecteurs d'onde les valeurs non dimensionnelles suivantes:

$$k_{1x} = \frac{35}{2}, \quad k_{2x} = -\frac{15}{2}, \quad k_{3x} = -10 \quad (3.34)$$

$$k_{iy} = 5, \quad k_{2y} = -\frac{5}{2}, \quad k_{3y} = -\frac{5}{2} \quad (3.35)$$

Quant aux fréquences d'ondes, ils ont opté un petit décalage de fréquence $\Delta\omega \ll \omega_2$ de manière à conserver l'énergie échangée entre les modes couplés et rendre la fréquence pompe ω_2 égale à la fréquence poloïdale dominante mesurée dans les fluctuations de plasma de bord $\omega_{\text{exp}} = 50 \text{ kHz}$.

Afin d'obtenir des nombres non dimensionnels, ils ont continué d'adapter les fréquences par la fréquence cyclotron ionique en obtenant:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1.31 \times 10^{-3} \quad (3.36)$$

En introduisant ces fréquences dans la relation de dispersion d'onde de dérive (3.6) pour $i = 1, 2$ et 3.

$$\omega_i = \omega_{k_i} = -\frac{N}{1 + k_i^2} (\mathbf{K}_i \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.37)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unité dans la direction ∇n

$N = 0.17$ est la quantité estimée de l'équation (3.31) après avoir divisé par le rayon de Larmor ρ_s de façon à produire un nombre non dimensionnel.

En considérant un plan où z est constant, un plan perpendiculaire au champ magnétique toroïdal du Tokamak tel que:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \partial / \partial x + \hat{\mathbf{y}} \partial / \partial y \quad (3.38)$$

$$(\mathbf{K}_i \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \nabla \ln \left(\frac{n_0}{\omega_{ci}} \right) \sim (\mathbf{K}_i \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) N \quad (3.39)$$

Donc la relation de dispersion se simplifie en:

$$\omega_i = \frac{(k_{iy} - k_{ix})}{1 + k_i^2} N \quad (3.40)$$

En utilisant ce qui précède, on peut évaluer le coefficient de couplage de l'équation (3.25) comme

$$\begin{aligned} \Lambda_{2,3}^1 &= \left(\frac{k_3^2 - k_2^2}{k_{1y} - k_{1x}} \right) (\mathbf{K}_2 \times \mathbf{K}_3) \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{\omega_1}{2N} \frac{(k_{3x}^2 + k_{3y}^2 - k_{2x}^2 - k_{2y}^2)(k_{2x}k_{3y} - k_{3x}k_{2y})}{k_{1y} - k_{1x}} = 32.8 \omega_1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Avec les fréquences données par la relation (3.36), la valeur numérique de ce coefficient de couplage est donnée par $\Lambda_{2,3}^1 = 0.04$. De même, on obtient les autres coefficients de couplage des équations (3.20) et (3.21):

$$\Lambda_{3,1}^2 = -421.8 \omega_1 = -0.5, \quad \Lambda_{1,2}^3 = 335.9 \omega_1 = 0.4 \quad (3.42)$$

L'estimation des coefficients de croissance γ_i est basée sur les degrés de la turbulence du plasma dans la région de bord de Tokamak. Ils ont supposé que le mode pompe ϕ_2 induit le processus de

redistribution de l'énergie entre les modes résultants ϕ_1 et ϕ_3 . Il serait déraisonnable d'avoir les trois modes avec des taux de croissance positifs, car cela conduirait à une croissance non-physique illimitée de l'énergie. C'est pourquoi, ils ont supposé que le mode pompe a un coefficient de croissance positif, alors que les modes résultants ont des taux de croissance négatifs. Les valeurs numériques ont été ajustées pour obtenir les amplitudes de mode d'onde selon les limites observées dans les expériences des fluctuations de bord du plasma à savoir: $-50V - +50V$ la plage pour que le potentiel flottant soit mesuré avec la sonde électrostatique [11] tel que $\gamma_1 = \gamma_3 < 0$ et $\gamma_2 = 0.01$.

3.5 Stabilité asymptotique du système à trois ondes

Afin de connaître le comportement des trajectoires initialement voisines de l'équilibre, nous étudions la stabilité du système d'ODE (3.15)-(3.17). L'étude de la stabilité d'un système non linéaire est menée sur le système linéarisé. En effet, la linéarisation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet aux points d'équilibre [16].

La solution des équations dynamiques prouve que l'origine est un point d'équilibre quelque soit les taux de croissance / décroissance $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Pour le calcul de la matrice jacobienne $A_0 = DF(0,0,0)$, on considère que F_1, F_2 et F_3 comme équations dynamiques:

$$\Lambda_{2,3}^1 \phi_2^* \phi_3^* + \gamma_1 \phi_1 - i\omega_1 \phi_1 = F_1 \quad (3.43)$$

$$\Lambda_{3,1}^2 \phi_3^* \phi_1^* + \gamma_2 \phi_2 - i\omega_2 \phi_2 = F_2 \quad (3.44)$$

$$\Lambda_{1,2}^3 \phi_1^* \phi_2^* + \gamma_3 \phi_3 - i\omega_3 \phi_3 = F_3 \quad (3.45)$$

On trouve que:

$$DF(\phi_{eq}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \phi_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \phi_2} & \frac{\partial F_3}{\partial \phi_3} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{DF}(\phi_{\text{eq}}) = \begin{bmatrix} -i\omega_1 + \gamma_1 & \Lambda_{2,3}^1 \phi_3^* \frac{\partial \phi_2^*}{\partial \phi_2} & \Lambda_{2,3}^1 \phi_2^* \frac{\partial \phi_3^*}{\partial \phi_3} \\ \Lambda_{3,1}^2 \phi_3^* \frac{\partial \phi_1^*}{\partial \phi_1} & \gamma_2 - i\omega_2 & \Lambda_{3,1}^2 \phi_1^* \frac{\partial \phi_3^*}{\partial \phi_3} \\ \Lambda_{1,2}^3 \phi_2^* \frac{\partial \phi_1^*}{\partial \phi_1} & \Lambda_{1,2}^3 \phi_1^* \frac{\partial \phi_2^*}{\partial \phi_2} & \gamma_3 - i\omega_3 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{DF}(0,0,0) = \begin{bmatrix} -i\omega_1 + \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 - i\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 - i\omega_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Pour calculer les valeurs propres, il suffit de résoudre l'équation caractéristique suivante:

$$\det[\mathbf{DF}(0,0,0) - \lambda \mathbf{I}] = 0 \quad (3.49)$$

\mathbf{I} : est la matrice identité

λ : valeur propre

Il en résulte:

$$\det = \begin{bmatrix} \gamma_1 - i\omega_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 - i\omega_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 - i\omega_3 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.50)$$

$$\det = (\gamma_1 - i\omega_1 - \lambda)(\gamma_2 - i\omega_2 - \lambda)(\gamma_3 - i\omega_3 - \lambda) = 0 \quad (3.51)$$

En conséquence, les valeurs propres de la matrice (3.48) sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 - i\omega_1 \\ \lambda_2 = \gamma_2 - i\omega_2 \\ \lambda_3 = \gamma_3 - i\omega_3 \end{cases} \quad (3.52)$$

Alors, l'étude de la stabilité du système (3.15)-(3.17) dépend entièrement du signe de γ_1 , γ_2 et γ_3 . On peut conclure que si ces valeurs sont strictement négatives, le système non linéaire est asymptotiquement stable, or que si au moins une valeur propre est positive, le système non linéaire est instable.

Puisque Batista et al ont supposé d'après l'étude expérimentale que le mode pompe a un coefficient de croissance positif γ_2 sachant que les modes résultants ont des taux de croissance γ_1 et γ_3 négatifs. On peut déduire donc que le système non linéaire dans ce cas est instable.

3.6 Simulations numériques

Cette partie est consacrée à l'aspect numérique. Dans ce contexte, un programme de calcul a été conçu pour résoudre les équations (3.15) - (3.17). Nous avons choisi les paramètres non dimensionnels retenus par Batista et al sélectionnés à partir d'une série d'expérience faite par l'équipe TBR (Petit Tokamak Brésilien). Les valeurs utilisées pour la mise en œuvre numérique du système non linéaire sont:

$$\gamma_2 = 0.01 \quad \Lambda_{2,3}^1 = 0.04 \quad \Lambda_{3,1}^2 = -0.5 \quad \Lambda_{1,2}^3 = 0.4$$

On choisi γ_1 et γ_3 de telle façon que :

$$\gamma_1 = \gamma_3$$

Les modes d'ondes $\phi_i(t)$ sont des nombres complexes, en conséquence, l'espace de phase de ce modèle est un espace à six dimensions. La méthode de Runge Kutta d'ordre quatre donne les mêmes résultats par rapport à celle d'Adams d'ordre 12 exécutées par le logiciel LSODA (Livermore Solver pour les équations différentielles ordinaires) [26].

Les six conditions initiales relatives aux modes $\phi_i(t)$ sont:

$$\text{Re } \phi_1(0) = \text{Re } \phi_2(0) = \text{Re } \phi_3(0) = 0.1 \quad (3.53)$$

$$\text{Im } \phi_1(0) = \text{Im } \phi_2(0) = \text{Im } \phi_3(0) = 0 \quad (3.54)$$

En considérant que γ_1 est le paramètre de contrôle pour la mise en œuvre numérique, on peut constater que l'étude numérique nous a permis d'observer à la fois les trajectoires des systèmes dynamiques périodiques et chaotiques. Des exemples typiques ont été montrés sur la figure (3.1). A ce propos, une trajectoire périodique typique est représentée sur la figure 3.1.a pour les trois modes $|\phi_1(t)|$, $|\phi_2(t)|$ et $|\phi_3(t)|$ et avec des valeurs qui correspondent à $\gamma_1 = \gamma_3 = -0.1$. Le comportement périodique observé dans la figure 3.1.a peut être envisagé dans la projection à deux dimensions qui donne $|\phi_2(t)|$ en fonction de $|\phi_1(t)|$ de l'espace de phase de six dimensions (figure 3.1.b) dont la dynamique délivre un cycle limite simple.

En variant le paramètre de contrôle $\gamma_1 = \gamma_3 = -0.19$, on remarque d'après la figure 3.2.a que l'évolution des trois ondes présente des oscillations non périodiques. La dynamique des solutions du système peut être déduite dans ce cas en traçant la projection de l'espace de phase (figure 3.2.b) qui montre apparemment un attracteur chaotique.

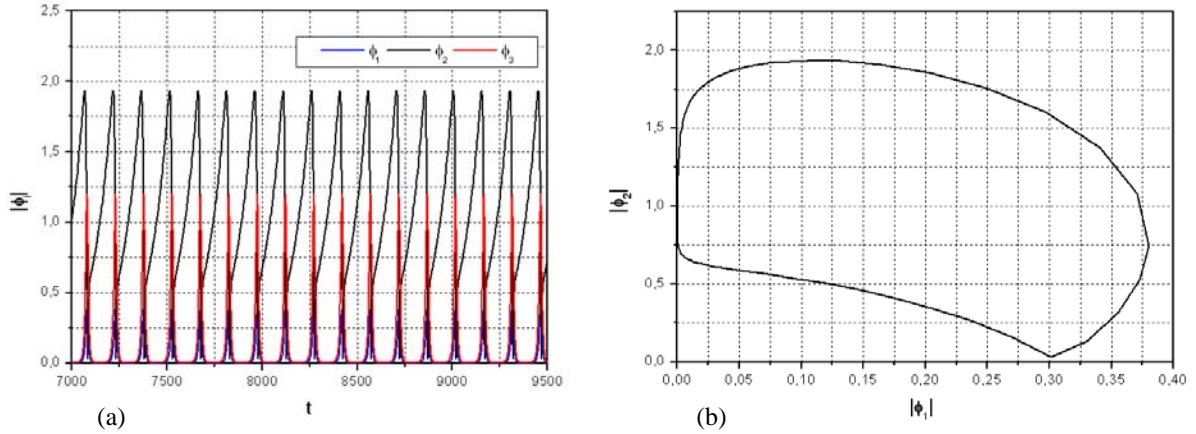


Fig. (3.1): (a): évolution temporelle des modes électrostatiques $\phi_i [i = 1, 2, 3]$.

(b): projection de l'espace de phase $|\phi_2|$ par rapport à $|\phi_1|$.

$$\gamma_2 = 0.01, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.00131 \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \gamma_3 = -0.1.$$

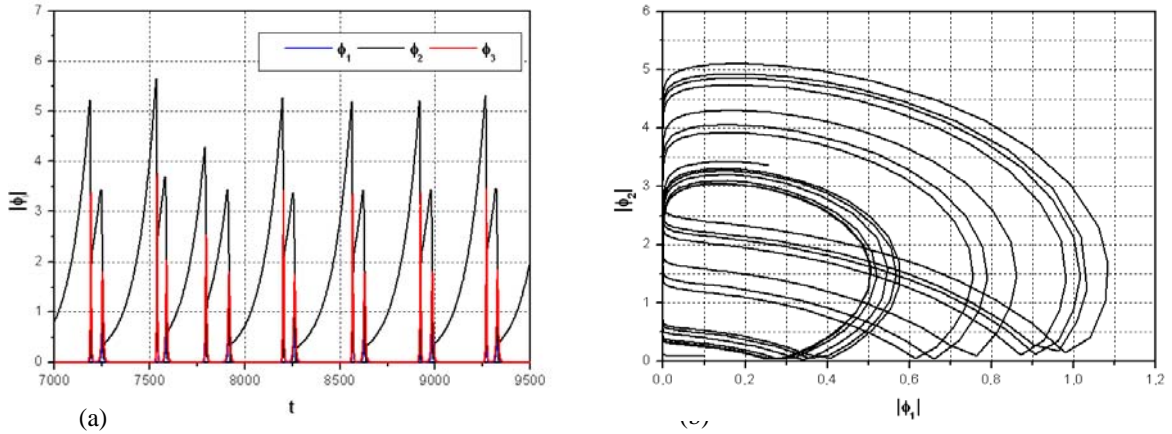


Fig. (3.2): (a): évolution temporelle des modes électrostatiques $\phi_i [i = 1, 2, 3]$.

(b): projection de l'espace de phase $|\phi_2|$ par rapport à $|\phi_1|$.

$$\gamma_2 = 0.01, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.00131 \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \gamma_3 = -0.19.$$

En effet, la figure 3.3.a présente une évolution non périodique des trois modes pour un $\gamma_1 = \gamma_3 = -0.211$. Le plan de phase obtenu (figure 3.3.b) présente un attracteur chaotique plus compliqué.

A partir de cette étude, nous avons constaté que les taux de décroissance des ondes résultantes peuvent être ajustés de façon à produire une grande variété de comportements dynamiques, allant d'une périodicité simple au chaos et avec des scénarios de différentes transitions.

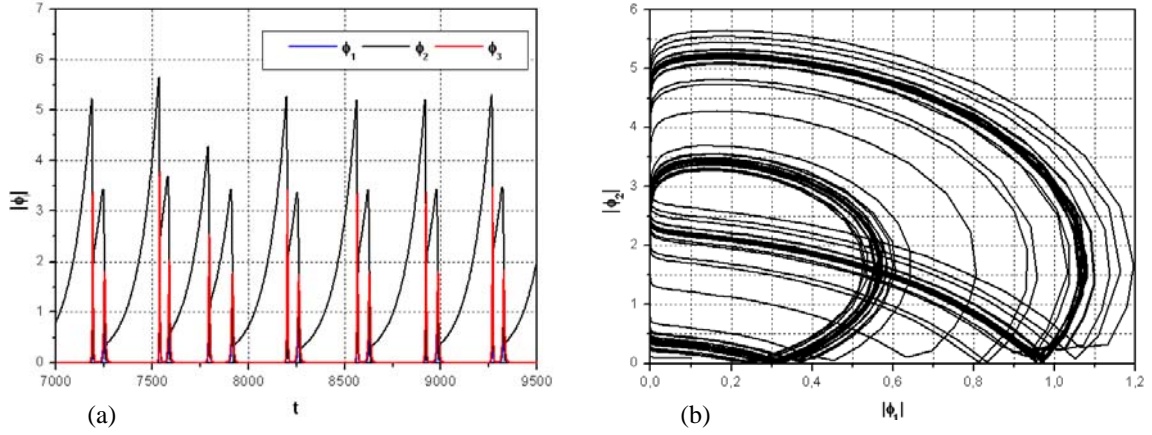


Fig. (3.3): (a): évolution temporelle des modes électrostatiques $\phi_i [i = 1, 2, 3]$.

(b): projection de l'espace de phase $|\phi_2|$ par rapport à $|\phi_1|$.

$$\gamma_2 = 0.01, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.00131 \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \gamma_3 = -0.211.$$

L'onde pompe ayant un taux de croissance positif augmente de façon exponentielle. Par opposition, les autres modes ont une amplitude plus petite de telle manière que la non linéarité est insuffisante pour jouer un rôle important dans la dynamique. Toutefois, comme les autres amplitudes croissent, cette augmentation linéaire est limitée par les termes quadratiques de l'équation (3.15), et l'onde pompe diminue de façon abrupte en transmettant son énergie aux ondes résultantes qui augmentent rapidement leurs amplitudes dans l'espace. D'autre part, puisque les taux de décroissance sont différents pour chaque onde résultante, donc leurs amplitudes maximales s'avèrent également différentes. Cependant, la croissance des ondes résultantes est également saturée par les termes non linéaires puis elles vont également décroître très rapidement alors que le mode pompe augmente à nouveau l'achèvement du cycle.

Il s'ensuit qu'en fixant la position spatiale, en prenant le point arbitraire $x = y = 0$ et en considérant les séries temporelles du signal électrostatique prédit données par la somme des trois ondes telle que l'équation (3.22),

$$\phi(0, t) = \frac{1}{2} [\phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) + \text{c.c.}] \quad (3.55)$$

La figure (3.4) représente l'évolution temporelle du potentiel électrostatique $\phi(0, t)$ dans le domaine des réels, les paramètres sont les mêmes valeurs utilisées dans la figure (3.3). Le graphe présente une trajectoire qui se ressemble à une série temporelle chaotique.

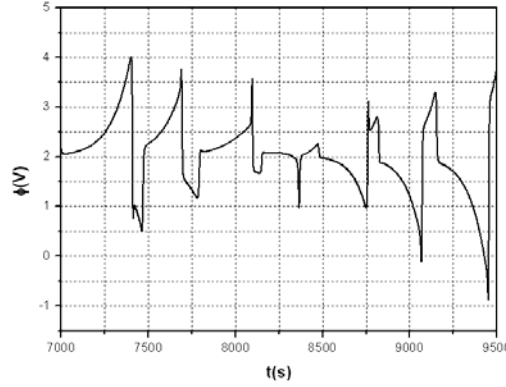


Fig. (3.4): variation instantanée du potentiel électrostatique $\phi(0, t)$ dans le domaine des réels, $\gamma_2 = 0.01$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.00131$ et $\gamma_1 = \gamma_3 = -0.211$.

3.7 Contrôle du chaos

Après l'exposition des fluctuations des turbulences électrostatiques vers un comportement chaotique de faible dimension de modes d'onde de dérive, on doit penser à contrôler la stratégie du chaos dont l'objectif est de réduire ou de supprimer les faibles turbulences. Ces interventions doivent contrôler l'évolution chaotique instantanée dans une échelle spatiale donnée, à moins qu'il existe un effet collectif fixe. Un tel effet collectif a été observé dans certaines stratégies de contrôle des systèmes spatialement étendus, ce qui consiste à localiser les perturbations dans un espace qui a été utilisé avec succès [17].

