

Table des Matières

Introduction Générale	5
1 Notions et méthodes classiques d'analyse de la stabilité	9
1.1 Introduction et historique	9
1.2 Stabilité des solutions	10
1.3 Stabilité de l'équilibre	11
1.4 Stabilité globale et stabilité locale	12
1.5 Stabilité asymptotique, Instabilité par linéarisation	13
1.5.1 Théorèmes de linéarisation classique	14
1.6 Equivalence locale de flots	15
1.6.1 Equivalence différentiable à un champ linéaire	16
1.6.2 Equivalence topologique	19
1.6.3 Commentaires	19
1.7 Méthode directe de Lyapunov	20
1.7.1 Théorème de stabilité par la méthode directe	20
1.7.2 Remarque	21
1.7.3 Méthode de l'énergie	22
1.7.4 Fonction de Lyapunov quadratique	23
1.7.5 Construction de Krasofski	24
1.7.6 Application	25
1.7.7 Commentaires	26

1.8	Systèmes conservatifs d'ordre deux	28
2	Propriétés de la D.O. - Influence des conditions initiales.	33
2.1	Introduction	33
2.2	La Dérivée Optimale	34
2.3	La dérivée optimale dans le cas scalaire	36
2.4	Quelques propriétés de la dérivée optimale	37
2.4.1	Cas où F est une somme de termes linéaire et non linéaire	37
2.4.2	Relation entre la dérivée optimale et la linéarisation classique	38
2.4.3	Convergence de la dérivée optimale	38
2.4.4	Dérivée optimale des systèmes découplés	39
2.4.5	Dérivée optimale en une itération	43
2.4.6	Choix de la condition initiale	43
2.4.7	Approximation des éléments de la matrice optimale	49
2.4.8	Vitesse de contraction	50
2.5	Applications	50
2.5.1	Circuit à diode	52
2.5.2	Circuit à jonction Josephson en régime libre	53
2.5.3	Dynamo	57
2.5.4	Commentaires	60
3	Stabilité asymptotique,	
	Instabilité par la dérivée optimale	64
3.1	Introduction	64
3.2	Stabilité dans le cas scalaire	65
3.2.1	Cas où la dérivée au sens de Fréchet n'existe pas	65
3.2.2	Cas hyperbolique	65
3.2.3	Cas non hyperbolique	67
3.2.4	Application	68

3.3	En présence de bifurcations élémentaires	75
3.3.1	Bifurcation point selle-noeud	75
3.3.2	Bifurcation transcritique	76
3.3.3	Bifurcation fourche	78
3.3.4	Conclusion	79
3.4	Application de la dérivée optimale scalaire aux systèmes conservatifs d'ordre deux.	80
3.5	Stabilité dans le plan de phase.	86
3.5.1	Cas où la linéarisation classique n'existe pas.	86
3.5.2	En présence d'une valeur propre nulle.	87
3.6	En présence d'une paire de valeurs propres purement imaginaires	104
3.6.1	Dérivée optimale en présence de bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf.	109
3.6.2	En présence d'une paire de valeurs propres nulles	116
3.6.3	Un noeud ou un foyer?	121
4	Dérivée optimale des systèmes à temps discret	125
4.1	Introduction	125
4.2	Position du problème	125
4.3	Procédure de calcul	126
4.4	Applications	127
4.4.1	Commentaires	129
4.4.2	Comparaison qualitative entre la linéarisation classique et la D.O.	129
4.5	Conclusion	130
	Conclusion Générale	133
	Bibliographie	135

Introduction Générale.

Introduction générale

Les processus dynamiques sont souvent modélisés par des équations différentielles, du fait que les équations, décrivant un phénomène quelconque caractérisé par une ou plusieurs variables d'état, dépendent continûment du temps.

En réalité, peu de systèmes sont modélisés par des équations linéaires ; en électronique, par exemple, les circuits linéaires ne peuvent remplir toutes les fonctions désirées par l'ingénieur, dès lors que les effets non linéaires sont indispensables pour assurer la majorité des fonctions. En général, les modèles non linéaires sont innombrables et restent le plus souvent inclassables ; en effet, ils présentent des effets complexes et surprenants tels que les bifurcations, le chaos. Les scientifiques ne disposent pas de techniques générales adéquates pour les traiter ; on parvient cependant par construction ou par certains choix, de rester dans le domaine de comportement linéaire. Le modèle linéarisé est très séduisant par la simplicité des calculs, cela malheureusement n'est qu'une approximation qui engendre en contre partie un désavantage évident.

Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes dynamiques est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini ; ce concept qui est directement lié à la stabilité, a fait l'objet d'une recherche abondante depuis la fin du *XIX^{ème}* siècle. Son importance réside dans le fait que la notion de la stabilité est commune à plusieurs domaines, d'une part, et d'un point de vue technique, la stabilité est nécessaire au fonctionnement des engins.

Dans le cas d'un modèle linéaire, les critères de la stabilité étant déjà anciens, le problème reste posé pour les modèles non linéaires, l'approximation par linéarisation, représentant l'astuce la plus proche à l'esprit, n'est pas toujours justifiée et donne dans certaines situations une fausse description du système non linéaire, l'élaboration des théorèmes de linéarisation (Première approximation de Lyapunov [2], théorème de la linéarisation analytique de Poincaré [39], [41] et enfin le théorème de Hartman et Grobman [39], [41] et

[35]) a résolu partiellement ce problème. En effet, dans des cas limites, le problème est encore posé jusqu'à nos jours [5] et [39], il en est de même pour les cas où les théorèmes de linéarisation classique ne sont pas applicables.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons le concept de la stabilité selon Lyapunov ainsi que la stabilité asymptotique, nous donnerons les approches suivies afin d'élaborer l'équivalence entre les modèles non linéaires et leurs linéarisés tangents ainsi que la seconde méthode de Lyapunov.

Le deuxième chapitre décrit l'approximation au sens des moindres carrés des systèmes d'équations différentielles non linéaires proposée par Benouaz et Arino [44], [45], [43], [46], [47], [48], [49], [50], [56] dite "dérivée optimale" ; nous citerons dans ce cadre les propriétés les plus importantes. En second lieu, nous mettrons en oeuvre la procédure pour linéariser les équations d'état de systèmes électriques et électroniques simples. Une comparaison avec la linéarisation classique en terme de calcul d'erreur est élaborée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique de la stabilité asymptotique par linéarisation au sens de la dérivée optimale, l'étude est concentrée sur les cas où la linéarisation classique est mise en échec ; nous distinguons deux cas : le premier correspond au cas où les théorèmes de linéarisation classique ne sont pas applicables, du fait que la dérivée au sens de Fréchet n'existe pas à l'équilibre, tandis que le second se situe dans le cas où le régime permanent est non hyperbolique. Dans cette étude, nous commencerons par le cas scalaire, puis nous étendrons l'étude au plan de phase ; dans ce dernier cas, l'étude de la stabilité du régime permanent se fait en présence d'une valeur propre nulle, d'une paire de valeurs propres purement imaginaires, et enfin en présence d'une paire de valeurs propres nulles. Une étude sur les bifurcations "point selle-noeud", "transcritique" et "fourche" est apportée dans le cas scalaire, en considérant les formes normales, une autre étude de la bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf est apportée dans le cas des systèmes d'ordre deux ; ce chapitre s'achève par la présentation d'un exemple dont la linéarisation classique permet de juger la stabilité de l'équilibre, mais non pas sa nature. Dans le chapitre quatre, nous introduirons la notion de la dérivée optimale discrète,

qui est une approximation au sens des moindres carrés des équations aux différences, une autre classe de systèmes dynamiques caractérisée par un temps discret ; nous appliquerons la procédure à l'étude de quelques systèmes présentant des équilibres non hyperboliques par la linéarisation classique.

Chapitre I

Notions et Méthodes Classiques d'Analyse de la Stabilité.

Chapitre 1

Notions et méthodes classiques d'analyse de la stabilité

1.1 Introduction et historique

Les problèmes de la stabilité sont apparus pour la première fois en mécanique. Un critère pour la stabilité des corps rigides sous l'effet de forces gravitationnelles a été formulé par E. Torricelli en 1644 [25] ; G. Lagrange, en 1788, [6] démontra un théorème qui définit les conditions nécessaires pour la stabilité des systèmes conservatifs. Au *XIX^{ème}* siècle, le développement de la technologie et les problèmes de fonctionnement des engins ont poussé les scientifiques à chercher des méthodes pour l'étude de la stabilité du mouvement, les travaux de Routh [1] et Herwitz [3] restant des grandes références jusqu'à nos jours. Toutefois, on commence à utiliser les systèmes linéarisés pour l'étude des systèmes non linéaires sans aucune justification. En 1892, A.M. Lyapunov [2] a publié sa thèse "Problème général de la stabilité du mouvement" où il a introduit une définition très rigoureuse du problème de la stabilité du mouvement, l'absence d'une telle définition ayant causé un grand malentendu. Lyapunov a justifié en quelque sorte l'utilisation de la première approximation. Après Lyapunov, le développement de la théorie de la stabilité s'est orienté dans plusieurs directions, en précisant les résultats déjà élaborés. D'autres

définitions du problème de la stabilité dans l'espace des variables d'état apparaissent (par exemple, la stabilité au sens de James "entrée bornée, sortie bornée", est souvent utilisée par les automaticiens), bien que la définition de la stabilité selon Lyapunov reste la plus admise. Durant ces dernières décennies, on s'intéresse plus à la stabilité des systèmes mécaniques symétriques ainsi qu'à la théorie des catastrophes (qui traite la stabilité du mouvement d'une manière plus exacte en considérant l'instabilité d'un point de vue mathématique). Dans ce contexte, on peut citer J. E. Marsden [17], V.I. Arnold [9], [10] ; Malgré tous ces résultats, beaucoup de questions restent posées.

Dans ce premier chapitre, nous rappellerons les notions fondamentales de la théorie de la stabilité dans l'espace des variables d'état.

1.2 Stabilité des solutions

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; notons que le problème (1.1) est un problème aux valeurs initiales, la solution qui passe par x_0 au temps t_0 s'écrit donc $x(t; x_0, t_0)$ avec $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$, cette solution étant déterministe à cause des théorèmes d'existence et d'unicité. L'équation (1.1) modélise un très grand nombre de phénomènes dans des domaines très variés. Physiquement parlant, une solution est dite stable, si déplacée de sa position d'équilibre, elle tend à y revenir, en revanche, elle est dite instable si elle tend à s'en écarter davantage ; cette définition, qui est claire pour la majorité des systèmes physiques, apparaît grossière d'un point de vue mathématique et pose une question importante : comment juger les solutions qui sont à la limite de la stabilité? Pour répondre à cette question, nous allons introduire la définition exacte de la stabilité selon Lyapunov, en considérant que \tilde{x}_0 est une perturbation de x_0 , $x(t, \tilde{x}_0)$ étant par conséquent la solu-

tion perturbée.

Définition 1.1 (*Stabilité au sens de Lyapunov*)

La solution $x(t; x_0)$ de (1.1) est stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta \implies \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0)\| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Puisque la solution à tout instant dépend d'une manière continue des conditions initiales, cette définition suggère que, avec une perturbation suffisamment petite, les solutions restent proches dans tout le futur. Cette définition a un aspect local et s'intéresse au comportement au voisinage de l'équilibre sans prédire à priori de quel ordre de grandeur δ peut être choisi. Si de plus, la solution perturbée converge vers la solution non perturbée, de manière qu'elles deviennent confondues quand le temps tend vers l'infini, on parle d'une notion de stabilité plus forte.

Définition 1.2 (*Stabilité asymptotique*)

La solution $x(t; x_0)$ de (1.1) est asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe $r(x_0) > 0$ tel que $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < r(x_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0)\| = 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Il est clair que cette définition a aussi un aspect local, du fait que le choix de r ne peut se faire que localement. Notons que la notion de stabilité ou d'instabilité d'un système n'est pas adéquate, on parle alors de la stabilité de solutions, en raison du fait que des solutions stables et/ou instables peuvent exister simultanément pour un système donné.