Notre stratégie de contrôle repose sur l'addition d'une quatrième onde de résonance de faible amplitude [18]. La résonance de quatre ondes couplées implique l'interaction de deux triplets d'ondes. La présence du deuxième triplet ayant deux ondes en commun avec le premier peut augmenter ou stabiliser le déséquilibre (l'instabilité) du premier triplet [19]. En conséquence, nous avons introduit une nouvelle résonance dans le système en incluant une quatrième onde ϕ_4 pour obéir à des conditions supplémentaires de résonance.

$$k_4 = k_1 + k_2 \quad (3.56)$$

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 \quad (3.57)$$

L'amplitude d'onde de contrôle est maintenue constante de sorte que $d\varepsilon/dt = 0$ et assez petite et de telle façon que $|\phi_4| \equiv \varepsilon \ll |\phi_{1,2,3}|$ [20].

En conservant la quatrième onde de résonance dans l'équation

$$\frac{d\phi_K}{dt} + i\omega_K \phi_K = \sum_{K_\alpha, K_\beta, K_\gamma} \Lambda_{K_\beta, K_\gamma}^{K_\alpha} \phi_{K_\beta}^* \phi_{K_\gamma}^* \quad (3.58)$$

Il en résulte le système modifié suivant:

$$\frac{d\phi_1}{dt} + i\omega_1 \phi_1 = \Lambda_{2,3}^1 \phi_2^* \phi_3^* + \gamma_1 \phi_1 + |\varepsilon| \phi_2^* \quad (3.59)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} + i\omega_2 \phi_2 = \Lambda_{3,1}^2 \phi_3^* \phi_1^* + \gamma_2 \phi_2 + |\varepsilon| \phi_1^* \quad (3.60)$$

$$\frac{d\phi_3}{dt} + i\omega_3 \phi_3 = \Lambda_{1,2}^3 \phi_1^* \phi_2^* + \gamma_3 \phi_3 \quad (3.61)$$

Pour la résolution numérique du système non linéaire (3.59)-(3.61), nous utilisons toujours la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre au lieu de la méthode d'Adams d'ordre 12, avec les conditions initiales utilisées précédemment (3.53), (3.54).

Un exemple d'illustration de la procédure de contrôle est représenté dans la figure (3.5). Nous avons pris la valeur $\gamma_1 = -0.19$, nous allons ensuite tracer les projections en deux dimensions de $|\phi_2|$ en fonction de $|\phi_1|$. On peut certifier que d'autres choix de coordonnées produiraient des résultats similaires. Nous observons dans la figure (3.5.a) que la situation incontrôlée ($\varepsilon = 0$) présente un attracteur apparemment chaotique dans la phase de projection choisie. L'ajout d'une quatrième onde avec une amplitude aussi petite que ($\varepsilon = 10^{-12}$) est déjà suffisant pour orienter la phase de trajectoires de l'espace en une période de huit orbites (figure 3.5.b). D'autres orbites avec des périodes égales à 4 et 2 peuvent être obtenues en utilisant respectivement $\varepsilon = 10^{-12}$ (figure 3.5.c) et $\varepsilon = 10^{-10}$ (figure 3.5.d).

La série de temps correspond à l'évolution de l'amplitude de l'onde pompe $|\phi_2|$ avec des attracteurs chaotiques (non contrôlés) et périodiques (contrôlés) est représentée dans la figure (3.6 a et b). Le comportement global de l'onde pompe est le même dans les deux cas puisque ϕ_2 ayant un taux de croissance positif, augmente initialement de façon exponentielle au taux linéaire γ_2 parce que les autres modes (non représentés) ont des faibles amplitudes. Cependant, puisqu'ils augmentent, les termes quadratiques en (3,3) - (3,5) deviennent significatifs et saturent la croissance linéaire de l'onde pompe en provoquant sa désintégration brutale. L'onde pompe donne ensuite son énergie aux ondes résultantes qui augmentent rapidement ses amplitudes. De même, puisque l'évolution temporelle des ondes résultantes suit des équations similaires, donc, leurs

croissances sont également saturées par les termes non linéaires, et elles sont également décroissantes d'une façon très rapide, tandis que l'amplitude de l'onde pompe s'élève de nouveau pour compléter le cycle.

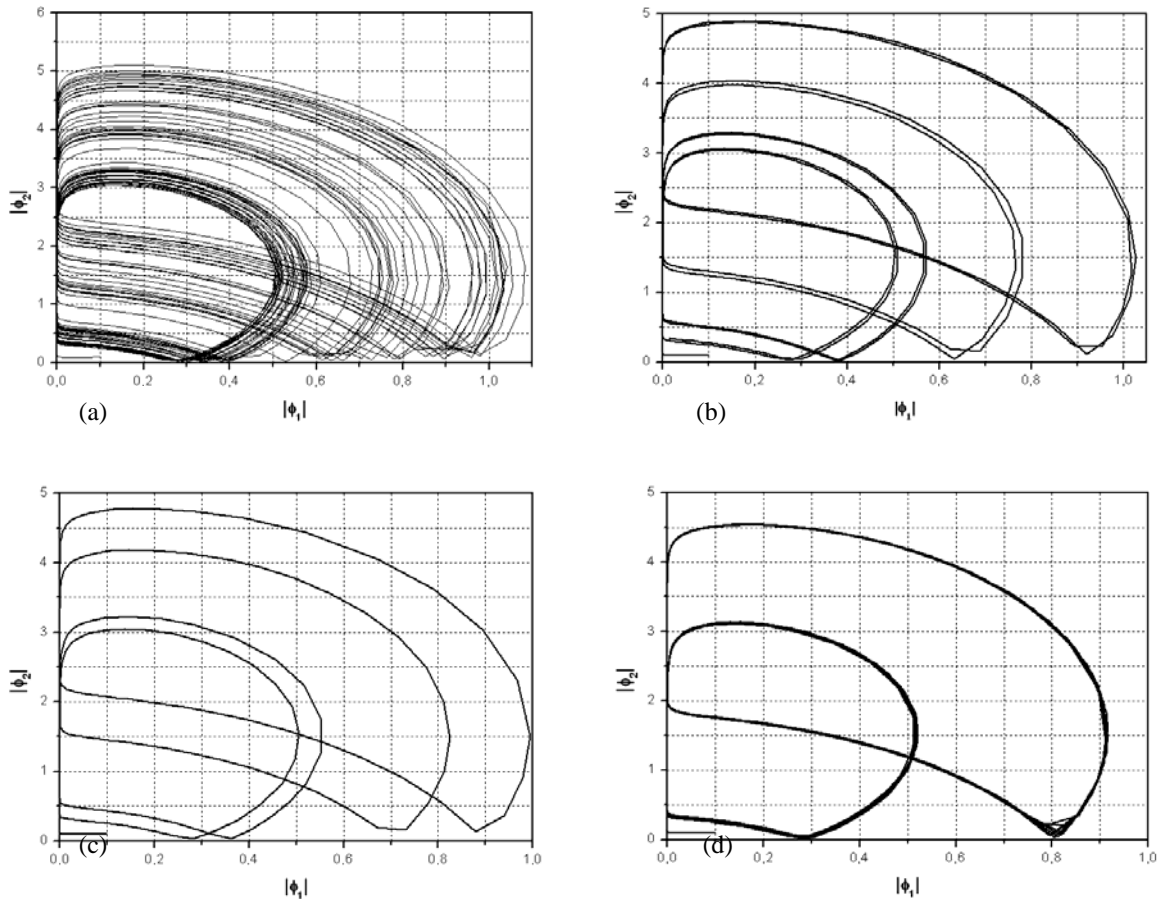


Fig. (3.5): projection de l'espace de phase pour $\gamma_2 = 0.01$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.00131$ et $\gamma_1 = \gamma_3 = -0.194$.
 (a): $\varepsilon = 0$, (b): $\varepsilon = 10^{-12}$, (c) : $\varepsilon = 10^{-11}$ et (d) $\varepsilon = 10^{-10}$.

Dans une situation chaotique (figure 3.6.a), les intervalles de temps entre les valeurs maximales consécutives de l'amplitude de l'onde pompe varient de façon irrégulière. D'autre part, pour un comportement périodique (figure 3.6.b), les intervalles de temps et les amplitudes maximales se répètent avec une périodicité bien définie.

En plus, le contrôle des séries temporelles chaotiques, la mise en place d'une quatrième onde de résonance de faible amplitude peut également supprimer le transport intermittent entre les régions de mouvement périodique laminaire et celles qui correspondent à des éclatements

chaotiques [9]. La figure 3.7.a montre un exemple d'un tel comportement pour le système non contrôlé qui est supprimé pour $\varepsilon = 10^{-10}$ (figure 3.7.b),

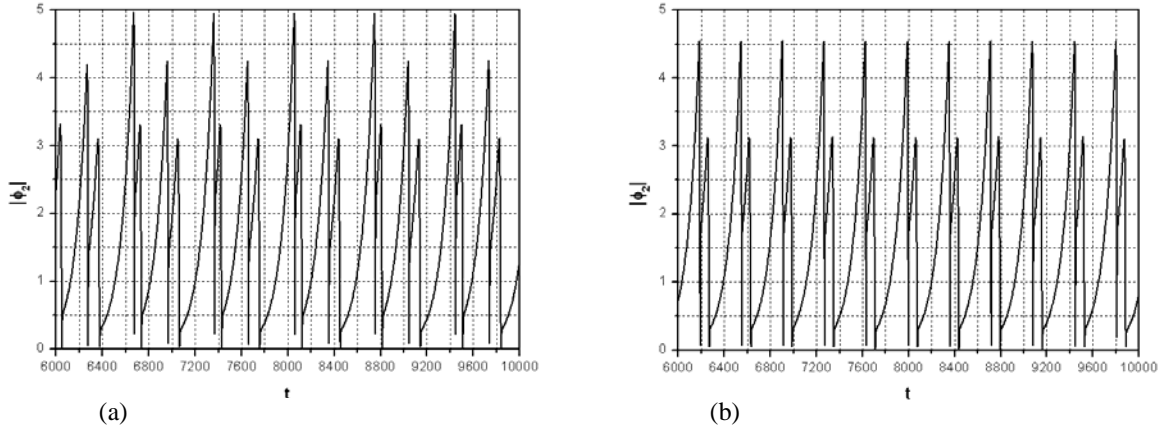


Fig. (3.6): évolution temporelle de mode électrostatique $|\phi_2|$ pour $\gamma_2 = 0.01, \gamma_1 = \gamma_3 = -0.194$. (a): $\varepsilon = 0$, (b): $\varepsilon = 10^{-10}$.

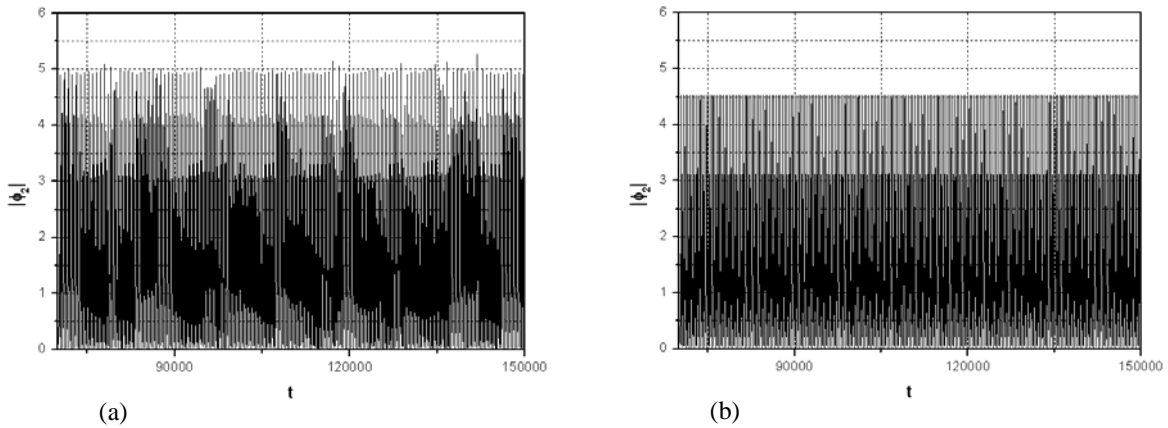


Fig. (3.7): évolution temporelle de mode électrostatique $|\phi_2|$ pour $\gamma_2 = 0.01, \gamma_1 = \gamma_3 = -0.19266$. (a): $\varepsilon = 0$, (b): $\varepsilon = 10^{-10}$.

3.8 Conclusions

La turbulence des ondes de dérive est la principale source des fluctuations irrégulières du potentiel électrostatique au bord du plasma de Tokamak. Une approche directe de la turbulence des ondes de dérive qui peuvent être décrites par l'équation de Hasegawa-Mima, consiste à considérer un très grand nombre de modes d'interaction. L'inconvénient de cette approche est

qu'on n'est jamais sûr si le nombre de modes est assez grand pour reproduire les spectres de fluctuation.

Dans ce travail, nous avons étudié un modèle d'interaction non linéaire de trois modes proposé par Batista et al. Ce modèle est obtenu en introduisant dans le modèle initial proposé par Horton et al les taux de croissance / décroissance pour l'étude de la dynamique résultante. Nous avons montré par la présente étude que la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre peut donner les mêmes comportements émergents délivrés par la méthode d'Adams d'ordre 12 simulée par le logiciel LSODA utilisé par Batista et al.

- Nous avons constaté que les taux de décroissance des ondes résultantes peuvent être ajustés de façon à produire une grande variété de comportement dynamique, allant d'une périodicité simple au chaos et avec des scénarios de différentes transitions.
- Nous avons conclu que la variation de taux de décroissance des ondes résultantes dans un intervalle étroit est responsable de la transition à la turbulence.
- D'après les événements discutés, les ondes pompes et résultantes échangent de l'énergie et dépendent fortement de la dynamique du système.

Pour pouvoir contrôler la stratégie du chaos dont l'objectif est de réduire ou de supprimer les faibles turbulences, on a utilisé une perturbation de résonance supplémentaire de faible amplitude et nous avons montré en même temps que cette stratégie peut stabiliser les orbites chaotiques avec des amplitudes de contrôle très faibles qui s'avère être un élément intéressant du point de vue expérimental. Plusieurs remarques sont mises en point.

- Dans notre procédure de contrôle, une perturbation de résonance est utilisé que l'on a considéré qu'elle provient des modes non inclus dans les trois modes de troncature. Dans ce sens, notre perturbation est intrinsèque au système et ne peut pas être facilement ajustée de manière à choisir une orbite de petite période pour la dynamique contrôlée.
- La suppression du chaos est possible par le biais des résonances intrinsèques avec de petites amplitudes.
- Pour une meilleure compréhension de la description de la turbulence d'onde de dérive au bord de plasma, il faut un très grand nombre de ces modes.

Références

- [1] C. W. Horton, " Drift Waves and Transport ", Rev Mod Phys, **71**, 735 (1999).

-
- [2] A. Hasegawa and K. Mima, " Stationary Spectrum of Strong Turbulence in Magnetized Nonuniform Plasma ", *Phys Rev Lett*, 39, 205 (1977), *Phys Fluids* 21, 81 (1978).
- [3] W. Horton and A. Hasegawa, " Quasi-two-dimensional Dynamics of Plasmas and Fluids ", *Chaos* 4, 227 (1994).
- [4] J. M. Wersinger, J. M. Finn, and E. Ott, " Bifurcation and Strange Behavior in Instability Saturation by Nonlinear Three-wave Mode Coupling ", *Phys Rev Lett* 44, 453 (1980), *Phys Fluids* 23, 1142 (1980).
- [5] A. Hasegawa, T. Imamura, K. Mima, and T. J. Taniuti, " Stationary Spectrum of Pseudo-Three-Dimensional Electrostatic Turbulence in Magnetized Plasmas ", *J Phys Soc Jpn* 45, 1005 (1978).
- [6] K. Katou, " Resonant Three-wave Interaction in Electrostatic Drift-Wave Turbulence ", *J Phys Soc Jpn*, 51, 996 (1982).
- [7] G. I. de Oliveira, F. B. Rizzato, and L. P. L. de Oliveira, " Nonintegrable Three Mode Interaction in the Zakharov Equations ", *Physica D* 104, 119 (1997).
- [8] E. Ott, " *Chaos in Dynamical Systems* ", Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.
- [9] A. M. Batista and I. L. Caldas, S. R. Lopes and R. L. Viana, W. Horton and P. J. Morrison, " Nonlinear Three-Mode Interaction and Drift-Wave Turbulence in a Tokamak Edge Plasma ", *Physics of Plasmas* 13, 042510 (2006).
- [10] I. C. Nascimento, I. L. Caldas and R. M. O. Galvão, " Tokamak Research at University of São Paulo ", *J Fusion Energy* 12, 529 (1993).
- [11] M. V. A. P. Heller, R. M. Castro, I. L. Caldas, Z. A. Brasilio, R. P. Silva and I. C. Nascimento, " Correlation Between Plasma Edge Electrostatic and Magnetic Oscillations in the Brazilian Tokamak TBR ", *J Phys Soc Jpn* 66, 3453 (1997).
- [12] M. V. A. P. Heller, Z. A. Brasilio, I. L. Caldas, J. Stöckel, and J. Petrzilka, " Scrape-Off Layer Intermittency in the Castor Tokamak ", *Phys Plasmas* 6, 846 (1999).
- [13] E. Mazzucatto, " Spectrum of Small-Scale Density Fluctuations in Tokamaks ", *Phys Fluids* 21, 1062 (1978).
- [14] D. L. Brower, W. A. Peebles, and N. C. Luhmann, " Multichannel Scattering Studies of the Spectra and Spatial Distribution of Tokamak Microturbulence ", *Phys Rev Lett* 54, 689 (1985).
- [15] R. M. Castro, M. V. A. P. Heller, I. L. Caldas, R. P. da Silva, Z. A. Brasilio and I. C. Nascimento, " Plasma Edge Electrostatic and Magnetic Oscillations in the Brazilian Tokamak TBR ", *Phys Plasmas* 3, 971 (1996).
- [16] A. Chikhaoui, " Contribution à l'Étude de la Stabilité des Systèmes Non Linéaires ", Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen 2000.
- [17] Hu, G. He, K, " Controlling Chaos in Systems Described by Partial Differential Equations ", *Phys Rev Lett* 71, 3794-3797 (1993).

- [18] A. M. Batista, I. L. Caldas, S. R. Lopes and R. L. Viana " Low-dimensional Chaos and Wave Turbulence in Plasmas ", Phil Trans R Soc 366, 609-620 (2008).
- [19] K. S. Karplyuk, V. N. Oraevskii, V. P. Pavlenko, " Dynamics of the Non-linear Interaction of Magnetohydrodynamic Waves ", Plasma Phys 15, 113-124 (1973).
- [20] S. R. Lopes, A. C. L Chian, " Controlling Chaos in Nonlinear Three-wave Coupling ". Phys Rev E 54, 170-174(1996).

Chapitre IV

Modèle de Transition L-H d'un Plasma Confiné Pour l'Etude de la Suppression de la Turbulence

Chapitre IV

Modèle de Transition L-H d'un Plasma Confiné Pour l'Etude de la Suppression de la Turbulence

4.1 Introduction

Pour étudier le phénomène de la suppression de la turbulence dans les plasmas de fusion confinés, un modèle de dynamique couplée des transitions de confinement L-H est proposé, permet de donner une analyse sur la singularité et les structures des bifurcations. La simulation numérique est effectuée en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour évaluer le comportement du flux du cisaillement par rapport à la puissance d'entrée. C'est une procédure de calcul parmi les méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta lesquels élaborèrent la méthode en 1901.

Mais tout d'abord, il est instructif de donner des notes sur la théorie de la singularité et de la stabilité que R. Ball et P. W. Terry ont utilisé afin d'étudier les équilibres des systèmes dynamiques qui consiste à tracer le diagramme de bifurcation.