1.3 Stabilité de l'équilibre

On s'intéresse le plus souvent à l'étude de la stabilité de solutions particulières appelées positions d'équilibre. Ce sont des solutions constantes $x(t; x_{eq}) = x_{eq}$, vérifiant $F(x_{eq}) = 0$; les définitions précédentes de la stabilité sont valables, dans ce cas, avec des perturbations proches de l'équilibre. Un système non linéaire quelconque peut avoir plusieurs positions d'équilibre qui peuvent être stables ou instables. Dans certaines situations, on exige la stabilité exponentielle de l'équilibre qui est plus forte que la stabilité asymptotique et est définie comme suit

Définition 1.3 *Le point d'équilibre x_{eq} est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives α, γ, r telles que $\|x_0 - x_{eq}\| < r \implies \|x(t, x_0) - x_{eq}\| \leq \gamma \exp(-\alpha t) \|x_0 - x_{eq}\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*

Dans ce cas, on s'intéresse le plus souvent à la détermination de α ; un exemple simple de la stabilité exponentielle est donné par un système linéaire possédant des valeurs propres à parties réelles strictement négatives ; l'équilibre est asymptotiquement stable et, de plus, il est exponentiellement stable.

Remarque 1.1 *Dans le cas scalaire, si une solution issue d'une perturbation proche de x_{eq} reste au voisinage de x_{eq} quand $t \rightarrow +\infty$; l'équilibre est alors asymptotiquement stable, la mention "stable" dans la définition de la stabilité asymptotique n'est pas donc nécessaire car elle est vérifiée automatiquement ; par contre dans le cas vectoriel, il est indispensable d'exiger la stabilité du point d'équilibre pour qu'il soit asymptotiquement stable. Cela est dû au fait qu'il existe des champs de vecteurs dont les solutions s'approchent de l'équilibre quand $t \rightarrow +\infty$ alors que l'équilibre est instable.*

1.4 Stabilité globale et stabilité locale

Si on compare les comportements possibles dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires, on s'aperçoit que les comportements dynamiques des systèmes non linéaires sont beaucoup plus compliqués, avec un éventail beaucoup plus grand. Par exemple, parler de la stabilité de l'équilibre ou de la stabilité du système revient au même dans le cas linéaire, puisque l'on peut confondre la stabilité locale et la stabilité globale. Par contre, dans le cas d'un système non linéaire l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre sous la forme la plus complète consiste non seulement à déterminer la nature du point d'équilibre ou sa stabilité asymptotique mais aussi à déterminer le domaine d'attraction, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales dont les solutions convergent vers l'équilibre. Ainsi, on parle de la stabilité ou de l'instabilité locale ou globale, la stabilité locale signifiant la convergence des solutions avec des conditions initiales proches tandis que l'instabilité

globale signifie la divergence de solutions en dehors de toute limite.

1.5 Stabilité asymptotique, Instabilité par linéarisation

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile ; en effet, en raison de leurs comportements assez compliqués, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que, dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système (1.1) en ce point (point d'équilibre)

$$\frac{dy}{dt} = DF(x_{eq})y + O(|y|^2) \quad (1.2)$$

puis, pour répondre aux questions de stabilité, il convient de considérer le système linéaire associé à (1.1)

$$\frac{dy}{dt} = DF(x_{eq})y. \quad (1.3)$$

Notons que $DF(x_{eq})$ est la matrice Jacobienne de F au point x_{eq}

$$DF(x_{eq}) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_{eq}}. \quad (1.4)$$

La détermination de la stabilité du point d'équilibre s'effectue donc en deux étapes :

— La première consiste à déterminer de la stabilité de $y = 0$, équilibre de (1.3), partant du fait que l'on sait déjà déterminer la stabilité linéaire à partir des valeurs propres de

$DF(x_{eq})$.

— La deuxième étape, réside dans la manière de déterminer la stabilité de x_{eq} à partir de celle de $y = 0$. Autrement dit, sous quelles conditions les systèmes (1.1) et (1.3) sont-ils équivalents?

1.5.1 Théorèmes de linéarisation classique

— Si toutes les valeurs propres de $DF(x_{eq})$ sont à partie réelle strictement négative, le système non linéaire (1.1) est asymptotiquement stable.

— Si au moins une valeur propre est à partie réelle strictement supérieure à 0, le système non linéaire est instable.

— Si le système linéarisé est stable sans être asymptotiquement stable ; c'est le cas critique, on ne peut rien conclure, les termes non linéaires influent sur les propriétés de la stabilité. Dans ce cas, on fait appel à d'autres procédés pour l'étude de la stabilité non linéaire.

Notons que la linéarisation classique ne permet d'étudier que la stabilité locale "stabilité du point d'équilibre", et ne donne aucun renseignement sur le domaine d'attraction.

Remarque 1.2 *Le problème de la valeur propre à partie réelle nulle se pose même pour les systèmes linéaires d'ordre supérieur ou égal à deux ; par exemple, si on considère les systèmes suivants*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad (1.5)$$

et

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x. \quad (1.6)$$

Dans les deux cas, les valeurs propres sont nulles ; le système (1.5) est stable, alors que le système (1.6) est instable.