4.2 Transition L-H

Depuis sa découverte en Tokamak ASDEX en 1982 [1], la transition L-H a été observée dans de nombreux diverteur et limiteur du Tokamak lors de décharge, et aussi dans certains stellarators. La transition L-H dans les plasmas est par définition le passage d'un mode de faible

confinement (L) à un autre mode de fort confinement (H). Il faut savoir aussi que le temps du confinement d'énergie du plasma est augmenté d'un facteur de $f_H \approx 2$. Une transition L-H est caractérisée par un seuil dans la puissance de chauffage qui est approximativement proportionnel au produit de la densité électronique moyenne \bar{n}_e et le champ magnétique toroïdale B_t . La puissance seuil dépend aussi fortement de la direction de B_t , elle est observée comme une réduction du flux de particules hors du plasma.

Le paradigme principal pour la réduction du transport turbulent dans le plasma de bord de mode H est basé sur le champ électrique radial cisailé. Le cisaillement du champ électrique radial E_r peut réduire le transport soit à travers la stabilisation des modes linéaires [2] en réduisant les amplitudes ou les longueurs de corrélation de la turbulence, ou en changeant les phases entre les fluctuations turbulentes [3].

Dans la théorie analytique [4], un critère pour une forte suppression de la turbulence est $|\nabla E / B > \Delta\omega_t / k_\theta \Delta r_t|$ (voir Fig. 4.1). Si ce critère est satisfaisant, la corrélation radiale entre les tourbillons turbulents voisins est effectivement supprimée par la rotation poloïdale cisailée. Une barrière de transport de bord avec une largeur de 1 à 3 cm est formée. En effet, des fluctuations du champ magnétique, de densité et du potentiel électrostatique sont réduites. La diffusivité des particules et la conductivité de chaleur sont réduites par un facteur de 5 à 10 ce qui signifie que dans cette couche étroite, le transport des ions peut être proche de sa valeur néoclassique. Bien que l'amélioration brusque du confinement a été connue depuis l'antiquité, le mécanisme dont le champ électrique radial est formé dans la transition n'est pas toujours clair.

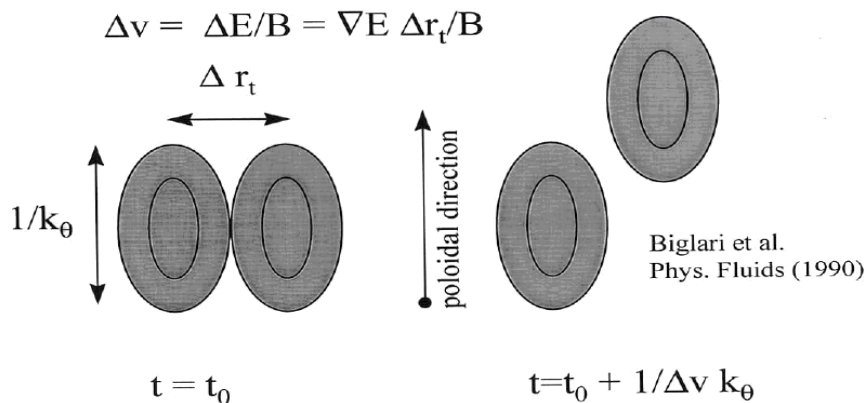


Fig. 4.1: Le critère BDT pour une forte suppression de la turbulence est $|\nabla E / B > \Delta\omega_t / k_\theta \Delta r_t|$ [4]. Ici, $\Delta\omega_t$ est la fréquence de décorrélation turbulent, Δr_t est la longueur de corrélation radiale, et k_θ est le nombre d'onde poloïdal moyen de la turbulence.

De nombreux modèles cherchent une bifurcation dans E_r (ou dans la rotation poloïdale U_θ) afin d'expliquer l'échelle de temps rapide ($\sim 10^{-4}$ s) de la transition. Un autre aspect "Stringer pin-up" [5], dans lequel une bifurcation dans la rotation poloïdale survient à cause d'une source de particules asymétriques poloïdale ou de transport. Une autre explication proposée est fondée sur un spectre de fluctuations asymétriques (tension de Reynolds) [6] qui provoque une génération de flux. Dans ces deux cas, le spin vers le haut est supposé se produire en raison des processus anormaux. Dans le modèle de Shaing [7], les processus anormaux ne sont pas inclus, la bifurcation résulte d'un équilibre entre la perte de courant d'orbite ionique et le retour du courant néoclassique. A une faible température de bord, l'équilibre se produit pour une valeur faible de E_r (la solution de mode L). Le chauffage du plasma fera deux solutions stables possibles et un autre chauffage rendra la solution de mode L à disparaître, provoquant une bifurcation pour une grande valeur du champ électrique ainsi que pour une rotation élevée de $\vec{E} \times \vec{B}$ (solution de mode H). En outre, il existe des théories dans lesquelles le transport anormal est du à quelque modes spéciaux (mode ITG par exemple [8]), la transition se produit lorsque ce mode est stabilisé.

4.3 Théorie de singularité et analyse de stabilité. Singularités persistantes dégénérées

La bifurcation systématique, la théorie de singularité et l'analyse de la stabilité [9-11] fournissent des informations sur le comportement global d'un système dynamique pour un espace de paramètres bien défini. Autrement dit, la théorie de singularité est une méthodologie systématique pour caractériser les équilibres des systèmes dynamiques, qui consiste à tracer le diagramme de bifurcation.

Pour comprendre le comportement d'un système complexe qui se caractérise par un fort degré de liberté, une approche standard consiste à commencer par la formulation d'un modèle simplifié du processus du système mis en évidence. Pourtant, très peu de systèmes dynamiques ont des solutions exactes. Pour la grande majorité, ils n'ont pas encore prouvé que les solutions existent. Les méthodes robustes d'analyse qualitative, comme les théories de la singularité et la stabilité, peuvent nous informer comment les solutions se comporteraient selon la variation des paramètres. Puisque nous pouvons approximer les solutions à des solutions finement détaillées, donc, on peut dire que cette technique est une tâche redoutable pour les calculs sur l'espace entier

de paramètres. Toutefois, pour un système dynamique macroscopique expérimental ou dans le monde réel, nous sommes souvent intéressés à des questions importantes: est ce que ce système est régi par un comportement discontinu, périodique ou instable, quelles sont les limites de ce comportement dans l'espace de paramètres. Toutes ces questions permettent de concevoir ou de gérer les expériences pour comprendre, empêcher, ou de modifier une telle action sans oublier l'utilisation de l'analyse qualitative pour améliorer le modèle lui-même.

Soit un système dynamique

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (4.1)$$

Les éléments x sont les variables d'état dynamiques, λ_i sont les paramètres. Les équilibres sont obtenus en annulant les équations dynamiques.

$$G(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad (4.2)$$

La fonction $G(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelée problème de bifurcation. Les solutions de (4.2) qui satisfont à la condition additionnelle (4.3) où la notation en indice dénote la différentiation partielle par rapport à x , sont appelées points singuliers ou des singularités.

$$G_x = 0 \quad (4.3)$$

Les points où les conditions (4.2) et (4.3) ont en outre, une ou plusieurs dérivées partielles nulles d'ordre supérieur, ne sont connus que comme des dégénérés ou des singularités relativement à cet ordre. Un exemple d'une singularité dégénérée qui a une importance physique dans le contexte actuel est le point fourche pour lequel la définition et les conditions de la non dégénérescence sont:

$$G = G_x = G_{xx} = G_{\lambda_1} = 0 \quad G_{xxx} \neq 0 \quad G_{x\lambda_1} \neq 0 \quad (4.4)$$

L'application de ces conditions pour les équations (4.7)-(4.9) permet de trouver avec l'aide de certains calculs formels que P est le point fourche unique.

$$P(v', Q, \beta, \varphi) = \left(0, \frac{\alpha^2 \gamma^2}{9a^2 b}, \frac{2\alpha^3 \gamma \sqrt{\alpha/a}}{27\sqrt{3} a^2 b}, 0 \right)$$

Pour P, les deux conditions de la non dégénérescence de l'équation (4.4) sont évaluées comme $g_{PQ} = 8a/\alpha$ et $g_{PPP} = -18a\gamma^2/(\alpha\beta)$. Nous avons constaté que le point fourche est dégénéré à deux reprises, car en plus du paramètre de la bifurcation principale Q, deux autres sont tenus pour définir ce point. Le diagramme de bifurcation pour l'équilibre des équations (4.7)-(4.9) pour des

valeurs critiques du paramètre dissipatif β et pour le paramètre de rupture symétrique φ , est représenté dans la figure 4.2 (a). Dans (b) et (c), β est détendue d'un côté ou d'autre de la valeur critique, mais φ est maintenue à zéro.

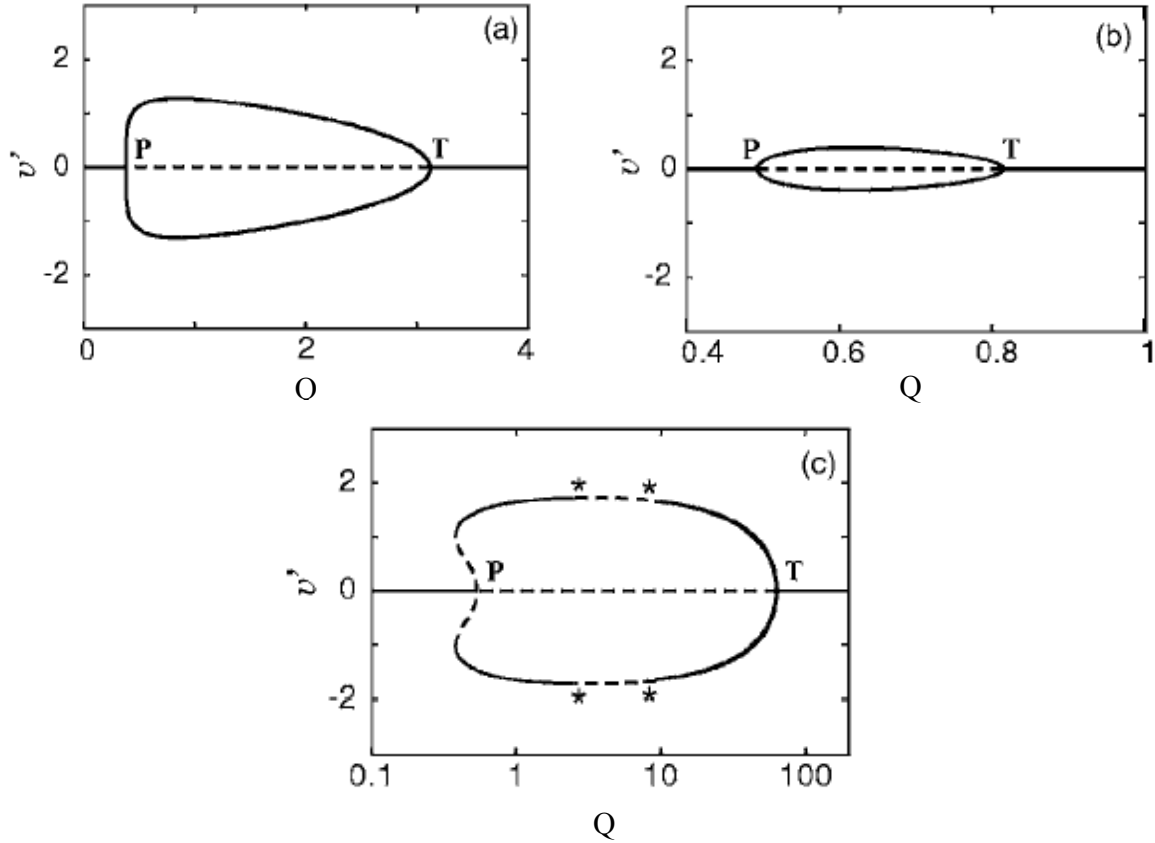


Fig. 4.2: diagramme de bifurcation montrant la dégenérescence complète (a), partiellement déployée (b) et le point fourche P (c). (a) $\beta = \beta_{crit} \approx 18.58$, (b) $\beta = 50$ et (c) $\beta = 1$. Les autres paramètres sont: $\varphi = 0$, $\gamma = 1$, $b = 1$, $a = 0.3$, $\alpha = 2.4$ et $\varepsilon = 1.5$.

D'autre singularité T pour $v' = 0$ apparaît sur la figure 4.2 satisfait à la définition et aux conditions de la non dégenérescence d'une bifurcation transcritique.

$$G = G_x = G_{\lambda_1} = 0$$

$$G_{xx} \neq 0 \quad \det \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{\lambda_1 x} \\ G_{x\lambda_1} & G_{\lambda_1 \lambda_1} \end{pmatrix} \equiv \det d^2 G < 0 \quad (4.5)$$

Elle est dégenérée une fois mais exige également une symétrie de paramètre de rupture pour la détermination complète.

On constate d'après la figure 4.2 que le point fourche est persistant à des variations de β . En fait, il est persistant à des variations de tous les paramètres des équations (4.7)-(4.9) autres que φ . La persistance d'une singularité dégénérée se présente lorsqu'il y'aura pas assez de paramètres indépendants à déployer. Elle n'était pas reconnue dans certains modèles précédents pour les transitions du confinement de telle façon que ces points ont été inexactement demandés pour représenter les transitions de phases du second ordre. En outre, tant que la singularité dégénérée P persiste, le modèle ne peut pas être un facteur prédictif. Ceci peut être considéré comme un problème de surdétermination: avec un φ nulle (section (4.4)), il existe quatre conditions prescrites, mais nous n'avons que trois quantités variables v' , Q et β .

Typiquement, la bifurcation fourche est associée à une symétrie fragile dans la physique du système modélisé. Dans ce cas, la symétrie est évidente dans la figure 4.2. En principe, le flux de cisaillement peut être également dans les deux sens. Réellement (ou numériquement), des expériences sont toujours soumises à des perturbations qui déterminent une direction privilégiée pour l'écoulement de cisaillement (tels que la friction avec les neutres ou tout autre mécanisme inducteur de cisaillement asymétrique) alors que la bifurcation fourche est inévitablement décomposée ou déployée. La figure 4.2 donne ainsi une image plus réaliste de la dynamique de la transition du confinement.

Un troisième exemple d'une singularité dégénérée s4 sera discuté et illustré suivant la figure (4.28). Ce point peut être classé comme un point tournant infiniment dégénéré.

$$G = G_x = 0 \quad G_{xx} \neq 0 \quad G_{\lambda_1} \neq 0 \quad (4.6)$$

Pour une solution d'équilibre des équations (4.7)-(4.9) sans turbulences et avec $Q = 0$, on peut voir que l'une ou les deux conditions de la non-dégénérescence (4.6) disparaissent. Les conditions (4.6) peuvent être appliquées aux équilibres des équations (4.7), (4.12) et (4.13) pour vérifier la classification de déploiement de s4. Étant donné que les expressions algébriques obtenues sont extrêmement longues dans ce cas, il n'est ni intéressant ni opportun de les reproduire ici, mais le résultat peut être reproduit facilement en utilisant un logiciel de calcul formel. En bref, on résout les zéros des équations (4.7) et (4.12) pour P et N qui seront substitués dans l'équation (4.13) pour obtenir l'équation de bifurcation $G(v')$. Après avoir obtenu les dérivées partielles $G_{v'}$, $G_{v'v'}$ et G_Q , le système $G = G_{v'} = 0$ peut être résolu en termes de φ et b. Cela invoque le

théorème des fonctions implicites pour paramétrer le système en utilisant v' . La substitution des expressions de φ et b dans $G_{v,v'}$ et G_Q achève la vérification des conditions (4.6) pour s_4 .

Généralement, lorsqu'on s'intéresse à l'analyse d'un modèle dynamique, le modèle est supposé représenter si nous avons traité la correspondance et le lien entre la bifurcation, la structure de la stabilité et la physique du processus. Si on exploite cette relation, nous trouvons que les singularités dégénérées correspondent à des phénomènes physiques intéressants (par exemple accomplir une rupture d'une symétrie impèrative, ou l'apparition des hystérésis ou pour résoudre une "catastrophe ultraviolette"). Dans le premier cas, on peut libérer la singularité d'une manière physiquement significative; dans l'autre cas, nous savons que quelque chose ne va pas et que nous devrions revoir nos hypothèses.

4.4 Modèle dynamique réduit pour les transitions du confinement

La modélisation et l'analyse approfondie dans ce travail sont basées sur le modèle dynamique réduit des transitions de confinement suivant [12]:

$$\varepsilon \frac{dP}{dt} = Q - \gamma N P \quad (4.7)$$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N P - \alpha v'^2 N - \beta N^2 \quad (4.8)$$

$$2 \frac{dv'}{dt} = \alpha v' N - \mu(P, N) v' + \varphi \quad (4.9)$$

P : l'énergie dans le réservoir de gradient de pression.

N : l'énergie cinétique de la turbulence.

$F = \pm v'^2$: l'énergie cinétique du flux du cisaillement.

Q : puissance d'entrée, elle est supposée constante.

ε : capacité thermique.

γ et α : coefficients de taux d'énergie conservatrice du transfert.

β : coefficient de taux de dissipation de la turbulence.

φ : taux de la source du flux de cisaillement et

$\mu(P, N) = b P^{-3/2} + a P N$ représente la contribution néoclassique et turbulente à la dissipation visqueuse.

Les équations (1-3) sont provenues des équations fluides magnétohydrodynamiques (MHD) réduites pour le moment et la convection pression:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + J \times B + \mu \nabla_{\perp}^2 v + \Omega' \tilde{p} \hat{x} - \rho v [v - V(x) \hat{y}] \quad (4.10)$$

$$\frac{dp}{dt} = \chi \nabla_{\perp}^2 p \quad (4.11)$$

Où $d/dt = \partial/\partial t + v \cdot \nabla$, on tient compte aussi de la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot v = 0$ et de la loi d'Ohm résistive $E + v \times B = \eta J$.

$v = (1/B_0) \hat{z} \times \nabla \phi = v_0 + \tilde{v}$ $E \times B$ La vitesse de flux

$v_0 = \langle v \rangle$ La composante moyenne de milieu

\tilde{v} Composante de turbulence ou de fluctuation

$p = p_0 + \tilde{p}$ La pression de plasma

\tilde{p} Composante de turbulence ou de fluctuation

B_0 Le champ magnétique le long de l'axe z

ρ La densité de masse moyenne de l'ion, supposé constante

μ Le coefficient de viscosité ionique

η La résistivité

ν Le coefficient d'amortissement de friction

$\Omega' \equiv d\Omega/dx > 0$ La courbure moyenne des lignes de champ, supposé constante

∇_{\perp}^2 $\partial_x^2 + \partial_y^2$

χ Le coefficient de diffusion du champ transverse

V Le flux extérieur

Les équations (4.10) et (4.11) sont les limites électrostatiques des équations MHD réduites [13]. Ils ont été montrés pour bien décrire la dynamique non linéaire d'un plasma de Tokamak [14-17]. Ici, un terme supplémentaire $\rho v [v - V(x) \hat{y}]$ dans l'équilibre dynamique a été inclus brise la symétrie d'inversion du flux du cisaillement.

Il est utile de schématiser les voies d'énergie grâce à l'énergie potentielle, l'énergie cinétique turbulente et les sous-systèmes du flux du cisaillement selon la figure (4.3). On peut constater que le squelette du système dynamique peut également être écrit directement par un contrôle.

Ensuite, en développant les équations (4.7)-(4.9), il faut utiliser les expressions de taux semi empirique qui ont été dérivées dans les références [12] et [18].

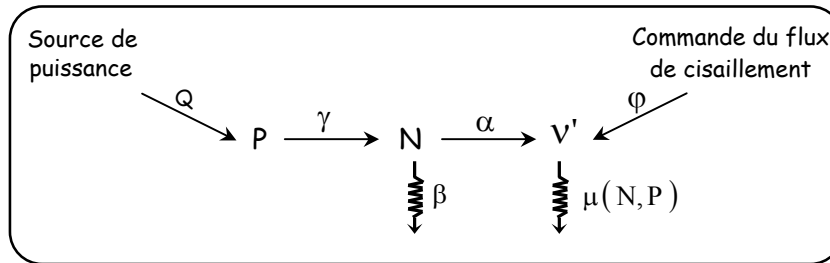


Fig. (4.3): Schéma du flux d'énergie pour les trois variables d'état exprimées par les équations (4.7)-(4.9). Les flèches bouclées indiquent les canaux dissipatifs, les flèches droites indiquent les entrées et les canaux de transfert entre l'énergie et les sous-systèmes confinés.

La structure de la bifurcation des équations (4.7)-(4.9) sera trouvée dans la référence [12]. Cette structure permet de prévoir la suppression du flux du cisaillement de la turbulence, le phénomène d'hystérésis et non hystérésis, les transitions oscillatoires et la saturation puis la descente du flux de cisaillement avec la croissance de la puissance d'entrée. Tous ces comportements ont été observés chaque fois dans diverses expériences dans les plasmas fusion. Le modèle semble donc être bon et complet dans le sens d'être auto-cohérent, avec la dégénérescence d'une persistante singularité et avec notamment des comportements typiquement réfléchissants.

La structure de la bifurcation présentée dans la section (4.5) identifie un point singulier s_4 dégénéré piégé (ou persistant) pour une puissance d'entrée Q nulle et pour en même temps un flux de cisaillement d'entrée ϕ différent de zéro. La présence de s_4 conduit à une déstructuration du modèle dans certaines circonstances: à partir d'un état de fort confinement, le diagramme d'équilibre des équations (4.7)-(4.9) prévoit une augmentation illimitée du flux du cisaillement lorsque la puissance d'entrée Q reflue à zéro. La singularité piégées s_4 est décomposée (ou déployée) légèrement par l'introduction d'un modèle de fusion simple pour le flux d'énergie à partir du flux de cisaillement de la turbulence. Physiquement, la présence de s_4 reflète le fait que les équations (4.10) et (4.11) sont obtenues par la dérivation des équations (4.7)-(4.9), elles ont décrit la physique d'un flux sous un champ de vitesse à deux dimensions. L'évolution de s_4 peut envisager un simple modèle des effets du champ de vitesse tridimensionnelle qui sont en réalité expérimentés par les éléments de fluide, c'est-à-dire, une chute d'énergie non négligeable vers des nombres d'onde élevés. En termes du modèle lui-même, s_4 et le nouveau terme qui déploie en

évidence l'importance de solutions insignifiantes ou non physiques dans l'élaboration de la structure de l'espace des paramètres physiques. Dans la section (4.6), quelques conséquences pratiques durant le déroulement de l'expérience et le fonctionnement du dispositif effectué par R. Ball et P. W. Terry, seront discutées.

4.5 Cas de la singularité piégée

Deux diagrammes de bifurcation représentant les équations (4.7)-(4.9) sont donnés dans la figure (4.4), où la puissance d'entrée Q est le paramètre principal de la bifurcation. Le flux de cisaillement v' dans le domaine positif est choisi tant qu'un variable d'état. (Dans ces diagrammes, les lignes continues indiquent les équilibres stables, les lignes en pointillés marquent les équilibres instables tandis que les amplitudes des cycles limites sont indiquées par des points continus). Il est très important de noter que le diagramme de bifurcation de la figure (4.4) doit être vu conceptuellement comme le tracé des données à partir d'une série d'expériences. Nous pouvons imaginer la conduction de l'expérimentation où nous faisons un petit incrément dans la puissance d'entrée Q , ce qui permet l'évolution du système vers un équilibre approximatif et l'enregistrement de l'énergie potentielle, l'énergie de la turbulence et le flux du cisaillement. Ces situations nous donnent un point sur le diagramme. L'expérience est répétée plusieurs fois et chaque fois que Q augmente par une petite quantité, ils tracent les données et les résultats obtenus. Dans les limites, les augmentations de Q deviennent quasi-statiques et par conséquent, ils ont eu un diagramme de bifurcation continu. D'autre part, une autre série d'expériences sera effectuée de telle façon que Q diminue quasistatiquement pour tester le plan d'hystérésis. Le paramètre de bifurcation est souvent désigné comme le paramètre de contrôle. En principe, si ce n'est pas toujours le cas dans la pratique, il s'agit dans cette fois-ci d'un cadran extérieur ou d'un levier qui peut tourner de façon indépendante par l'expérimentateur durant ou entre les expériences. Les diagrammes de bifurcation donnés par la figure (4.4) sont tracés pour différentes valeurs de la symétrie du rupture du flux de cisaillement du paramètre φ .

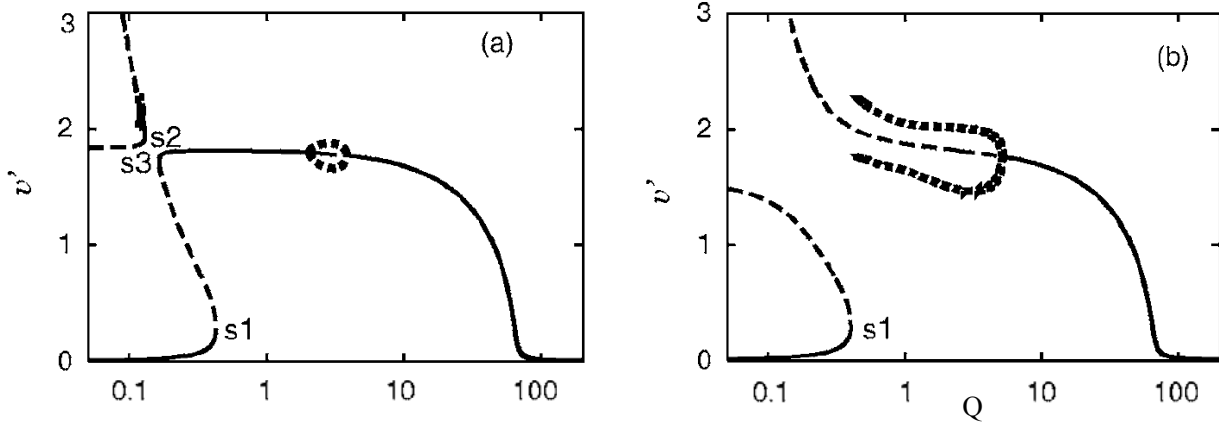


Fig. (4.4): Diagrammes de bifurcation pour les équations (4.7)-(4.9). $\beta = 1, \gamma = 1, b = 1, a = 0.3, \alpha = 2.4$ et $\varepsilon = 1$ (a): transition hystérésis classique $\varphi = 0.08$, (b): transition oscillatoire, $\varphi = 0.11$.

Les études de la stabilité asymptotique reposent toujours sur la linéarisation des équations différentielles. Le système linéarisé au sens de la dérivée au sens de Frechet s'écrit sous la forme:

$$\begin{pmatrix} dP/dt \\ dN/dt \\ dv'/dt \end{pmatrix} = DF(P_{eq}, N_{eq}, v'_{eq}) \begin{pmatrix} P - P_{eq} \\ N - N_{eq} \\ v' - v'_{eq} \end{pmatrix}$$

Où P_{eq} , N_{eq} et v'_{eq} sont les coordonnées du point d'équilibre du système d'équations (4.7)-(4.9).

DF est la matrice Jacobienne du système d'équations.

$$DF(P, N, v') = \begin{bmatrix} -\gamma N / \varepsilon & -\gamma P / \varepsilon & 0 \\ \gamma N & \gamma P - \alpha v'^2 - 2\beta N & -2\alpha N v' \\ -0.5(-1.5b/P^{2.5} + aN) v' & 0.5\alpha v' - 0.5 a P v' & 0.5\alpha N - (0.5b/P^{1.5}) - 0.5 a P N \end{bmatrix}$$

Les diagrammes de la figure (4.4) sont riches et avec des informations délivrant certaines dynamiques connues et prédictives du système. A ce propos, trois caractéristiques, en particulier, devraient être notées:

- La transition vers un écoulement de cisaillement élevé ou un fort confinement, l'état se produit à un point tournant s1 (figure (4.4)). Dans ce contexte, différentes variantes peuvent être proposées puisqu'on peut prouver cet aspect en étudiant le système (4.7)-(4.9) pour deux différentes valeurs de Q.

Si $Q = 0.05$, le système possède trois points d'équilibre: $X_{1eq}(0.22370, 0.22351, 0.00896)$, $X_{2eq}(68.11151, 0.00073, 5.32724)$ et $X_{3eq}(8.10011, 0.00617, 1.83643)$. Le premier point

correspond notre cas puisque les deux autres points sont des points d'équilibre instables. La linéarisation classique prédit un système et un point d'équilibre asymptotiquement stables.

$$DF(X_{1eq}) = \begin{pmatrix} -0.22351 & -0.22370 & 0 \\ 0.22351 & -0.22351 & -0.00961 \\ 0.28362 & 0.01045 & -4.46504 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.22 + 0.22 i$$

$$\lambda_2 = -0.22 - 0.22 i$$

$$\lambda_3 = -4.46$$

La figure (4.5) donne les solutions correspondantes des variables d'état (P, N, v'). Tandis que

La figure (4.6) donne l'évolution de l'énergie cinétique du flux du cisaillement en fonction de t.

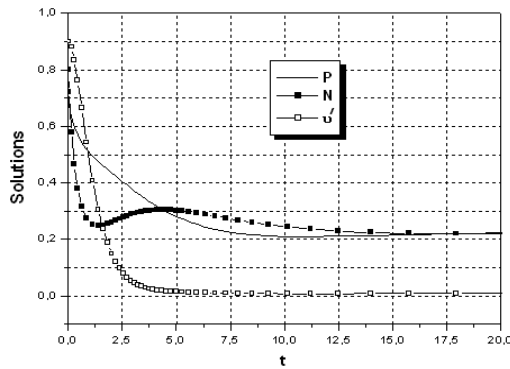


Fig. (4.5): Solutions numériques du système (4.7)-(4.9), $Q = 0.05$.

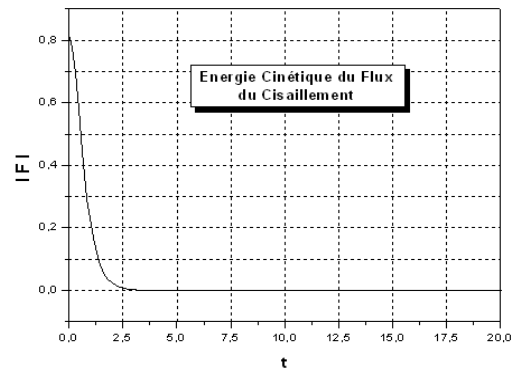


Fig. (4.6): Energie cinétique du flux du cisaillement, $Q = 0.05$.

En tenant la valeur $Q = 0.5$, on trouve que le système possède toujours trois points d'équilibres:

$$X_{1eq}(1.692, 0.295, -0.763), X_{2eq}(2.25, 0.222, -0.919) \text{ et } X_{3eq}(7.985, 0.063, 1.817)$$

La linéarisation du système au voisinage de X_{1eq} donne une matrice carrée $DF(X_{1eq})$

$$DF(X_{1eq}) = \begin{pmatrix} -0.2954 & -1.6926 & 0 \\ 0.2954 & -0.2954 & 1.0819 \\ -0.1197 & -0.7219 & 5.2425 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = -0.2764 + 1.1264 i$$

$$\lambda_2 = -0.2764 - 1.1264 i$$

$$\lambda_3 = 1.4362 \cdot 10^{-2}$$

C'est valeurs prévoient que le système (4.7)-(4.9) est instable. Les variations temporelles des variables d'état N , P et v' sont représentées dans la figure (4.7). Cependant, la figure (4.8) qui donne le comportement de l'énergie cinétique du flux du cisaillement confirme le passage vers un écoulement de cisaillement élevé.

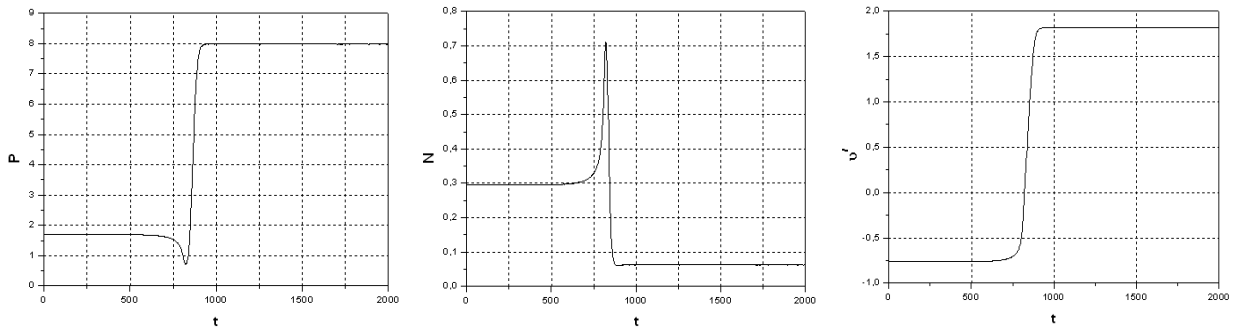


Fig. (4.7): Solutions numériques du système (4.7)-(4.9), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$, $Q = 0.5$.

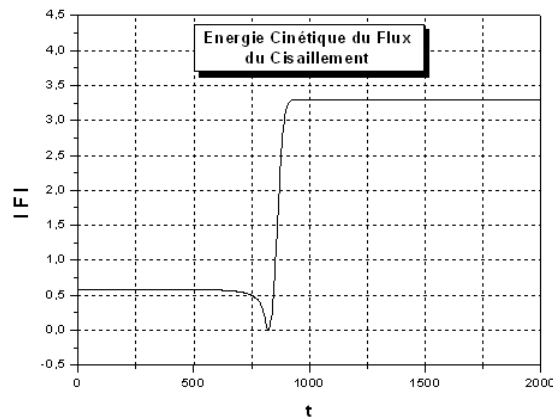


Fig. (4.8): Energie cinétique du flux du cisaillement, $Q = 0.5$.

- En (a), la dernière transition se produit vers un état de repos (s_2). Sur cette branche de haut confinement, il existe aussi deux bifurcations de Hopf encadrant une enclave de cycles de limite stables. L'autre branche séparée qui correspond à des faibles valeurs de Q et à des grandes valeurs de v' a un point tournant marqué par s_3 et possède aussi une bifurcation de Hopf provient d'une petite bande de cycles limites, perceptible de cette résolution.

Pour détecter la dernière transition, nous avons choisi de faire une étude asymptotique sur le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires (4.7)-(4.9) pour une valeur de Q égale à 1. Les courbes des solutions numériques ainsi que l'énergie cinétique du flux du cisaillement en question sont tracées dans les figures (4.9) et (4.10). L'annulation des équations dynamiques prédit trois points d'équilibre:

$$X_{1eq}(7.999, 0.125, 1.811), X_{2eq}(1.006, 0.994, -0.073) \text{ et } X_{3eq}(5.598, 0.179, -1.507)$$

La linéarisation du système au sens de Frechet et au voisinage de X_{1eq} prédit la matrice suivante:

$$DF(X_{1eq}) = \begin{pmatrix} -0.125 & -7.999 & 0 \\ 0.125 & -0.1223 & -1.0866 \\ -2.645 \cdot 10^{-2} & 2.7165 \cdot 10^{-4} & -2.2082 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = -0.0105 + 1.0077 i$$

$$\lambda_2 = -0.0105 - 1.0077 i$$

$$\lambda_3 = -0.2484$$

Donc, le système est asymptotiquement stable puisque les parties réelles de valeurs propres sont strictement négatives.

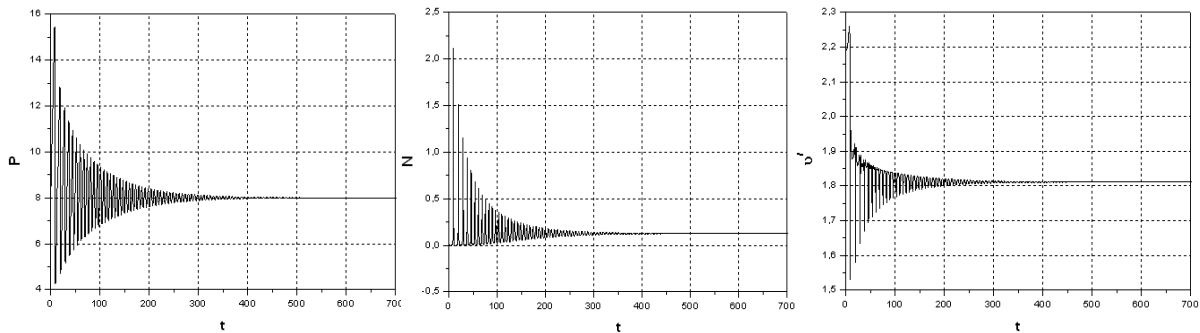


Fig. (4.9): Solutions numériques du système (4.7)-(4.9), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$. $Q = 1$.

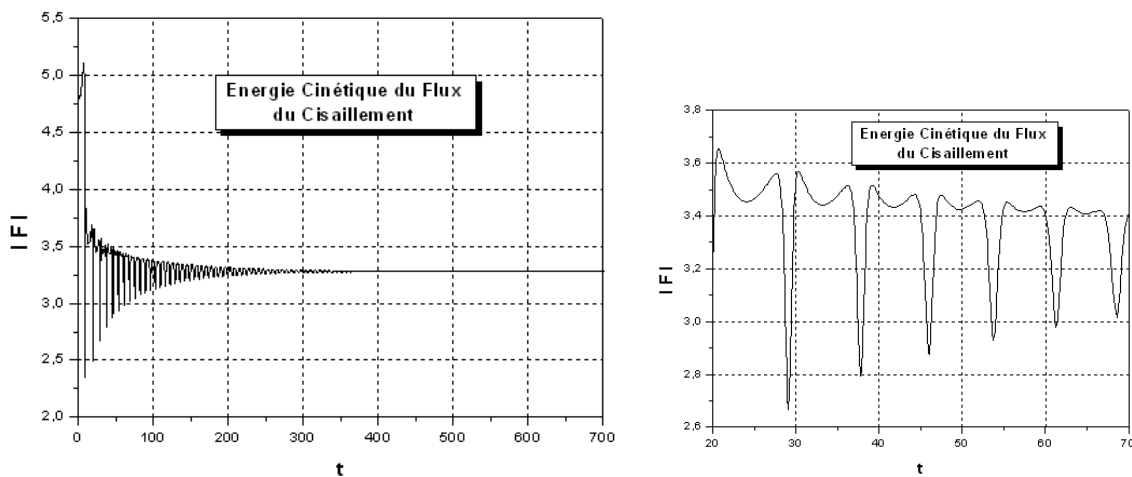


Fig. (4.10): Energie cinétique du flux du cisaillement, (b) Zoom, $Q = 1$.

En effet, c'est tout à fait légitime de trouver ensuite des cycles de limite stables puisqu'il s'agit d'une bifurcation d'Andronov Hopf qui entoure un morceau de la trajectoire décrit dans la figure (4.4). Il existe évidemment deux versions subcritique et supercritique de cette bifurcation. Le sens de traversée détermine le type (super ou subcritique) de la bifurcation. L'exemple suivant ($Q = 5$) est destiné à montrer les possibilités que peut offrir la méthode de Jacobi pour l'étude de la stabilité aux points d'équilibre.

Les points d'équilibre calculés relatifs au système sont: $X_{1eq}(2.23667, 2.23546, -0.02243)$, $X_{2eq}(7.51958, 0.66493, -1.69000)$ et $X_{3eq}(8.00791, 0.62438, 1.75399)$.