1.6 Equivalence locale de flots

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le comportement asymptotique du système non linéaire au voisinage d'un équilibre hyperbolique peut être déduit par comparaison avec le système linéarisé. A ce niveau, on se demande comment peut-on justifier cette comparaison? En d'autres termes, comment peut-on établir une équivalence au voisinage de l'équilibre entre le système linéarisé et le système non linéaire, sachant que ce dernier présente une dynamique beaucoup plus compliquée? D'une manière générale, afin de comparer les flots pour des champs de vecteurs linéaires ou non linéaires, il est évident de définir pour toute classification, une relation d'équivalence pour laquelle il existe une application qui prend pour tout temps, le flot de chacun des champs de vecteurs en le flot de l'autre. Nous commençons par la définition suivante

Définition 1.4 *Soient deux systèmes d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (1.7)$$

et

$$\frac{dx}{dt} = G(x) \quad (1.8)$$

soit $\varphi(t, x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot de (1.7) et $\psi(t, x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le flot de (1.8), ces flots sont dit équivalents s'il existe une application bijective $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui transforme le flot $\varphi(t, x_0)$ en le flot $\psi(t, x_0)$ de telle sorte que $h(\varphi(t, x_0)) = \psi(t, h(x_0))$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

Ceci revient à dire que le flot $\varphi(t, x_0)$ se transforme en $\psi(t, x_0)$ lorsqu'on change les coordonnées de h . Il est clair que l'application h doit vérifier certaines propriétés afin de pouvoir garder l'équivalence des flots, le choix de ces propriétés conduisant à plusieurs formes de classification données par des relations d'équivalence différentes dont on définit les plus connues :

Equivalence linéaire : les flots $\varphi(t, x_0)$ et $\psi(t, x_0)$ sont dit linéairement équivalents si l'application $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme linéaire.

Equivalence différentiable : les flots $\varphi(t, x_0)$ et $\psi(t, x_0)$ sont dit différentiablement équivalents si l'application $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme.

Equivalence topologique : les flots $\varphi(t, x_0)$ et $\psi(t, x_0)$ sont dit topologiquement équivalents si l'application $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

A ce stade, malgré l'intérêt qu'elle présente, l'équivalence linéaire ne nous intéresse pas, du fait qu'elle constitue la forme d'équivalence la plus complète et la plus restrictive et donne une classification très rigoureuse.

1.6.1 Equivalence différentiable à un champ linéaire

Afin d'établir l'équivalence entre le système non linéaire (1.1) et son linéarisé (1.3), la première approche était de choisir l'application h qui transforme le flot de $F : \varphi(t, x_0)$ en celui de son linéarisé $e^{DF(x_{eq})t}y_0$ pour tout x , avec $x = h(y)$, comme étant un difféomorphisme (rappelons qu'un difféomorphisme de classe C^r , est une fonction de classe C^r avec une inverse de classe C^r) ; si on note par $F^{(r)}$ et $h^{(r)}$ les développements en séries de Taylor de F et h en 0 jusqu'à l'ordre r , et par $\varphi^{(r)}(t, x_0)$ le flot associé au champ $F^{(r)}$, on dit que le champ F est formellement équivalent à $DF(x_{eq})y$ jusqu'à l'ordre r si $\varphi^{(r)}(t, x_0) = h^{(r)}(e^{DF(x_{eq})t}y_0)$ pour tout x, y tels que $x = h(y)$, dans un voisinage de l'origine. Notons que l'équivalence jusqu'à l'ordre r mesure essentiellement la régularité du changement de coordonnées qui transforme le flot du système non linéaire en celui de son linéarisé, puisque l'égalité des développements en série de Taylor a lieu pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre r . La question qui se pose est de savoir sous quelles conditions le flot associé à (1.1) est l'image par difféomorphisme du flot de (1.3) ; en effet il est possible de démontrer que le flot non linéaire est différentiablement équivalent au flot de son linéarisé, si les valeurs propres satisfont une condition de non résonance, si $DF(x_{eq})$ n'a pas de résonance d'ordre inférieur ou égal à r , le champ F est *r-équivalent* à son linéarisé $DF(x_{eq})y$, en particulier, si $DF(x_{eq})$ est non résonante, F est équivalent à $DF(x_{eq})y$. Si on suppose que les valeurs propres de $DF(x_{eq})$ au voisinage du point d'équilibre sont λ_j avec $1 \leq j \leq n$, la condition de non résonance est donnée par $\lambda_k \neq \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j$ quel

que soit le choix de $m_j \geq 0$, avec $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$, dans ce cas l'équation (1.1) peut être transformée en (1.3) par une transformation $x = y + h(y) + \dots$, le pointillé signifiant les termes d'ordres supérieurs. Afin d'interpréter ce résultat, supposons, par exemple, qu'il n'y a pas de résonance pour $m = 2, \dots, r - 1$, pour $m = r$, on trouve une résonance, dans cette situation, les termes 2, 3... jusqu'à $r - 1$ peuvent être supprimés de l'équation non linéaire, en revanche le terme résonant r reste ; l'équation obtenue par difféomorphisme est non linéaire et est d'ordre r .

Soit le système non linéaire suivant

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^3 + \dots \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2 + b_1x_2^2 + b_2x_1^2 + b_3x_2x_1 + b_4x_2^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

son linéarisé par la première méthode de Lyapunov est donné par

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (1.10)$$

avec, comme valeurs propres $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$; dans ce cas, il existe deux possibilités de résonance : $2m_1 + m_2 = 2$ ou $2m_1 + m_2 = 1$. Il est simple de vérifier que la seule possibilité pour que les conditions $m_j \geq 0$, et $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$ sur les m_j soient vérifiées, correspond à $m_1 = 0$ et $m_2 = 2$; le système équivalent à (1.9) par difféomorphisme est le suivant

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -2y_1 + cy_2^2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

où c est un nombre réel, la solution analytique de (1.11) est donnée par

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-2t} [-2y_1(0) + ct y_2^2(0)] \\ y_2(t) &= e^{-t} y_2(0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

la comparaison du flot de (1.9) à celui de son linéarisé par la première approximation (1.10), revient à comparer à un difféomorphisme près entre le flot de (1.11) et celui du système linéarisé. Les écarts entre les deux solutions notés par δ_1 et δ_2 sont donnés par

$$\delta_1(t) = y_1(t) - x_1(t) = cte^{-2t}y_1^2(0), \delta_2(t) = 0$$

$\delta_1(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, ce que signifie que (1.10) a le même comportement asymptotique que son linéarisé malgré qu'on ne peut pas trouver un difféomorphisme qui puisse les rendre équivalents, ceci montre l'échec de l'équivalence différentiable qui est dû aux problèmes de résonance qui peuvent apparaître même pour des points d'équilibres hyperboliques pour lesquels l'étude de la stabilité se fait par la première approximation, ce résultats nous permet de conclure que l'équivalence différentiable est très restrictive puisqu'elle donne une classification complète des champs de vecteurs en un point d'équilibre en fonction de leur complexité ; l'exemple linéaire suivant montre la restriction de l'équivalence dite différentiable.

Exemple 1 *Considérons les équations scalaires suivantes*

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x \tag{1.13}$$

et

$$\frac{dx}{dt} = -x \tag{1.14}$$

d'après la relation $h(\varphi(t, x_0)) = \psi(t, h(x_0))$ citée dans la définition 1.4, il vient

$$h(e^{-0.1t}x_0) = e^{-t}h(x_0) \tag{1.15}$$

En dérivant par rapport à x_0 et en évaluant en $x_0 = 0$, on obtient

$$e^{-0.1t}h'(0) = e^{-t}h'(0) \tag{1.16}$$

Puisque h est inversible, $h'(0)$ doit être différent de 0, ce qui implique dans (1.16) que $0.1 = 1$ et par conséquent les systèmes (1.13) et (1.14) ne sont pas équivalents sous un difféomorphisme, bien qu'ils aient la même structure d'orbites, car l'origine constitue pour chacun d'eux un point d'équilibre asymptotiquement stable, la seule différence étant la vitesse dont les solutions s'approchent de l'origine. L'autre approche a consisté à effectuer une classification moins précise, moins restrictive et purement qualitative : c'est l'équivalence topologique en renonçant aux difféomorphismes au profit des homéomorphismes.

1.6.2 Equivalence topologique

Nous commençons, tout d'abord, par définir ce qu'est un homéomorphisme

Définition 1.5 *Un homéomorphisme de \mathbb{R} est une application continue $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec une application inverse continue.*

Un théorème remarquable, qui répond à la question posée à propos de la linéarisation classique est le suivant

Théorème 1.1 *(Hartman et Grobman)*

Si 0 est un point singulier hyperbolique de F , alors F est topologiquement équivalent à son linéarisé $DF(0)y$ et l'homéomorphisme correspondant préserve le sens de parcours.

1.6.3 Commentaires

L'équivalence par homéomorphisme permet d'effectuer une classification basée principalement sur la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre ; deux systèmes linéaires sont topologiquement équivalents s'ils ont le même nombre de valeurs propres, avec des parties réelles de mêmes signes ; par exemple, si on considère les systèmes d'ordre deux, un point selle ne peut être topologiquement équivalent qu'à un point selle, par contre, un foyer stable (respec. instable), un noeud propre stable (respec. instable), un noeud impropre stable (respec. instable) sont topologiquement équivalents, mais pas

différentiablement équivalents. Il est fréquent de tomber sur des systèmes non linéaires (pour lesquels l'équivalence avec le linéarisé se fait par un homéomorphisme local), dont l'équilibre présente un foyer stable (respec. instable) tandis que l'origine du système linéarisé présente un noeud stable (respec. instable), nous reviendrons sur ce point dans le chapitre trois.

1.7 Méthode directe de Lyapunov

Pour l'étude de la stabilité non linéaire, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé, Lyapunov a proposé une seconde méthode, en s'inspirant de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange qui a formulé le principe de stabilité des systèmes mécaniques *"un système qui est dans un état où son énergie potentielle possède un minimum isolé est dans un état d'équilibre stable"*. Cette méthode, appelée aussi méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs réelles. Quand sa dérivée par rapport au temps est définie de signe opposé, la vitesse du point x ($x \in \mathbb{R}^n$) est toujours dirigée vers l'intérieur, ce point finira par arriver à l'origine ; dans le cas contraire, le point x s'en écartera davantage. Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction V peut être choisie comme étant l'énergie du système.

1.7.1 Théorème de stabilité par la méthode directe

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Supposons que l'origine est un point singulier de (1.17) et posons $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie dans un voisinage U de l'origine, telle que

- i) $V(0) = 0$
- ii) $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$ $x \in U$

si

iii) $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est donc stable.

iv) $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est asymptotiquement stable

v) $\frac{dV(x)}{dt} > 0$ dans $U - \{0\}$ l'origine est instable.

Dans ces conditions, la fonction V est appelée fonction de Lyapunov ; elle est définie positive si i) et ii) sont vérifiées. Notons qu'avec ces deux hypothèses, la fonction V est seulement une fonction candidate "fonction de Lyapunov définie". Les propriétés de stabilité sont dites globales si U est égal à \mathbb{R}^n .

1.7.2 Remarque

La méthode directe de Lyapunov est justement applicable aux systèmes non autonomes

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (1.18)$$

une petite modification est apportée aux conditions i) et ii) ; pour que $V(x, t)$ soit définie positive dans U , on exige l'existence d'une fonction $W(x)$ continue dans U vérifiant

i) $W(0) = 0$

ii) $0 < W(x) \leq V(x, t)$.

La dérivée de V par rapport au temps s'écrit

$$\frac{dV(x, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (1.19)$$

Par analogie aux systèmes stationnaires il vient

iii) $\frac{dV(x, t)}{dt} \leq 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est donc stable

iv) $\frac{dV(x, t)}{dt} < 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est asymptotiquement stable

v) $\frac{dV(x, t)}{dt} > 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est instable.

Malheureusement, la méthode directe de Lyapunov donne des conditions suffisantes mais

pas nécessaires de stabilité (une exception est faite pour les systèmes linéaires et stationnaires) ; un système peut avoir une infinité de fonctions de Lyapunov ; par conséquent, le fait qu'une fonction ne prouve pas la stabilité n'implique pas l'instabilité et, de plus, il existe certaines classes de systèmes asymptotiquement stables qui ne possèdent pas une fonction de Lyapunov. L'utilité de la méthode réside surtout dans la détermination du domaine d'attraction ; elle permet aussi de répondre aux questions de stabilité quand la linéarisation ne donne aucune information. La difficulté de la recherche de la fonction V constitue un vrai handicap puisqu'on ne connaît pas de procédés pour la construction de fonctions adéquates dans le cas général ; cependant, il existe des techniques de construction applicables à des cas particuliers.