D'après le calcul des valeurs propres, on peut déduire que X_{1eq} est un point d'équilibre instable, ce qui prédit que le système est instable. La linéarisation classique permet d'obtenir la matrice suivante:

$$DF(X_{1eq}) = \begin{pmatrix} -2.2355 & -2.2367 & 0 \\ 2.2355 & -2.2355 & 0.2407 \\ 5.2727 \cdot 10^{-3} & -1.9391 \cdot 10^{-2} & 1.7831 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont données par:

$$\lambda_1 = -2.2349 + 2.2362i$$

$$\lambda_2 = -2.2349 - 2.2362i$$

$$\lambda_3 = 1.7820$$

Les solutions du système non linéaire sont tracées dans la figure (4.11), tandis que la variation instantanée de l'énergie cinétique du flux du cisaillement est explicitement décrite dans la figure (4.12)

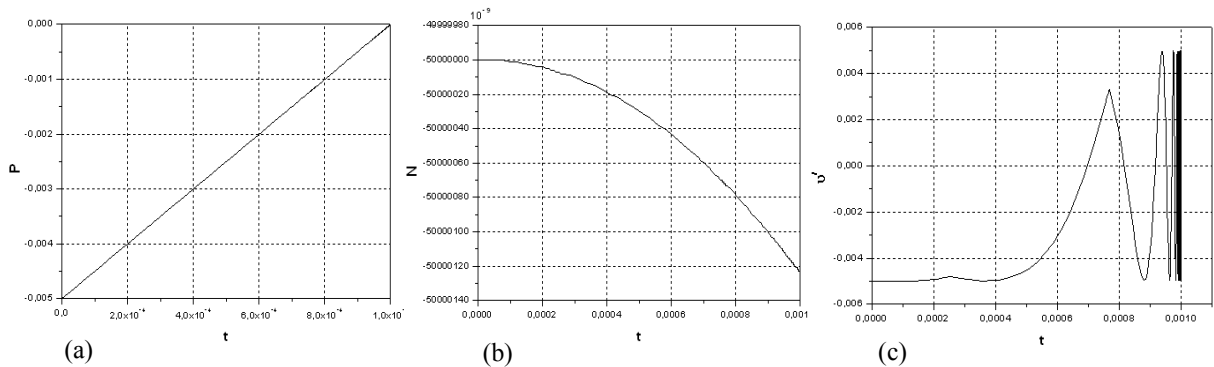


Fig. (4.11): Solutions numériques du système (4.7)-(4.9), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$. $Q = 5$.

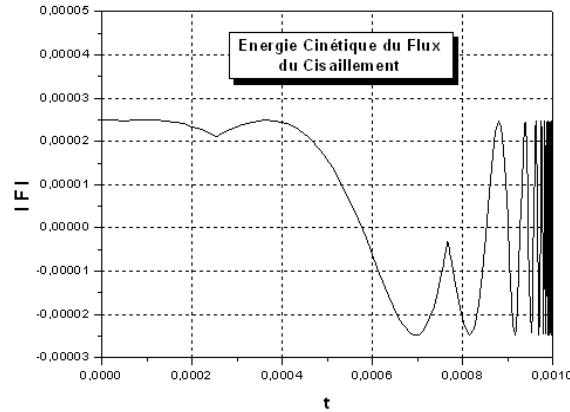


Fig. (4.12): Energie cinétique du flux du cisaillement, $Q = 5$.

Par la linéarisation classique, on peut montrer que les parties réelles des deux premières valeurs propres complexes conjuguées de la matrice de Jacobi tendent vers 0. Cet aspect est dû à l'apparition d'un cycle de limite au voisinage de X_{2eq} et X_{3eq} . Le diagramme de bifurcation associé prouve qu'il s'agit dans cette situation d'une bifurcation d'Andronov hopf. Le comportement de l'énergie cinétique du flux du cisaillement ainsi que le plan de phase obtenu sont illustrés sur les figures (4.13), (4.14) (4.15) et (4.16).

On obtient, pour des conditions initiales au voisinage de X_{2eq} une matrice donnée par:

$$DF(X_{2eq}) = \begin{pmatrix} -0.6649 & -7.5195 & 0 \\ 0.6649 & -0.6649 & 5.3939 \\ 0.1604 & -0.1218 & 2.3669 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

possède les valeurs propres suivantes:

$$\lambda_1 = -0.0751 + 2.4266i$$

$$\lambda_2 = -0.0751 - 2.4266i$$

$$\lambda_3 = -1.156$$

De même, le calcul des dérivées partielles de la matrice jacobienne en X_{3eq} conduit à une matrice donnée par:

$$DF(X_{3eq}) = \begin{pmatrix} -0.62438 & -8.00791 & 0 \\ 0.62438 & -0.62438 & -5.25676 \\ -0.15702 & -0.00208 & -0.02280 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres correspondent à:

$$\lambda_1 = -0.01 + 2.32 i$$

$$\lambda_2 = -0.01 - 2.32 i$$

$$\lambda_3 = -1.25$$

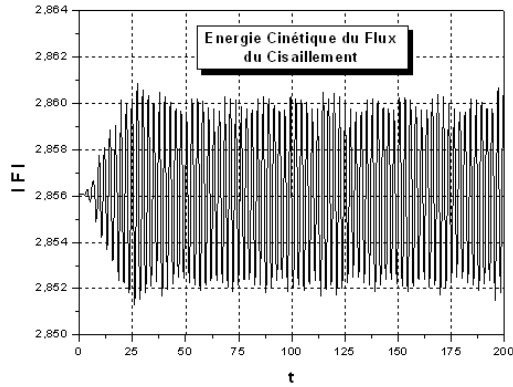


Fig. (4.13): Energie cinétique du flux du cisaillement au voisinage de X_{2eq} , $Q = 5$.

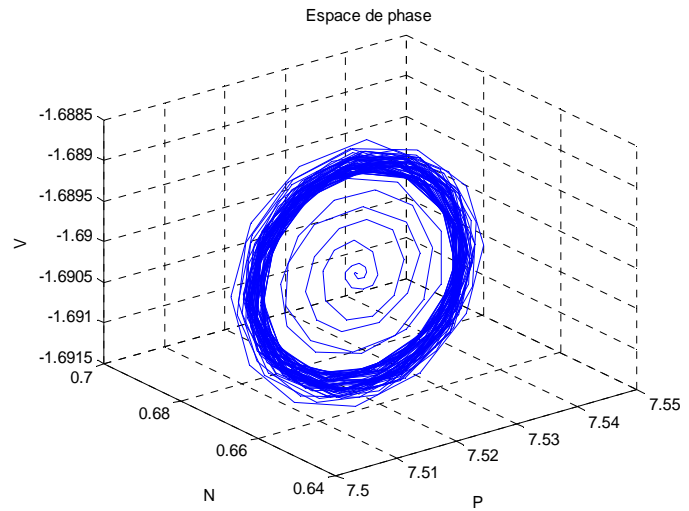


Fig. (4.14): Espace de phase au voisinage de X_{2eq} , $Q = 5$.

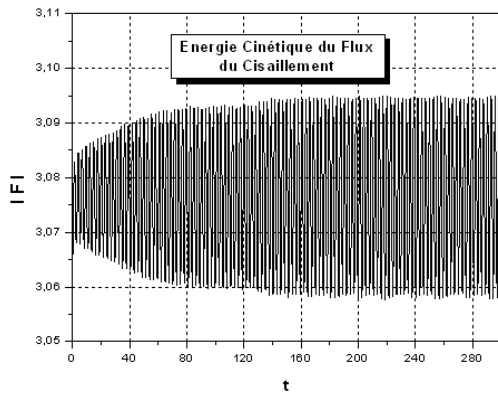


Fig. (4.15): Energie cinétique du flux du cisaillement au voisinage de X_{3eq} , $Q = 5$.

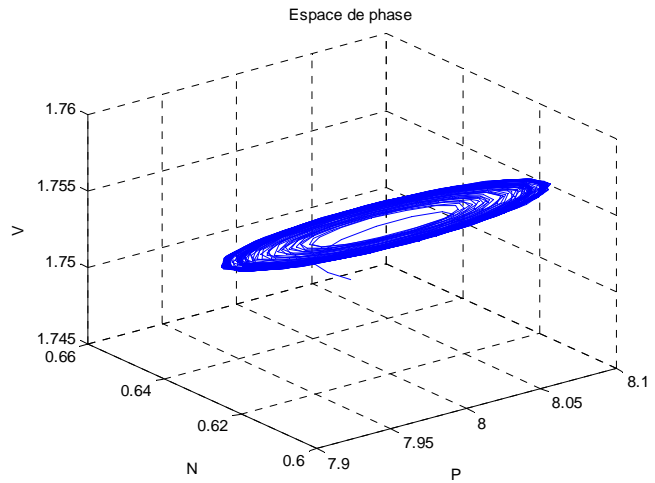


Fig. (4.16): Espace de phase au voisinage de X_{3eq} , $Q = 5$.

- En (b), où l'impulsion de flux de cisaillement ϕ est un peu plus forte, les deux différentes branches ont été échangé par l'intermédiaire d'une bifurcation transcritique [12], il est important de noter aussi que deux bifurcations de type Hopf ont détruit une autre, grâce à un point dégénéré dont les valeurs propres sont purement imaginaires (traversent l'axe des imaginaires).

Le passage de s1 vers un système qui subit des oscillations plutôt qu'un état de repos de fort flux de cisaillement. Il ne s'agit pas d'une hystérésis classique dans cette région: la dernière transition aura lieu aux extrémités de la branche du cycle de limite. Près de cette limite, on remarque un comportement périodique tridimensionnel et essentiellement une période de doublement et d'oscillation d'un cycle limite de forme torique, alors que des oscillations complexes seront prévues. L'exemple traité ci dessous et les différentes courbes trouvées pour un Q qui égale par exemple à 0.85 réaffirment ces résultats.

La solution des équations dynamiques nous permet de démontrer que le système admet trois points d'équilibre: $X_{1eq}(8.64181, 0.09836, 1.88673)$, $X_{2eq}(0.94403, 0.90039, -0.13485)$, et $X_{3eq}(4.71429, 0.18030, -1.37447)$. Les courbes qui décrivent les solutions et l'espace de phase sont représentées dans les figures (4.17) - (4.21). Selon les valeurs propres, on peut déduire que X_{1eq} est un point d'équilibre instable, ce qui prédit que le système est instable. La linéarisation classique permet d'obtenir la matrice suivante:

$$DF(X_{1eq}) = \begin{pmatrix} -0.09836 & -8.64181 & 0 \\ 0.09836 & -0.09831 & -0.89077 \\ -0.02139 & -0.18164 & -0.02915 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 9.7694 \cdot 10^{-3} + 0.8416 i$$

$$\lambda_2 = 9.7694 \cdot 10^{-3} - 0.8416 i$$

$$\lambda_3 = -0.2454$$

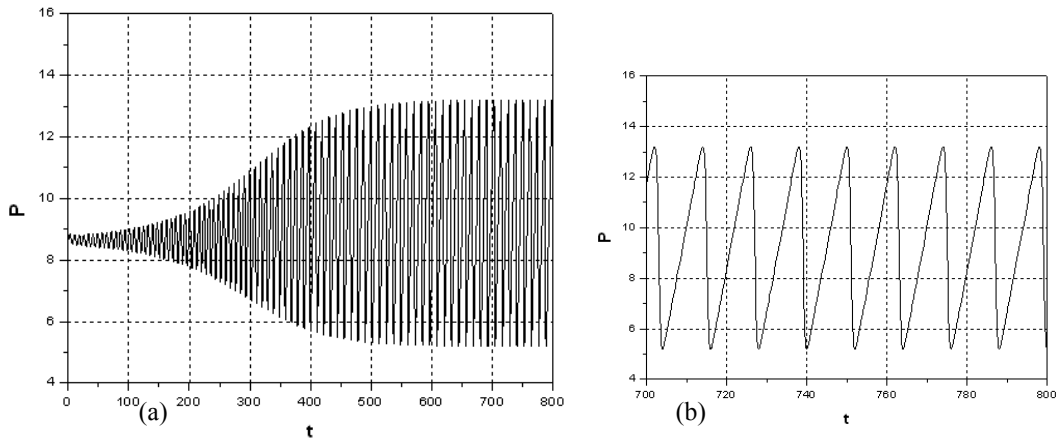


Fig. (4.17): Variation temporelle de P , (b): zoom, $Q = 0.85$.

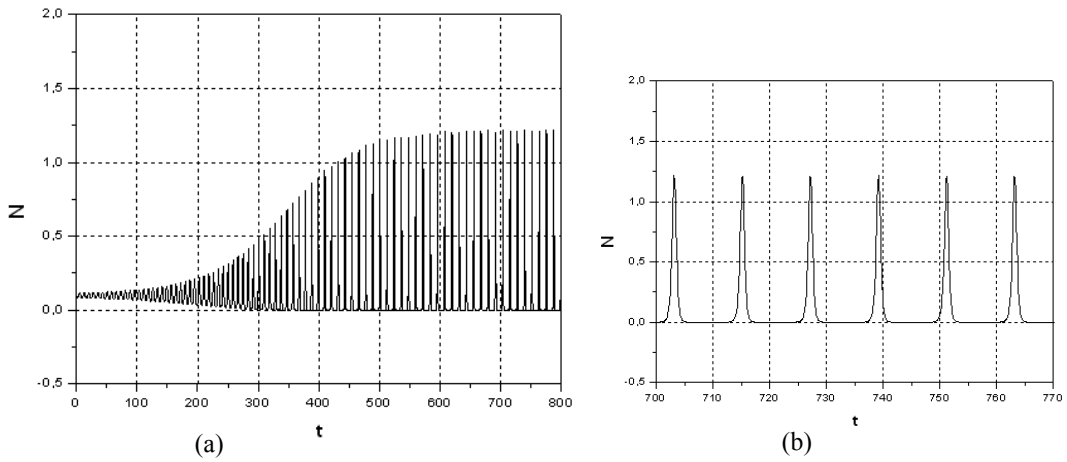


Fig. (4.18): Variation temporelle de N , (b): zoom, $Q = 0.85$.

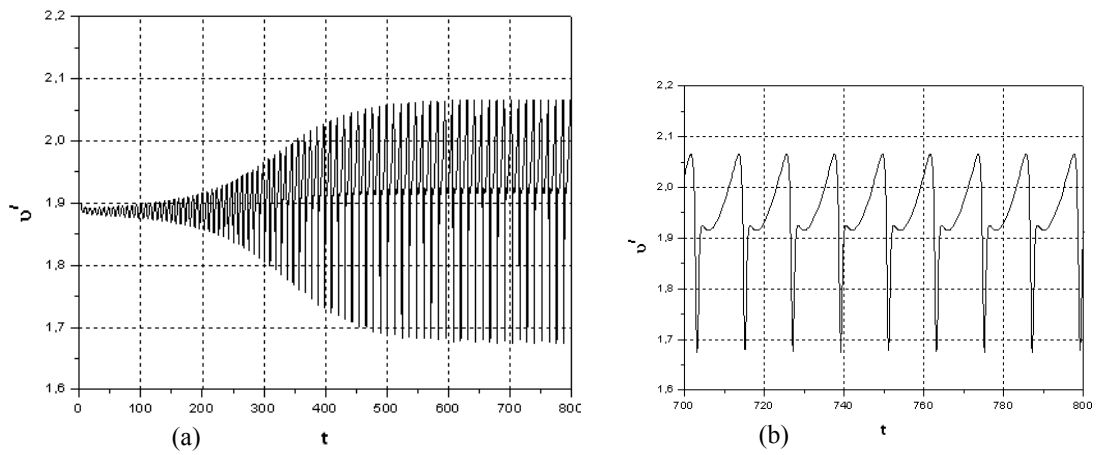


Fig. (4.19): Variation temporelle de v' , (b): zoom, $Q = 0.85$.

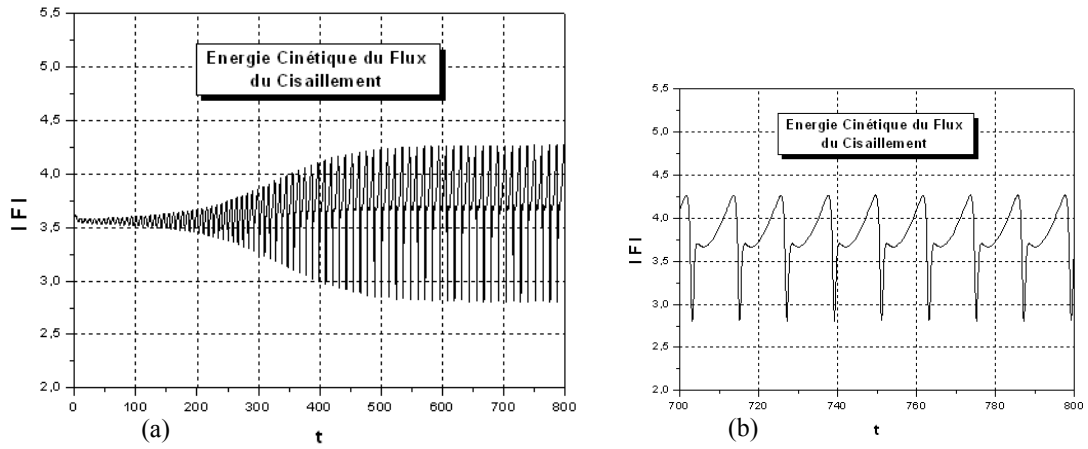


Fig. (4.20): Variation temporelle de $|F|$, (b): zoom, $Q = 0.85$.

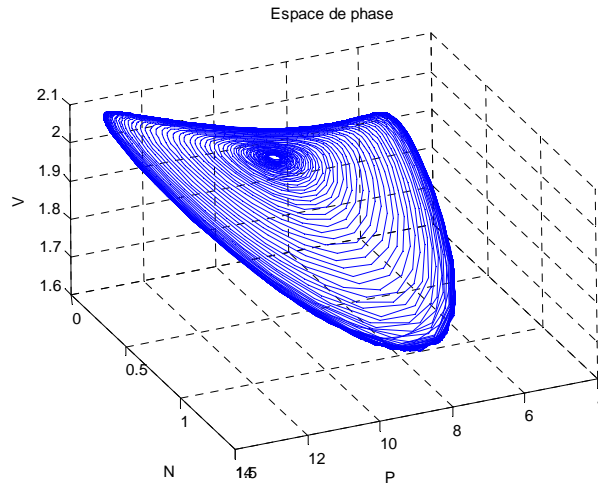


Fig. (4.21): Espace de phase au voisinage de X_{1eq} , $Q = 0.85$.

En calculant la matrice jacobienne $DF(X_{2eq})$, on peut confirmer de nouveau que le système instable subit des variations compliquées. Les figures (4.22) et (4.23) décrivent ces comportements émergents au voisinage de X_{2eq} .

$$DF(X_{2eq}) = \begin{pmatrix} -0.9004 & -0.9440 & 0 \\ 0.9004 & -0.9004 & 0.5828 \\ -0.0986 & -0.1427 & 0.4078 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.8898 + 0.9518 i$$

$$\lambda_2 = -0.8898 - 0.9518 i$$

$$\lambda_3 = 0.3868$$

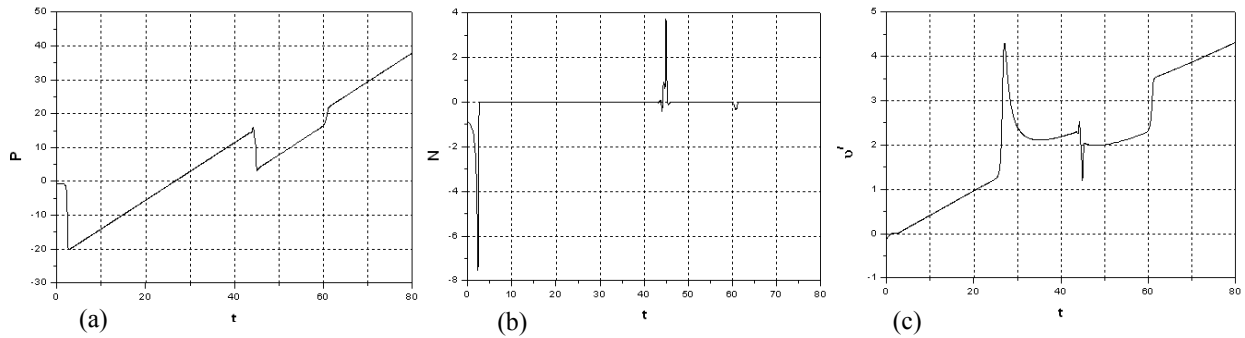


Fig. (4.22): Solutions numériques du système (4.7)-(4.9), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$, $Q = 0.85$.

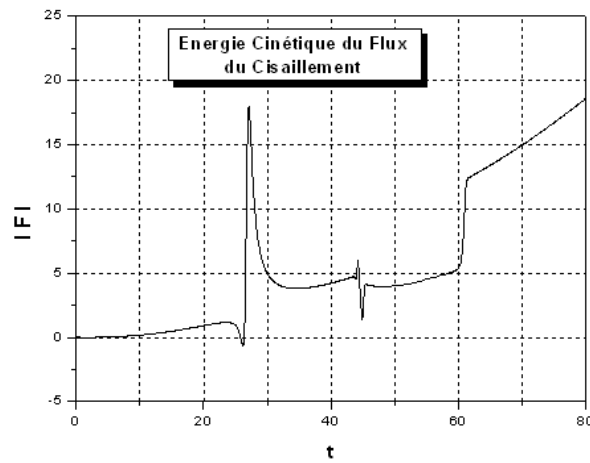


Fig. (4.23): Energie cinétique du flux du cisaillement, $Q = 0.85$.

En effet, la linéarisation du système autour de X_{3eq} donne cette fois ci une matrice carrée où les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives. Donc, le système est asymptotiquement stable et fait apparaître le point d'équilibre comme un foyer asymptotiquement stable. Les solutions numériques, l'énergie cinétique du flux du cisaillement ainsi que l'espace de phase associé seront décrits dans les figures (4.24), (4.25) et (4.26).

$$DF(X_{3eq}) = \begin{pmatrix} -0.1803 & -4.7149 & 0 \\ 0.1803 & -0.1803 & 1.1895 \\ -0.0158 & -0.6774 & 0.0400 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.1001 + 1.2805 i$$

$$\lambda_2 = -0.1001 - 1.2805 i$$

$$\lambda_3 = -0.1204$$

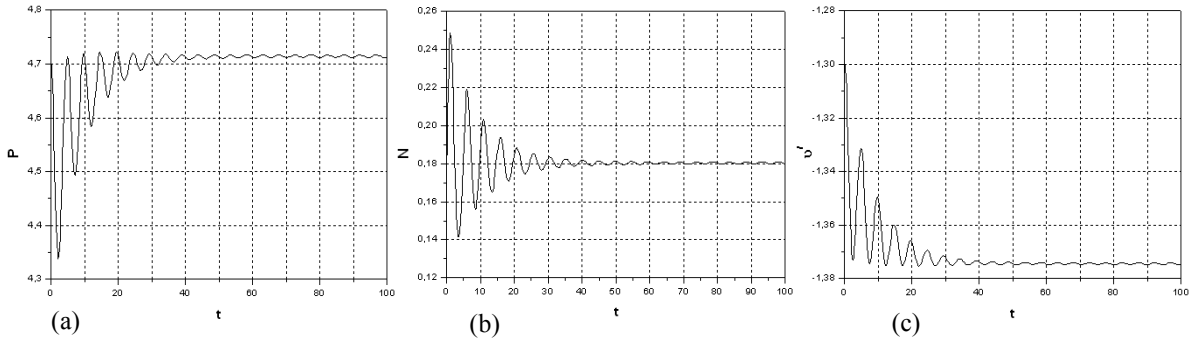


Fig. (4.24): Solutions numériques du système (4.7)-(4.9), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$, $Q = 0.85$.

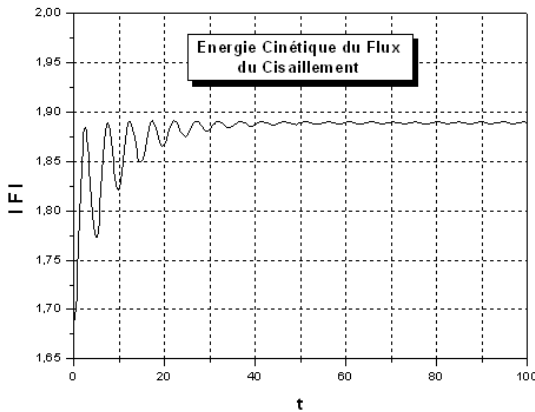


Fig. (4.25): Energie cinétique du flux du cisaillement au voisinage de X_{3eq} , $Q = 0.85$.

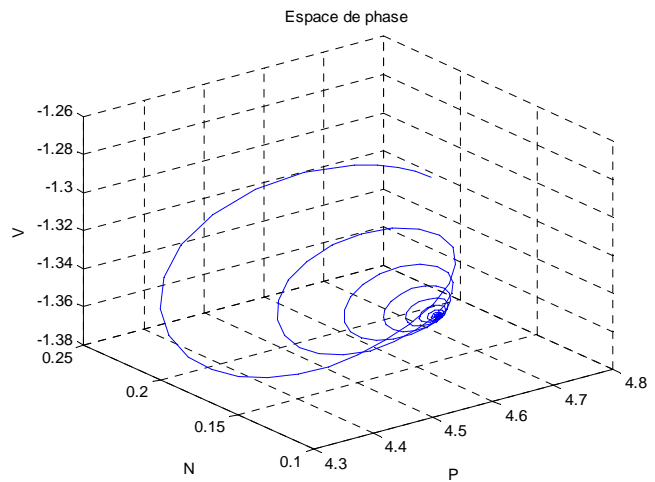


Fig. (4.26): Espace de phase au voisinage de X_{3eq} , $Q = 0.85$.

4.5.1 Une prédiction non physique

Avant l'identification de la pathologie qui existe encore dans cet ouvrage de bifurcation, il était éclairant de montrer la situation physique ou non physique en considérant les équations (4.7) - (4.9) sur une échelle de temps étendu (ou limité) $\tau = t/\varepsilon$. Dans un système de capacité thermique faible $\varepsilon \ll 1$, $N \approx N_0$ et $v' \approx v_0$. Ainsi, la dynamique devient quasi-unidimensionnelle: le sous-système d'énergie potentielle montre que les sous-systèmes de l'énergie cinétique sont presque constants, et

$$P \approx [P_0 - Q/(N_0\gamma)] \times \exp(-N_0\gamma\tau) + Q/(N_0\gamma).$$

En temps réel, comme $\varepsilon dP/dt \rightarrow 0$, nous avons $P \approx Q/(\gamma N)$; l'énergie potentielle est réciproquement liée à la dynamique de l'énergie cinétique.

Ce qui est anormale pour ces faibles capacités, c'est de trouver que la puissance d'entrée Q reflue vers zéro mais le flux de cisaillement peut se développer d'une manière irréaliste. Il est attendu que l'autre bifurcation de Hopf dans la figure 4.4 (b) est capturée par des valeurs propres purement imaginaires si $(Q, v') = (0, \infty)$. Les expériences numériques montrent qu'avec la diminution de ε , la bifurcation de Hopf se déplace vers le haut le long de la courbe et la branche de cycles limites se rétrécit. Les valeurs propres complexes conjuguées purement imaginaires qui définissent la bifurcation de Hopf se rapprochent de zéro. Ce scénario est illustré dans la figure (4.27); on considère qu'on devra garder à l'esprit que, ordinairement ε peut être variée sans le moindre changement de la position des points d'équilibre.

Il semblerait, donc, que certains problèmes physiques, sont manquants à partir du modèle.

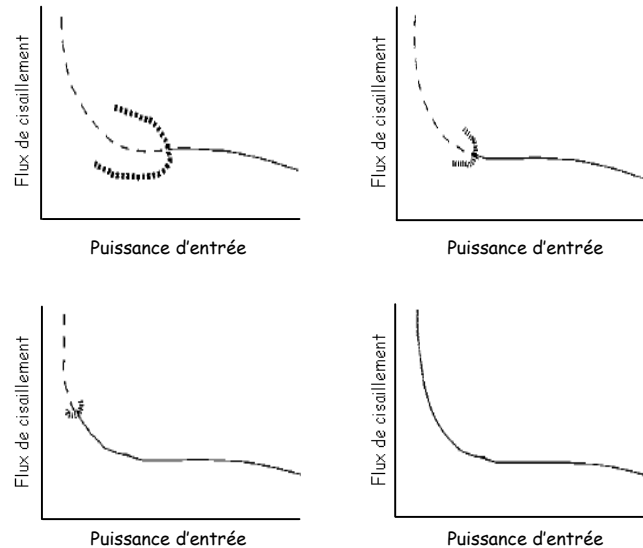


Fig. (4.27): Schéma instantané, vu de gauche à droite de la branche de flux de cisaillement élevé de la figure 4.4(b), tel que le paramètre de capacité thermique ε est diminué.

4.5.2 Présence d'une singularité piégée

Ce qui n'est pas montré dans la figure 4.4 (car une échelle logarithmique Q est utilisé pour un objectif d'explication) est la branche des équilibres qui existe à $Q = 0$, où $N = 0$ et $v' = (P^{3/2}\varphi)/b$; il est montré dans la figure 4.28.

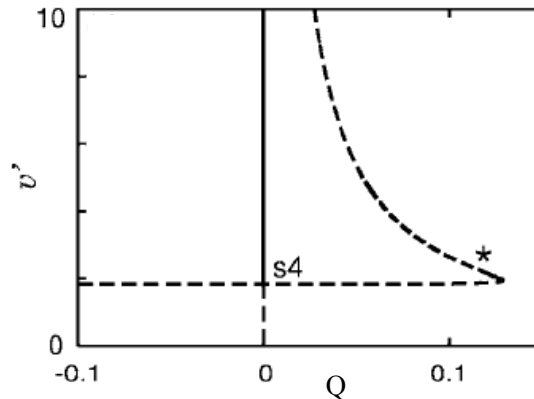


Fig. (4.28): Solutions d'équilibre pour le système des équations (4.7)-(4.9) décrivant la branche à $Q = 0$. $\varphi = 0.08$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$, $b = 1$, $a = 0.3$, $\alpha = 2.4$ et $\varepsilon = 1$

Dans ces diagrammes, où les enveloppes d'amplitude dans le domaine d'oscillation ne sont pas tracées pour éclaircir plus les aperçus généraux, les bifurcations de Hopf sont marquées par des étoiles. Cette branche pourrait être insignifiante et de petite échelle, sauf s'il existe une singularité dégénérée sur elle-même (s4) de telle façon que les branches caractérisées par un N positive ou nul se croisent. La singularité s4 sera décrite comme " piégée " ou persistante parce qu'elle n'est pas dissoute (libérée ou dépliée), et ceci en faisant varier n'importe quels paramètres qui sont déjà présents dans le modèle (voir la section 4.3). Tous ces aspects nous permettent de dire qu'un terme supplémentaire sera nécessaire pour parvenir à un bon déroulement du s4, pour lequel il doit y avoir une physique de contrepartie.

4.5.3 Génération des turbulences par le flux de cisaillement

La clé de la libération (ou de déploiement) de s4 consiste à connaître que l'énergie cinétique dans les structures à grande échelle provoque certainement la croissance de la turbulence à petite échelle, et vice-versa [3]. Dans un flux, et puisque le plasma est magnétisé, les éléments de fluide découvrent localement un champ de vitesse qui est fortement à deux dimensions, il y aura une forte tendance pour l'énergie turbulente dans les plus petites échelles pour le transfert vers les structures cohérentes de grande échelle tels que les flux de cisaillement (une chute d'énergie inverse [19]), mais le taux net de transfert d'énergie aux nombre d'onde élevée (ou chute de Kolmogorov) n'est pas négligeable. Le flux réel existant entrevoit en général un champ de vitesse à trois dimensions, même si les champs de vitesse à deux dimensions peuvent localement dominer. Cet aspect n'est pas reflété dans les équations (4.10) et (4.11) et dans le modèle d'ordre

réduit dérivé des équations (4.7)-(4.9) qui décrivent un flux idéal sous l'effet uniquement d'un champ de vitesse à deux dimensions. Ce phénomène est analogue à une catastrophe ultraviolette nommée par le physicien autrichien Paul Ehrenfest, dans la physique des écoulements ce qui est analogue à une catastrophe ultraviolette dans la physique des écoulements (est une prédiction contrefactuelle des théories classiques de la physique) lorsque le transfert d'énergie vers les nombres d'onde élevées est négligée, correspond à une singularité dégénérée piégée (ou persistante) dans la structure mathématique du modèle. La singularité piégée s_4 est dépliée (libérée) sans problème en incluant un simple, un conservateur ou un taux de transfert de retour entre le flux de cisaillement et les sous-systèmes de la turbulence:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma NP - \alpha v'^2 N - \beta N^2 + \kappa v'^2 \quad (4.12)$$

$$2 \frac{dv'}{dt} = \alpha v' N - \mu(P, N) v' + \varphi - \kappa v' \quad (4.13)$$

Le modèle amélioré se compose des équations (4.7), (4.12) et (4.13), et le diagramme de flux d'énergie correspondant est indiqué dans la figure (4.29). À ce stade, le coefficient de taux de transfert κ n'a pas besoin d'être identifié avec des instabilités fluides, telle que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. A ce niveau macroscopique de la modélisation, il peut être traité comme un paramètre sans dimension qui fournit un modèle simple pour la physique globale des flux d'énergie de nombre d'onde élevée.

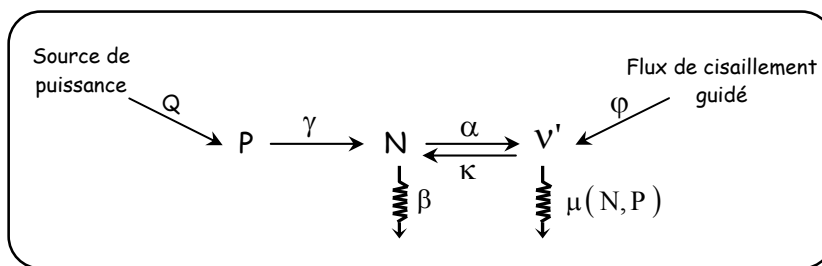


Fig. (4.29): Schéma du flux d'énergie comprend maintenant un canal de transfert d'énergie à petite échelle à partir du flux de cisaillement vers les sous-systèmes turbulents.

La façon et les conséquences du comportement de s_4 peuvent être appréciées de la figure (4.30).

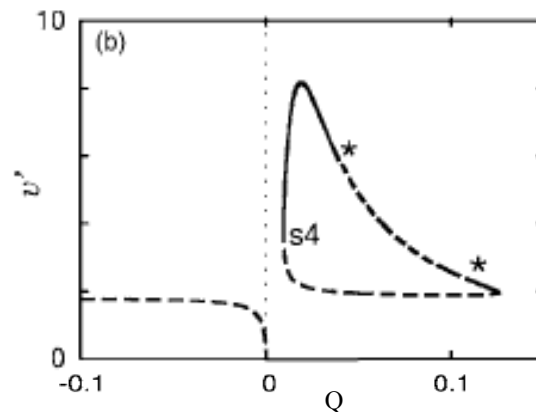


Fig. (4.30): Solutions d'équilibre pour le système des équations (4.7), (4.12) et (4.13).
 $\kappa = 0.001$, $\varphi = 0.08$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$, $b = 1$, $a = 0.3$, $\alpha = 2.4$ et $\varepsilon = 1$

En comparant la structure des figures (4.28) et (4.30), on arrive à des conclusions intéressantes: les équilibres non physiques et les singularités ne devraient pas être ignorés ou rejetés parce qu'ils peuvent jouer un rôle important dans la détermination de la structure des bifurcations dans le domaine physique.

Le comportement de s_4 utilisant une petite valeur positive κ dans la figure (4.30) crée nécessairement une valeur maximale finie pour le flux de cisaillement, car s_4 est un point tournant, ces conditions incitent à éliminer la situation non physique de la croissance illimitée du flux de cisaillement pour une puissance d'entrée décroissante. A cet effet, un exemple d'application sera proposé pour justifier ces remarques. La figure (4.31) prouvent que le flux de cisaillement (à l'équilibre) augmente puis diminue. Ce comportement confirme que la dérivée première de la fonction qui représente la variation de v' en fonction de Q change de signe. Pour des valeurs données des autres paramètres, le déroulement crée un espace finie (île) de solutions des états d'équilibre. Nous avons constaté aussi que cette branche du diagramme correspond à des solutions numériques positives.

Il faut noter également selon la figure (4.30) l'apparition d'une autre bifurcation de Hopf. L'affirmation numérique indique que cette bifurcation de Hopf est piégée pour $(Q, v') = (0, \infty)$. Dans les figures (4.28) et (4.4.a), les parties réelles des deux valeurs propres complexes conjuguées approchent de zéro lorsque que $Q \rightarrow 0$. C'est dans ce contexte qu'un exemple d'étude

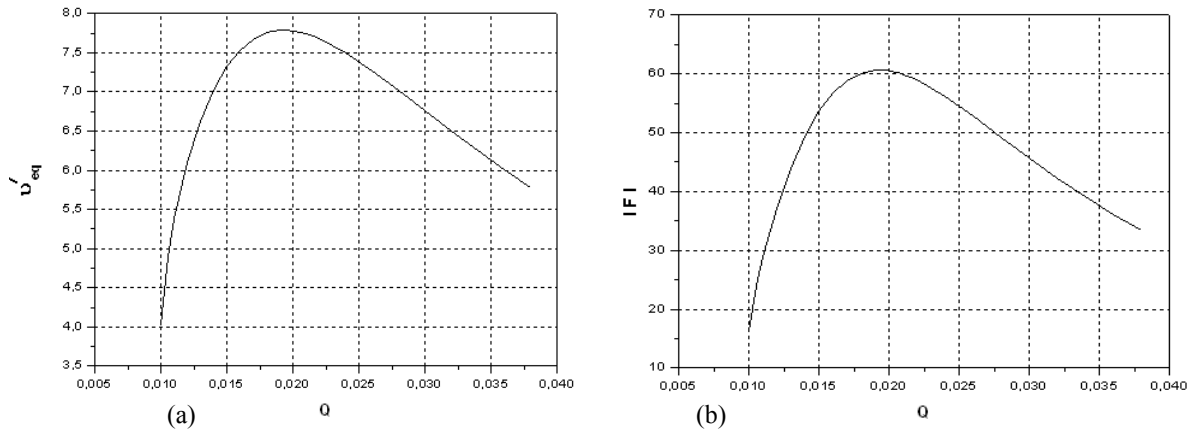


Fig. (4.31): Solutions d'équilibre du système des équations (4.7), (4.12) et (4.13). (a): v'_{eq} en fonction de Q . (b): F_{eq} en fonction de Q . $\kappa = 0.001$, $\varphi = 0.08$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$

de cas sera proposé pour confirmer ces résultats en utilisant les mêmes paramètres donnés dans la figure. En choisissant une valeur de Q qui égale à 10^{-5} , on trouve trois points d'équilibre:

- **Au voisinage de X_{1eq}**

Le calcul de la linéarisation classique du système (4.7)-(4.9) autour de $X_{1eq}(3.1610^{-3}, 3.1610^{-3}, 14.2310^6)$ donne:

$$DF(X_{1eq}) = \begin{pmatrix} -3.162277 \cdot 10^{-3} & -3.162277 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 3.162277 \cdot 10^{-3} & -3.162277 \cdot 10^{-3} & -2.15935 \cdot 10^{-7} \\ 18.973362 & 1.706445 \cdot 10^{-5} & -2.8117037 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres correspondent à:

$$\lambda_1 = -3.16228 \cdot 10^{-3} + 3.16228 \cdot 10^{-3} i$$

$$\lambda_2 = -3.16228 \cdot 10^{-3} - 3.16228 \cdot 10^{-3} i$$

$$\lambda_3 = -2.8117 \cdot 10^3$$

Ces résultats montrent que le point d'équilibre et le système sont asymptotiquement stables. Toutes les solutions relatives sont représentées dans les figures (4.32) et (4.33).