1.7.3 Méthode de l'énergie

La stabilité d'un système physique est liée à son énergie ; en effet, un système, dont l'énergie est décroissante, finit par arriver à sa position d'équilibre. Considérons, à titre d'exemple, une particule soumise à une friction visqueuse ; elle est gouvernée par

$$m \frac{dv}{dt} = -\zeta v \quad (1.20)$$

On choisit l'énergie du système $E = \frac{1}{2}mv^2$ comme étant une fonction de Lyapunov, elle est définie positive avec une dérivée, par rapport au temps, définie négative $\frac{dE}{dt} = -\zeta v^2$; dans ces conditions le système linéaire est asymptotiquement stable, ceci peut être vérifié par la solution de (1.20), qui s'écrit $v(t) = v_0 e^{-t\frac{\zeta}{m}}$, et qui tend vers 0, quand t tend vers l'infini. D'une manière générale, la méthode de l'énergie conduit à des différents niveaux de stabilité.

- i) *Stabilité asymptotique* : si $\frac{dE}{dt} < 0$ est vérifiée dans tout le voisinage de l'équilibre.
- ii) *Stabilité conditionnelle* : l'énergie n'est décroissante que vis à vis des perturbations d'énergie inférieures à une certaine limite.
- iii) *Stabilité asymptotique en moyenne* : il y a pour certaines perturbations une évolution

non monotone de l'énergie, décroissante seulement dans la phase finale.

iv) *Stabilité simple* : pour une perturbation inférieure à une certaine borne, l'énergie du système garde une valeur constante.

v) *Instabilité* : l'énergie est toujours croissante.

1.7.4 Fonction de Lyapunov quadratique

Proposée par Lyapunov lui-même, cette forme de construction présente un grand intérêt ; elle permet toujours de prouver la stabilité asymptotique dans le cas linéaire et est justement applicable au cas des systèmes non linéaires, mais avec beaucoup moins d'efficacité. Ecrivons le système (1.1) sous la forme suivante

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(x) \quad (1.21)$$

où $G(x)$ est la partie non linéaire ; la méthode consiste à trouver une fonction de Lyapunov sous la forme quadratique

$$V(x) = x^T Bx \quad (1.22)$$

où x est le vecteur d'état, B est une matrice symétrique qu'on suppose définie positive, la dérivée totale de V , par rapport au temps pour le système (1.21) est

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x^T A^T + g^T) Bx + x^T B(Ax + g) \\ &= x^T (A^T B + BA) x + g^T Bx + x^T Bg \\ &= x^T Qx + 2g^T Bx \end{aligned} \quad (1.23)$$

le terme $x^T Qx$ représente la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov quadratique propre à la partie linéaire de (1.21), cette partie est asymptotiquement stable quand la matrice Q est négative ; cependant, pour tout m positif, il existe un δ positif tel que $\|g(x)\| < m \|x\|$ soit vérifiée pour tout $\|x\| < \delta$, si on considère que

β est la plus grande valeur propre de B , q la plus petite valeur propre de Q , il vient $\frac{dV}{dt} \leq -(q - 2\beta m) x^T x$, on peut choisir m de telle sorte que $m < \frac{q}{2\beta}$. Dans ces conditions $\frac{dV}{dt}$ est définie négative à l'intérieur du disque $U = \{x : \|x\| < \delta\}$, la fonction quadratique V vérifie les conditions d'une fonction de Lyapunov ; de plus, elle peut servir à la détermination du domaine d'attraction.

1.7.5 Construction de Krasofski

Elle consiste à construire une fonction de Lyapunov à partir d'une forme quadratique du champ de vecteurs, elle est surtout intéressante pour étudier la stabilité dans l'espace des paramètres. La fonction V s'écrit

$$V(x) = F^T(x) B F(x) \quad (1.24)$$

où B représente une matrice symétrique qu'on suppose définie positive afin que la fonction V soit aussi positive, la dérivée de F par rapport au temps s'écrit

$$\frac{\partial F(x)}{\partial t} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = A F(x) \quad (1.25)$$

A est la matrice Jacobienne de F , la dérivée de V par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial F^T}{\partial t} B F + F^T B \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= F^T (A^T B + B A) F = F^T C F \end{aligned} \quad (1.26)$$

Si la matrice C est négative, la fonction (1.24) est une fonction de Lyapunov du système non linéaire.

1.7.6 Application

Dans cette application, nous allons mettre en oeuvre les deux premières techniques de la construction de fonctions de Lyapunov.

Construction de la fonction de Lyapunov par la méthode de l'énergie

Un pendule avec une friction visqueuse est modélisé par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{mgl}{I} \sin \theta = 0 \quad (1.27)$$

avec un coefficient de frottement $\mu > 0$, et un moment d'inertie I , en posant $\theta = x_1$, $\frac{d\theta}{dt} = x_2$, (1.27) devient

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\mu}{I}x_2 - \frac{mgl}{I} \sin x_1 \end{cases} \quad (1.28)$$

la fonction énergie s'écrit

$$E(x) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) \quad (1.29)$$

elle est définie positive dans un petit voisinage de l'origine et sa dérivée par rapport au temps est négative

$$\frac{dE(x)}{dt} = -\mu x_2^2 \quad (1.30)$$

l'origine de (1.27) est donc asymptotiquement stable.

Fonction de Lyapunov quadratique

Considérons le système suivant

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.31)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -(1 + x_2^2)x_2 - x_1 \end{cases} \quad (1.32)$$

on choisit une fonction de Lyapunov définie positive

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (1.33)$$

sa dérivée par rapport au temps s'écrit

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x_2^2(1 + x_2^2). \quad (1.34)$$

elle est négative, d'où la stabilité asymptotique de l'origine. Les figures (1 – 1) et (1 – 2) montrent les tracés des fonctions de Lyapunov (1.29) et (1.33).