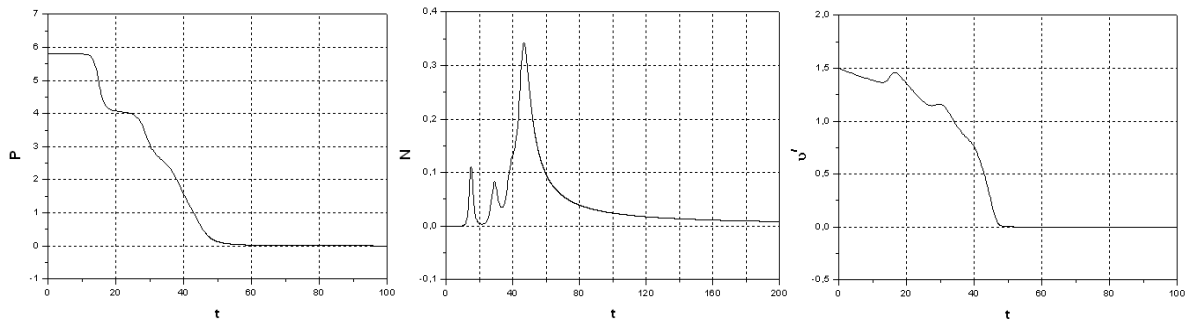


Fig. (4.32): Solutions numériques du système (4.7)-(4.9), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$, $Q = 10^{-5}$.

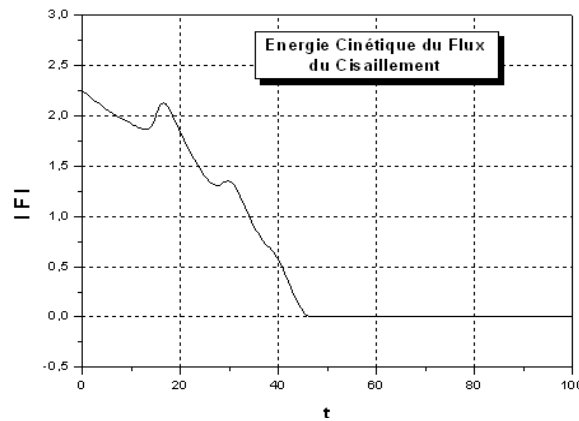


Fig. (4.33): Energie cinétique du flux du cisaillement au voisinage de X_{1eq} , $Q = 10^{-5}$.

▪ **Au voisinage de X_{2eq}**

La linéarisation classique prédit cette fois ci un système et un point d'équilibre instables. La matrice dérivée au sens de Frechet est donnée par:

$$DF(X_{2eq}) = \begin{pmatrix} -1.239 \cdot 10^{-6} & -8.0687 & 0 \\ 1.239 \cdot 10^{-6} & 5.641 \cdot 10^{-4} & -1.0904 \cdot 10^{-5} \\ 7.435 \cdot 10^{-3} & -1.889 \cdot 10^{-2} & -2.181 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = -2.03187 \cdot 10^{-2}$$

$$\lambda_2 = -5.12334 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda_3 = 4.18947 \cdot 10^{-3}$$

Les courbes des figures (4.34) et (4.35) représentent respectivement les solutions du système (4.7)-(4.9) pour des conditions initiales autour de $X_{2eq}(8.0687, 0.123910^{-5}, 1.8335)$ ainsi que l'énergie cinétique du flux du cisaillement correspondante.

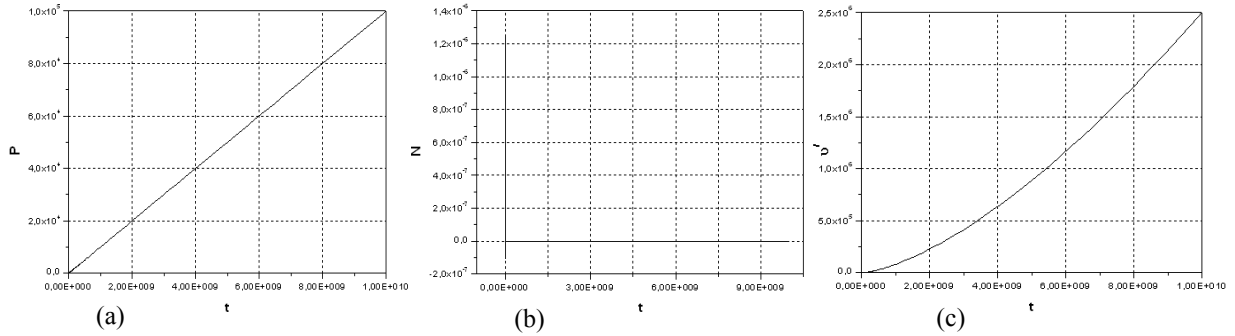


Fig. (4.34): Solutions numériques du système (1-3), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$, $Q = 10^{-5}$.

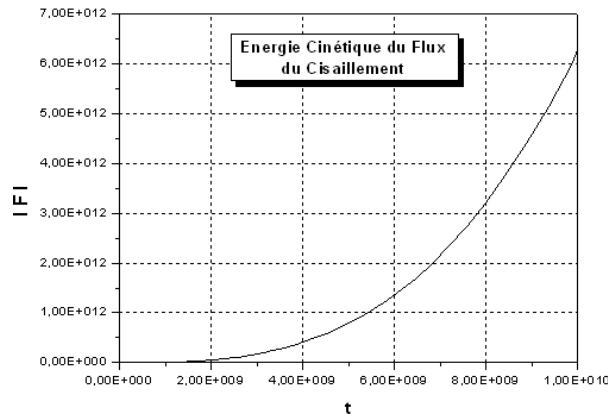


Fig. (4.35): Energie cinétique du flux du cisaillement au voisinage de X_{1eq} , $Q = 10^{-5}$.

▪ **Au voisinage de X_{3eq}**

De même, la linéarisation au voisinage de $X_{3eq}(0.1706710^0, 0.5859310^{-14}, 26666.667)$ permet de prédire que le système et le point d'équilibre sont instables. La matrice dérivée au sens de Frechet est donnée par:

$$DF(X_{3eq}) = \begin{pmatrix} -5.859 \cdot 10^{-15} & -1.7067 \cdot 10^9 & 0 \\ 5.859 \cdot 10^{-15} & -9.333 \cdot 10^{-2} & -7.500 \cdot 10^{-10} \\ -2.3437 \cdot 10^{-11} & -6.827 \cdot 10^{12} & -1.500 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1.4211 \cdot 10^{-14}$$

$$\lambda_2 = -71.6009$$

$$\lambda_3 = 71.5076$$

Les solutions P , N et v' du système (4.7)-(4.9) sont tracées dans la figure (4.36) tandis que le comportement de l'énergie cinétique du flux du cisaillement est représenté dans la figure (4.37).

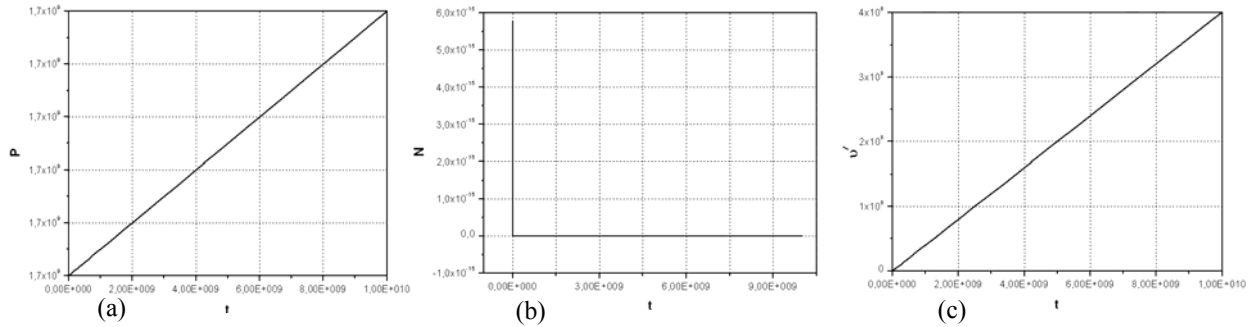


Fig. (4.36): Solutions numériques du système (1-3), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$, $Q = 10^{-5}$.

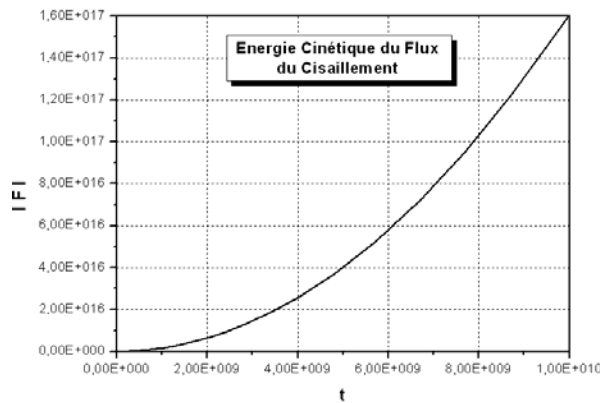


Fig. (4.37): Energie cinétique du flux du cisaillement au voisinage de X_{3eq} , $Q = 10^{-5}$.

Le terme de dépliement $\kappa v'^2$ supprime la solution qui donne une turbulence nulle pour également une puissance d'entrée nulle. Il indique que même en absence de l'énergie cinétique du flux de cisaillement et de la conversion d'énergie du gradient du potentiel à la turbulence, quelques turbulences sont générées parce que le flux de cisaillement direct efficace φ est en général différent de zéro. Dans ce cas, l'évolution du système se gouverne par ces simples équations

$$\frac{dN}{dt} = \kappa v'^2 - \beta N^2 \quad (4.14)$$

$$2 \frac{dv'}{dt} = \varphi - \kappa v' \quad (4.15)$$

L'origine physique du transfert d'énergie à partir de flux de cisaillement à la turbulence peut être considérée comme une instabilité tertiaire (difficilement accessible à la théorie) qui augmente d'une façon monotone avec l'amplitude du flux du cisaillement, qui en général, peut être sensibles à de nombreux facteurs comme le cisaillement magnétique, la courbure toroïdale, et le contexte des gradients thermiques [21] (figures (4.38) et (4.39)).

C'est un système qui possède deux points d'équilibre: $X_{1eq} \left(\frac{\varphi}{\beta \kappa} \sqrt{\beta \kappa}, \frac{\varphi}{\kappa} \right)$ et $X_{2eq} \left(-\frac{\varphi}{\beta \kappa} \sqrt{\beta \kappa}, \frac{\varphi}{\kappa} \right)$

La matrice jacobienne du système est donné par:

$$DF (X_{eq}) = \begin{bmatrix} -2 \beta N_{eq} & 2 \kappa v'_{eq} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} \end{bmatrix}$$

Si on veut calculer les valeurs propres de $DF (X_{eq})$, il suffit de résoudre l'équation suivante:

$$\det [DF(X_{eq}) - \lambda I] = 0$$

I est la matrice unitaire $I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc, le problème consiste à résoudre l'équation caractéristique suivante:

$$(2\beta N + \lambda) \left(\frac{\kappa}{2} + \lambda \right) = 0$$

On trouve que:

$$\lambda_1 = -\frac{\kappa}{4}$$

$$\lambda_2 = -2 \beta N_{eq}$$

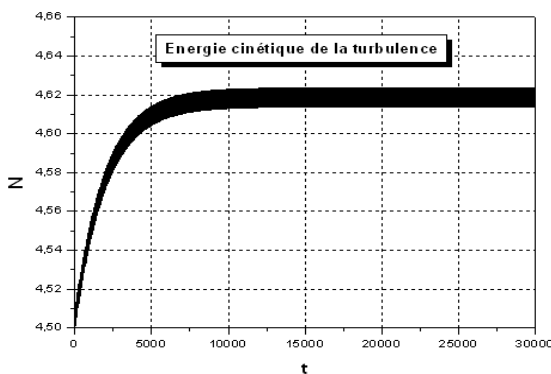


Fig. (4.38): Energie cinétique de la turbulence $N = f(t), \beta = 0.3, \kappa = 0.001, \varphi = 0.08,$

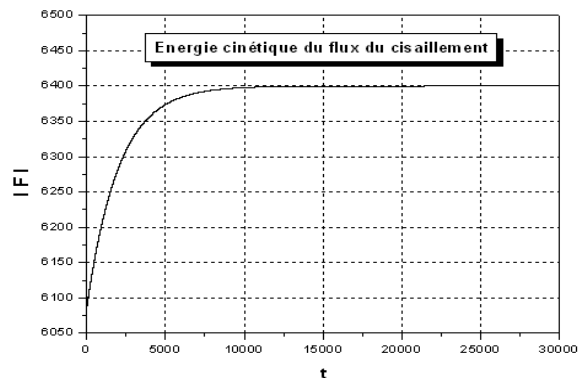


Fig. (4.39): énergie cinétique du flux du cisaillement $|F| = f(t), \beta = 0.3, \kappa = 0.001, \varphi = 0.08,$

Cette simple étude nous permet de prouver que x_{1eq} est un nœud asymptotiquement stable, donc, le système est évidemment asymptotiquement stable autour de x_{1eq} puisque les valeurs propres sont des valeurs réelles strictement négatives. Or que le même système est instable au voisinage de x_{2eq} puisque les valeurs propres sont des valeurs réelles de signe opposée, ce qui prédit cette fois-ci que x_{2eq} est un point selle (col).

Pour le déroulement de la singularité dégénérée s4, le coefficient κ peut être considéré comme le premier terme d'une expansion, dans laquelle le deuxième terme et plus (qui ne doivent pas être petits) dépendent des autres facteurs: $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1(\xi) + \dots$. Comme s4 est entièrement délimité par $\kappa = \kappa_0$, l'implication de nouveaux termes n'introduit pas de nouveaux changements qualitatifs locaux à s4.

On peut suggérer des autres paramètres pour la description du comportement physique de s4. En effet, la plus simple perturbation qui supprime la dégénérescence est une constante, tel que la turbulence extérieure conduite c , qui ramène l'équation (4.8) sous la forme suivante:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma NP - \alpha v'^2 N - \beta N^2 + c \quad (4.16)$$

A cet effet, ce déploiement n'apporte aucune amélioration au modèle parce qu'elle ne parvient pas à limiter la croissance du flux de cisaillement. Mais, il enlève le point tournant s4, ainsi que la dégénérescence d'ordre supérieure de sorte qu'aucun flux de cisaillement maximal n'est créé. Le diagramme de bifurcation partielle pour les équations (4.7), (4.16) et (4.9) est donné dans la figure (4.40).

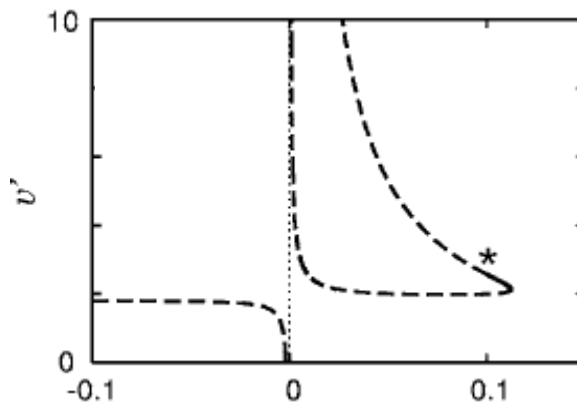


Fig. (4.40): Solutions d'équilibre pour le système des équations (4.7), (4.16) et (4.9), $c = 0.005$, $\varphi = 0.08$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$, $b = 1$, $a = 0.3$, $\alpha = 2.4$ et $\varepsilon = 1$

Ainsi, le flux de cisaillement peut encore augmenter sans limite lorsque la puissance d'entrée sera annulée. Le constant c peut certainement inclus dans l'équation (4.12), ainsi que le taux de transfert d'énergie conservatrice $\kappa v'^2$, mais il ne produit aucun effet qualitatif supplémentaire sur la structure de bifurcation du système.

On peut également proposer la délibération de s_4 en incluant de nouveaux termes dans le flux de cisaillement ou des équations d'évolution d'énergie potentiel. Tous ces termes peuvent indiquer qu'ils sont qualitativement et localement inefficaces par rapport à s_4 . Par exemple, le terme $-\kappa v'$ peut être introduit seulement dans l'équation (4.9) et uniquement comme un canal dissipatifs:

$$2 \frac{dv'}{dt} = \alpha v' N - [\mu(P, N) + \kappa] v' + \varphi \quad (4.17)$$

On peut constater que cette modification ramène tout simplement un changement quantitatif dans l'hystérésis (figure (4.4.a)) qui est du aux pertes dissipatives du flux de cisaillement.

Si nous visualisons maintenant le diagramme de bifurcation qui donne ses courbes des solutions d'équilibre comme une tranche d'une surface tridimensionnelle de ces solutions où la troisième coordonnée est un deuxième paramètre. En perspective, nous pouvons commencer à comprendre l'espace des paramètres.

4.6 Deux tranches révélant deux régimes d'hystérésis

Dans les figures (4.41) et (4.42), la surface des équilibres est découpée respectivement en $\varphi = 0.083$ et $\varphi = 0.084$. Et dans chaque figure (v', Q) (a) et (N, Q) (b), les tranches sont apposées. Une valeur plus faible de ε par rapport à celle utilisée dans les diagrammes précédents, a été utilisée pour que l'apparition des cycles limites se terminent à des bifurcations de Hopf et forment une enclave oscillatoire stable plutôt que des objets plus exotiques.

Un exemple d'application ($Q = 0.075$ et $\varphi = 0.083$) est retenu pour montrer que les parties réelles négatives des deux valeurs propres complexes conjuguées se rapprochent de 0. Les solutions des équations dynamiques donnent trois points d'équilibre:

$$X_{1eq}(23.8098, 0.00315, 3.3812), X_{2eq}(8.3162, 0.009, 1.9057) \text{ et } X_{3eq}(0.15, 0.4999, 0.005177)$$

L'application de la méthode de la linéarisation classique montre que le système est instable au voisinage de X_{2eq} .

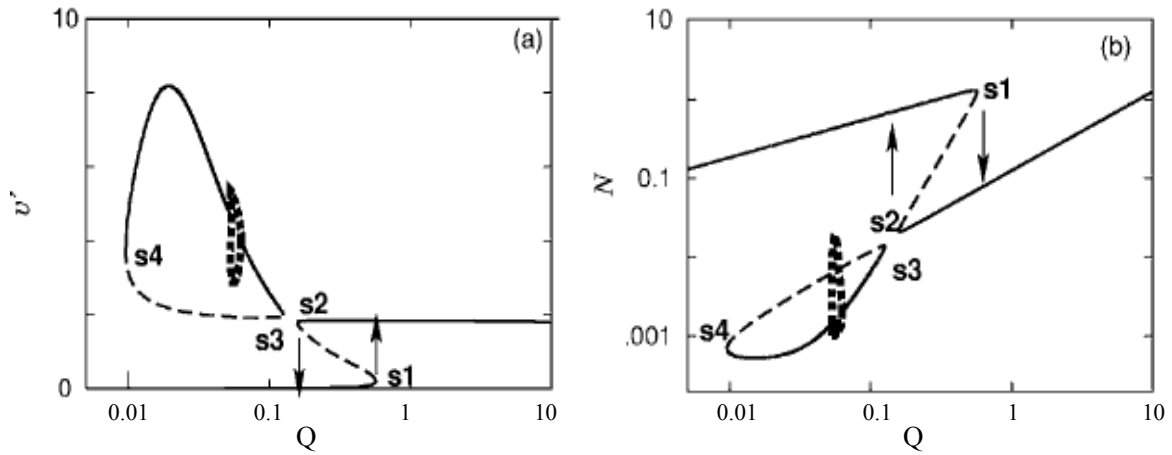


Fig. (4.41): Surface des équilibres découpée en $\varphi = 0.083$, les autres paramètres sont: $\varepsilon = 0.23$, $\kappa = 0.001$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$, $b = 1$, $a = 0.3$, $\alpha = 2.4$

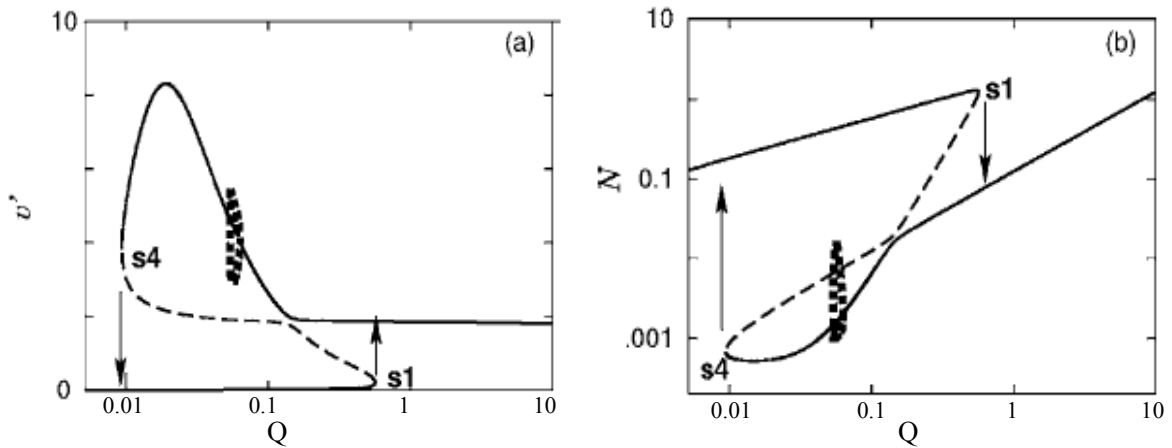


Fig. (4.42): Surface des équilibres découpée en $\varphi = 0.084$, les autres paramètres sont: $\varepsilon = 0.23$, $\kappa = 0.001$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 1$, $b = 1$, $a = 0.3$, $\alpha = 2.4$

Quoique, le même système prédit un nœud asymptotiquement stable autour de X_{3eq} . Le calcul de la matrice dérivée au sens de Frechet donne:

$$DF(X_{1eq}) = \begin{pmatrix} -1.3696 \cdot 10^{-2} & -1.0352 \cdot 10^2 & 0 \\ 3.15 \cdot 10^{-3} & -3.6301 & -4.4361 \cdot 10^{-2} \\ -6.8088 \cdot 10^{-4} & -8.0184 & -1.2274 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -8.7997 \cdot 10^{-3} + 2.666 \cdot 10^{-2} i$$

$$\lambda_2 = -8.7997 \cdot 10^{-3} - 2.666 \cdot 10^{-2} i$$

$$\lambda_3 = -3.6385$$

On remarque que les parties réelles négatives des deux premières valeurs propres complexes conjuguées tendent vers 0. On peut confirmer de nouveau que ce point d'équilibre est asymptotiquement stable. La figure (4.43) délivre les solutions numériques au voisinage de X_{1eq} , l'énergie cinétique du flux du cisaillement est représentée dans la figure (4.44).

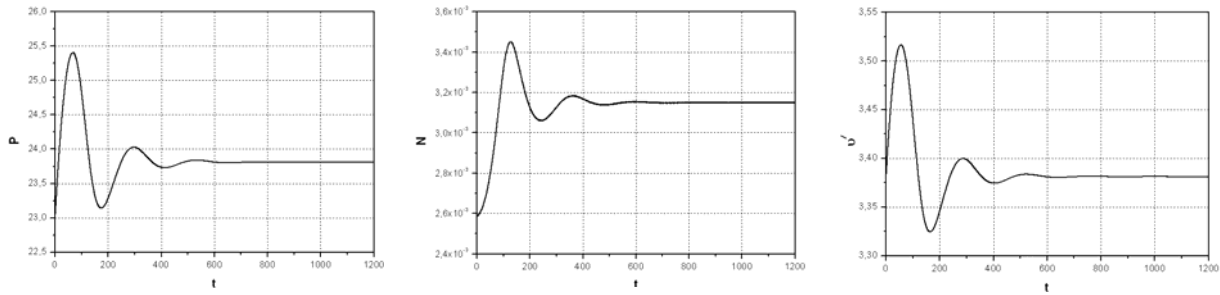


Fig. (4.43): Solutions numériques du système (4.7), (4.12) et (4.13), (a): $P = f(t)$, (b): $N = f(t)$ et (c): $v' = f(t)$, $Q = 0.075$.

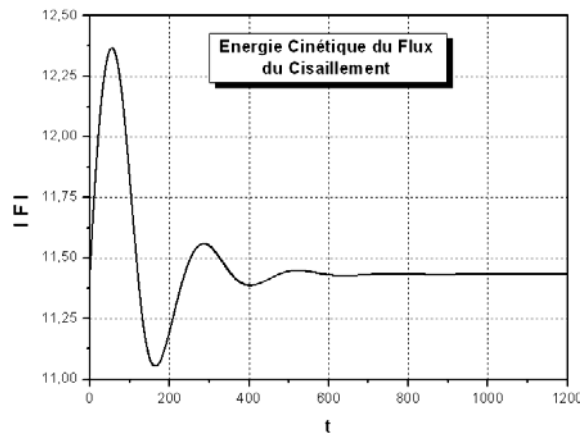


Fig. (4.44): Energie cinétique du flux du cisaillement, $Q = 0.075$.

Ces deux diagrammes de bifurcation illustrent la conséquence physique la plus dramatique pour le déploiement de la singularité piégée s_4 . On peut suggérer aussi quelques régimes opérationnels possibles. Comme dans la figure (4.4), une transition se produit à s_1 . Alors que maintenant et pour des raisons évidentes, elle est désignée comme une branche intermédiaire; où la puissance d'entrée reflue quasi statiquement.

Dans la figure (4.41), le flux de cisaillement v' devient constant (a) or que la turbulence N diminue (b) jusqu'au point tournant s_2 (la dernière transition se produira à ce niveau). La branche contenant les points tournants s_3 et s_4 et la petite enclave des cycles de limite peut être atteinte

que par une transition, soit par un saut non quasistatique dans le deuxième paramètre ou à partir de l'évolution des conditions initiales au sein de la zone d'attraction appropriée.

La dynamique est radicalement différente dans la figure (4.42), les deux branches se rapprochent pour former un point, tandis que s_3 et s_4 disparaissent à une bifurcation transcritique. On constate que le flux de cisaillement commence à augmenter (a) et la turbulence diminue plus fortement (b). Le système transite à travers un domaine de solutions oscillantes, où la turbulence et le flux de cisaillement augmentent et diminuent en dehors de la phase avant d'émerger un état de repos "super-suppression". Le long de ce segment, le flux de cisaillement passe par un maximum puis diminue, alors que le niveau de la turbulence atteint un minimum puis augmente progressivement. La transition de retour en s_4 se produit pour une très faible puissance d'entrée par rapport à s_2 dans la figure (4.41).

Même d'après les deux tranches présentées ici, nous pouvons voir qu'il ya beaucoup de choix et des arrangements à faire dans la conception et l'exploitation d'une expérience. De toute évidence, les économies de coûts en termes de puissance d'entrée sont énormes si le système est transité vers s_1 puis autorisé à rouler sur les larges hystérésis dans le domaine de la super-suppression selon la figure (4.42). Cependant, les cycles limites ne sont pas si bien comportés si la capacité thermique est beaucoup plus élevée ou le système est efficacement moins dissipatif: leur comportement devient tridimensionnel avec certains événements tels que: la période de doublement, les bifurcations tores, et / ou la branche peut se développer d'une façon homoclinique. D'autre part, dans le comportement de la boucle d'hystérésis présentée sur la figure (4.41), qui est moins risqué dynamiquement, mais plus coûteux à commander en termes de puissance d'entrée, l'amélioration de confinement n'est pas aussi bonne.

4.7 Conclusion

Un modèle dynamique amélioré pour les transitions du confinement L-H qui inclut un terme de taux pour réduire la taille du flux d'énergie a été étudié. Dans ce chapitre, nous avons réalisé des simulations numériques pour déterminer l'évolution du flux de cisaillement en utilisant la méthode de Jacobi qui permet d'étudier la stabilité du système. Dans ce travail, nous avons comparé aussi nos solutions avec les résultats présentés sur les diagrammes de bifurcation

obtenus par R. Ball et P. W. Terry durant l'expérience. Nous arrivons donc à la conclusion selon laquelle:

- Le système transite d'un état stable qui correspond à une diminution du flux de cisaillement en fonction de la puissance d'entrée à un état instable en faisant un petit incrément dans la puissance d'entrée Q . En d'autres termes, la croissance de la puissance d'entrée donne naissance à une turbulence et par conséquent il y aura une augmentation du flux de cisaillement qui va supprimer la turbulence.
- La transition L-H est un phénomène de bifurcation, dont il peut être associé à un cycle d'hystérésis ou un cycle oscillatoire.
- Les équilibres non physiques et les singularités ne devraient pas être ignorés ou rejetés parce qu'ils peuvent jouer un rôle important dans la détermination de la structure des bifurcations dans le domaine physique.
- La structure de bifurcation du modèle amélioré obtenu indique que le flux du cisaillement peut effectivement croître lorsque la puissance d'entrée est retirée avec super suppression simultanée à la turbulence.
- En absence de la conversion d'énergie de gradient du potentiel à la turbulence et l'énergie cinétique du flux de cisaillement, quelques turbulences sont générées parce que le flux de cisaillement direct efficace φ est en générale non nul.

Références

- [1] F. Wagner et al, " Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak ", Phys. Rev. Lett. 49, 1408 (1982).
- [2] B. Lehnert, " Short-Circuit of Flute Disturbances at a Plasma Boundary ", Phys. Fluids 9, 1367 (1966).
- [3] P. W. Terry, " Suppression of Turbulence and Transport by Sheared Flow ", Reviews of Modern Physics, 72, 109 (2000).
- [4] H. Biglari, P.H. Diamond, P.W. Terry, " Influence of Sheared Poloidal Rotation on Edge Turbulence ", Phys. Fluids B 2, 1 (1990).
- [5] A.B. Hassam, T.M. Antonsen, Jr., J.F. Drake, and C.S. Liu, " Spontaneous Poloidal Spin-up of Tokamaks and the Transition to H Mode ", Phys. Rev. Lett. 66, 309 (1991).
- [6] P.H. Diamond, Y.-B. Kim, " Theory of Mean Poloidal Flow Generation by Turbulence ", Phys. Fluids B 3, 1626 (1991).

-
- [7] K.C. Shaing and E.C. Crume, Jr., " Bifurcation Theory of Poloidal Rotation in Tokamaks: A Model for the L-H Transition ", *Phys. Rev. Lett.* 63, 2369 (1989).
- [8] G.M. Staebler, R.R. Dominguez, " Turbulent Viscosity Bifurcation and the H-Mode ", *Nucl. Fusion* 33, 77 (1993).
- [9] M. Golubitsky and D. G. Schaeffer, " Singularities and Groups in Bifurcation Theory ", Springer, New York, 1985), Vol. 1.
- [10] V. I. Arnold, " Mathematical Methods of Classical Mechanics ", translated by K. Vogtmann and A. Weinstein (Springer, New York, 1978).
- [11] R. Ball, " Fairy Rings of Mushrooms ", in *Encyclopedia of Nonlinear Science*, edited by A. Scott (Taylor & Francis, New York, 2005).
- [12] R. Ball, R. L. Dewar, and H. Sugama, " Metamorphosis of Plasma Turbulence–Shear-Flow Dynamics Through a Transcritical Bifurcation ", *Phys. Rev. E* 66, 066408 (2002).
- [13] H. R. Strauss, " Reduced MHD in Nearly Potential Magnetic Fields H.R. Strauss ", *Phys. Fluids* 20, 1354 (1977).
- [14] B. A. Carreras, L. Garcia, and P. H. Diamond, " Study of Resistive Pressure-Gradient-Driven Turbulence ", *Phys. Fluids* 30, 1388 (1987).
- [15] H. Sugama and M. Wakatani, " A Transport Study for Resistive Interchange Mode Turbulence Based on a Renormalized Theory ", *J. Phys. Soc. Jpn.* 57, 2010 (1988).
- [16] H. Sugama and W. Horton, " Shear Flow Generation by Reynolds Stress and Suppression of Resistive G Modes ", *Phys. Plasmas* 1, 345 (1994).
- [17] H. Sugama and W. Horton, " Center Manifold Approach to the Reduced Magnetohydrodynamic Bifurcations with Diffusive Magnetic Field Lines ", *Phys. Plasmas* 1, 2220 (1994).
- [18] H. Sugama and W. Horton, " L-H Confinement Mode Dynamics in Three-Dimensional State Space ", *Plasma Phys. Controlled Fusion* 37, 345 (1995).
- [19] R. H. Kraichnan and D. Montgomery, " Two-Dimensional Turbulence ", *Rep. Prog. Phys.* 43, 547 (1980).
- [20] R. Ball, *Proc. R. Soc. London*, " The Origins and Limits of Thermal Steady–State Multiplicity in the Continuous Stirred Tank Reactor ", *Ser. A* 455, 141 (1999).
- [21] B. N. Rogers, W. Dorland, and M. Kotschenreuther, " Generation and Stability of Zonal Flows in Ion-Temperature-Gradient Mode Turbulence ", *Phys. Rev. Lett.* 85, 5336 (2000).

Conclusion Générale

Conclusion générale

Le transport anormal de la chaleur dans les Tokamaks a pour origine l'état turbulent dans lequel se trouve le plasma. Cette turbulence est générée par de forts gradients de densité, de température, etc...La compréhension aussi complète que possible des différents mécanismes à l'origine de ce transport est indispensable pour une meilleure prédiction du confinement de l'énergie dans les futures machines.

Dans le but d'avoir une meilleure prédiction du confinement de l'énergie, trois étapes ont été considérées. On s'est intéressé à l'étude des instabilités de gradients de température ITG au cœur de plasma en utilisant un modèle de faible degré de liberté composé de dix huit équations différentielles ordinaires. Les comparaisons de nos résultats permettent de conclure que:

- La génération du flux de cisaillement conduit à la suppression de la turbulence ITG.
- La réduction progressive du flux de cisaillement est due à la viscosité.
- La réduction du flux de cisaillement provoque une croissance rapide des modes ITG.

Il convient de noter donc que le rôle de la viscosité est essentiel pour l'apparition de l'intermittence. Alors sans viscosité ($\mu = 0$), pas d'intermittence observée. Cependant, avec une viscosité finie, on dit que le système est dans un état d'auto-organisation critique (SOC); la relaxation vers un état d'équilibre est créée lorsque l'énergie des différents états du système dessine une trajectoire complexe, le système peut spontanément évoluer vers une situation plus ordonnée.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié la turbulence des ondes de dérive dans le bord de plasma en utilisant un modèle d'interaction non linéaire de trois modes proposé par Batista et al. Ce modèle est obtenu en introduisant dans le modèle initial proposé par Horton et al les taux de croissance / décroissance pour l'étude de la dynamique résultante. Cette étude a aboutit aux résultats suivants :

- Nous avons constaté que les taux de décroissance des ondes résultantes peuvent être ajustés de façon à produire une grande variété de comportement dynamique, allant d'une périodicité simple au chaos et avec des scénarios de différentes transitions.

- Nous avons conclu que la variation de taux de décroissance des ondes résultantes dans un intervalle étroit est responsable de la transition à la turbulence.

- D'après les événements discutés, les ondes pompes et résultantes échangent de l'énergie et dépendent fortement de la dynamique du système.

Pour pouvoir contrôler la stratégie du chaos, réduire ou supprimer les faibles turbulences, nous avons utilisé une perturbation de résonance supplémentaire de faible amplitude et nous avons montré en même temps que cette stratégie peut stabiliser les orbites chaotiques avec des amplitudes de contrôle très faibles qui s'avère être un élément intéressant du point de vue expérimental. Plusieurs remarques sont mises en point.

- Dans notre procédure de contrôle, une perturbation de résonance est utilisé que l'on a considérée qu'elle provient des modes non inclus dans les trois modes de troncature. Dans ce sens, notre perturbation est intrinsèque au système et ne peut pas être facilement ajustée de manière à choisir une orbite de petite période pour la dynamique contrôlée.

- La suppression du chaos est possible par le biais des résonances intrinsèques avec de petites amplitudes.

- Pour une meilleure compréhension de la description de la turbulence d'onde de dérive au bord de plasma, il faut un très grand nombre de ces modes.

Dans la dernière partie, nous avons étudié le phénomène de la suppression de la turbulence dans les plasmas de fusion confinés. Pour cela, un modèle de dynamique amélioré pour les transitions du confinement L-H a été discuté en comparant nos résultats de la simulation numérique avec les résultats présentés sur les diagrammes de bifurcation obtenus par R. Ball et P. W. Terry durant l'expérience. L'étude de la stabilité du système par la méthode de Jacobi est évidemment effectuée pour entamer l'aspect qualitatif. Nous arrivons donc à la conclusion selon laquelle:

- Le système transite d'un état stable qui correspond à une diminution du flux de cisaillement en fonction de la puissance d'entrée à un état instable en faisant un petit incrément dans la puissance d'entrée Q . En d'autres termes, la croissance de la puissance d'entrée donne naissance à une turbulence et par conséquent il y aura une augmentation du flux de cisaillement qui va supprimer la turbulence.

- La transition L-H est un phénomène de bifurcation, dont il peut être associé à un cycle d'hystérésis ou un cycle oscillatoire.

- Les équilibres non physiques et les singularités ne devraient pas être ignorés ou rejetés parce qu'ils peuvent jouer un rôle important dans la détermination de la structure des bifurcations dans le domaine physique.
- La structure de bifurcation du modèle amélioré obtenue indique que le flux du cisaillement peut effectivement croître lorsque la puissance d'entrée est retirée avec une suppression simultanée à la turbulence.
- En absence de la conversion d'énergie de gradient du potentiel à la turbulence et l'énergie cinétique du flux de cisaillement, quelques turbulences sont générées parce que le flux de cisaillement direct efficace φ est en générale non nul.

Le travail entrepris dans cette thèse a ouvert une direction de recherche très intéressante qui mérite d'être approfondie, en particulier :

- D'autres travaux restent à faire pour évaluer l'utilité du modèle à trois modes de Batista et d'autres pour l'équation des ondes de dérives amorties, en comparant avec les modèles de la turbulence pleinement développée.
- Historiquement, l'instabilité la plus étudiée a été celle générée par le gradient de température ionique ITG puisque la plupart des Tokamaks à travers le monde chauffent préférentiellement cette espèce. Cependant, elle ne rend pas compte des pertes de chaleur par le canal électronique même lorsqu'elle est associée à l'instabilité liée aux électrons piégés. Il est pourtant crucial de bien comprendre la nature des pertes électroniques puisque dans un réacteur, les électrons du plasma D-T à l'ignition seront préférentiellement chauffés par les particules alpha (Les particules sont ralenties par les électrons du plasma qui gagnent alors de l'énergie. Si les pertes de chaleur par le canal électronique sont minimales, alors la plupart des électrons peuvent chauffer efficacement les ions par collisions et ainsi assurer la recirculation de l'énergie et donc les réactions de fusion). Il est donc crucial de bien caractériser ces pertes de chaleur électroniques afin de les minimiser.
- Le contrôle du transport turbulent dû à la dérive $E \times B$ dans les plasmas de fusion, constitue un sujet de recherche assez suivi.

Nous souhaitons enfin, que ce travail puisse contribuer à sensibiliser davantage les étudiants sur l'intérêt de ce thème, et que notre modeste thèse trouve sa place dans les laboratoires de notre université.