1.7.7 Commentaires

Bien que les critères de la stabilité par linéarisation soient définis d'une manière claire et rigoureusement justifiés, la linéarisation classique est mise en échec du fait qu'elle suppose que la matrice Jacobienne au point d'équilibre existe, or, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. Considérons par exemple, le cas d'un asservissement qui contient un organe non linéaire fonctionnant par plus ou moins, dans ce cas, les fonctions sont discontinues et ne sont pas dérivables au voisinage de l'équilibre, de plus la linéarisation classique donne une condition nécessaire mais pas suffisante puisqu'elle ne permet pas de juger la stabilité en présence d'une valeur propre à partie réelle nulle. La recherche d'une fonction de Lyapunov constitue en elle-même un problème délicat du fait qu'elle repose dans le cas général sur "l'expérience et la chance".

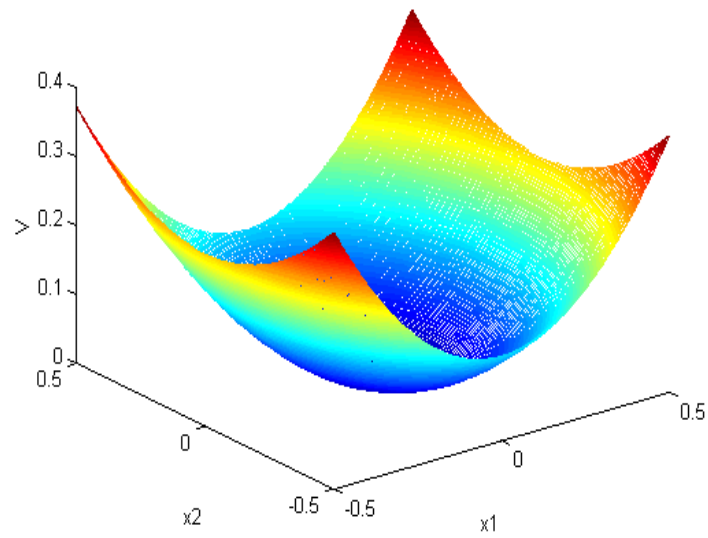


Figure 1-1: représente la fonction énergie du système non linéaire (1.28).

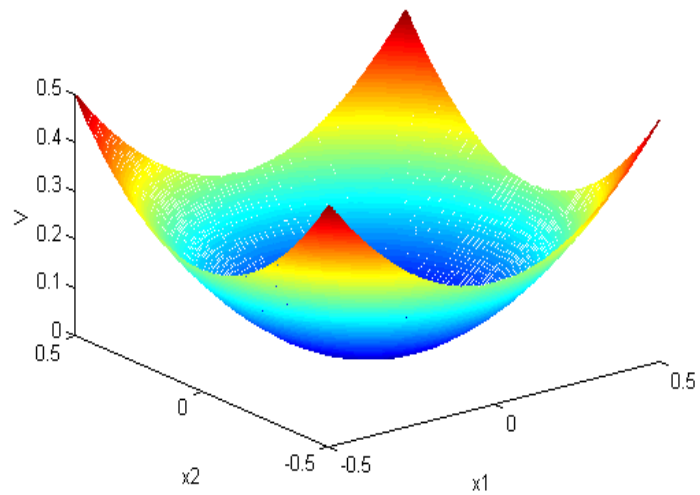


Figure 1-2: représente la fonction de Lyapunov quadratique du système non linéaire (1.32).

1.8 Systèmes conservatifs d'ordre deux

Cette classe de systèmes est définie en terme d'une fonction réelle appelée fonction potentielle, en effet, pour une fonction v définie de \mathbb{R} en \mathbb{R} , l'équation différentielle d'ordre deux

$$\frac{d^2y}{dt^2} + v(y) = 0 \quad (1.35)$$

s'écrivant encore sous la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (1.36)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -v(x_1) \quad (1.37)$$

est dite système conservatif d'ordre deux, l'énergie d'un tel système étant une quantité conservée, la fonction

$$V(x_1) = \int_0^{x_1} v(s) ds \quad (1.38)$$

représente l'énergie potentielle.

Il est clair que la première équation scalaire (1.36) est toujours fixe pour tous les systèmes conservatifs ; les propriétés dynamiques sont déterminées surtout à partir de la deuxième. Autrement dit, à partir de la fonction potentielle $V(x_1)$, cela ne veut pas dire que (1.36) n'influe pas, En effet, c'est à cause de sa forme fixe et de l'absence de la variable d'état x_2 dans l'expression de V , que les points d'équilibre des systèmes conservatifs ne sont jamais asymptotiquement stables (en effet ils ne sont jamais attracteurs), D'après la forme du système conservatif (1.35), tous les points d'équilibre sont situés sur l'axe x_1 , chaque point critique $x_{eq} = (x_{1eq}, 0)$ correspond à un point critique x_{1eq} de la fonction potentielle. La détermination de la nature d'un point d'équilibre dans le cas non dégénéré est simple. S'il correspond à un maximum isolé de la fonction potentielle, c'est un point selle ; s'il correspond à un minimum, c'est un centre. Ce qui nous conduit au lemme suivant

Lemme 1.1 [37] *Si le point $x_{eq} = (x_{1eq}, 0)$ est un point d'équilibre du système conservatif, le point x_{1eq} est un point critique de la fonction potentielle V , alors*

i) x_{eq} est un point selle si $V''(x_{1eq}) < 0$

ii) x_{eq} est un centre si $V''(x_{1eq}) > 0$

Exemple 2 Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_1^3 \end{cases} \quad (1.39)$$

la fonction potentielle s'écrit

$$V(x) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^4}{4}. \quad (1.40)$$

Ce qui nous permet d'écrire

a) $V''(0) = -1$, l'origine est donc un point selle

b) $V''(1) = 2$, le point d'équilibre $x_{eq} = (1, 0)$ est donc un centre

c) $V''(-1) = 2$, le point d'équilibre $x_{eq} = (-1, 0)$ est donc un centre.

Exemple 3 Soit le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_1^2 \end{cases} \quad (1.41)$$

la fonction potentielle s'écrit

$$V(x) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} \quad (1.42)$$

on a donc

a) $V''(0) = 1$, le point d'équilibre $x_{eq} = (0, 0)$ est un point selle.

b) $V''(1) = -1$, le point d'équilibre $x_{eq} = (1, 0)$ est un centre.

Les figures (1 – 3) et (1 – 4) représentent respectivement les énergies des systèmes (1.39) et (1.41) ; les graphes des fonctions potentielles ainsi que les champs de vecteurs sont représentés sur les figures (1 – 5) à (1 – 8).

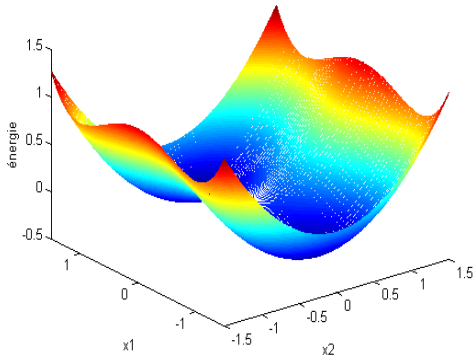


Figure 1-3: représente l'énergie totale
du système (1.39).

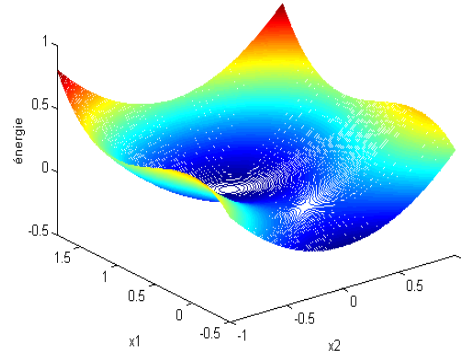


Figure 1-4: représente l'énergie totale
du système (1.41).

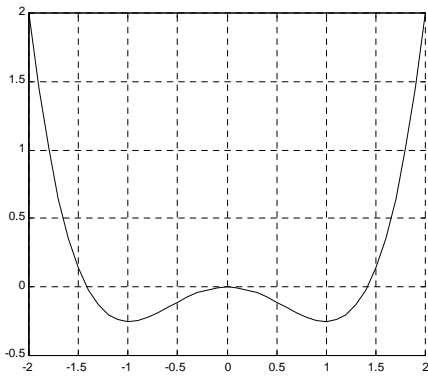


Figure 1-5: représente l'énergie
potentielle du système (1.39).

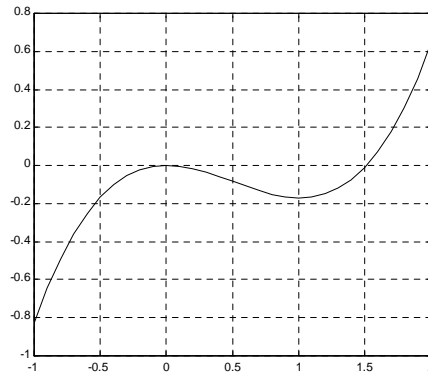


Figure 1-6: représente l'énergie
potentielle du système (1.41).

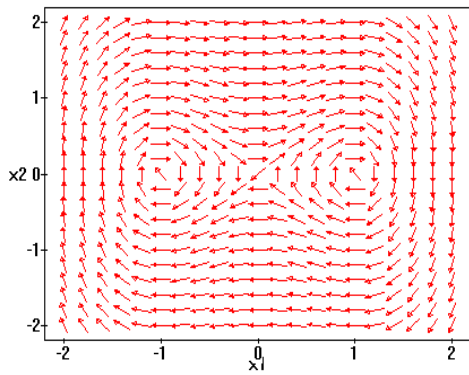


Figure 1-7: représente le champ de vecteurs du système (1.39)

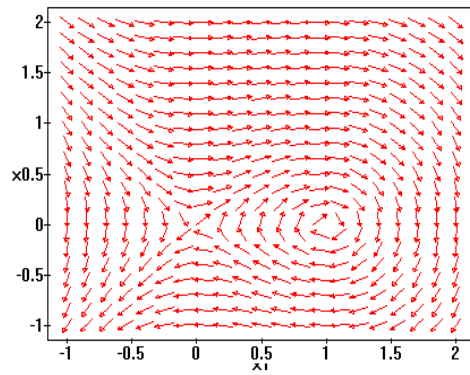


Figure 1-8: représente le champ de vecteurs du système (1.41).

Chapitre II

Propriétés de la D.O.

Influence des Conditions Initiales.

Chapitre 2

Propriétés de la D.O. - Influence des conditions initiales.

2.1 Introduction

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale, si la fonction F , qui définit l'équation est suffisamment régulière au voisinage de l'équilibre et, si la linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, en ce sens, qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines de zéro de l'équation linéaire. Par contre, la tâche est toute autre en l'absence de régularité ou si le point d'équilibre est un centre.

Concentrons nous sur le cas non régulier. Imaginons même le cas où seul l'équilibre est non régulier. Dans ce cas, on ne peut pas dériver l'équation et on ne peut pas donc étudier l'équation linéarisée. Une question naturelle se pose alors : y a-t-il d'autres moyens d'associer à l'équation non linéaire, une équation linéaire dont le comportement asymptotique soit le même?

En effet, on peut envisager par exemple, de substituer à la dérivation, la notion de sous différentiel. On obtient ainsi, une équation différentielle multivoque. L'idée choisie par

Benouaz et Arino repose sur une méthode d'approximation. Dans [44], [45], [43], [46], [47], [48], [49], [50], [56], ils ont introduit la notion de la dérivée optimale. Il s'agit en fait d'une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés. Dans ce chapitre, nous présentons brièvement la dérivation optimale et ses propriétés principales.

2.2 La Dérivée Optimale

Considérons le système d'équations différentielles non linéaires suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, F : est définie dans certain ouvert Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^n , avec les hypothèses suivantes

H1) $F(0) = 0$.

H2) le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re } z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0 pour lequel $DF(x)$ existe.

H3) F est continue, localement Lipschizienne.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(t)$ la solution de l'équation non linéaire issue de x_0 . A toute application linéaire $A \in L(\mathbb{R}^n)$, On associe la solution $y(t)$ de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t), y(0) = y_0 \quad (2.2)$$

et l'on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (2.3)$$

le long de cette solution, ce qui donne

$$A = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \right]^{-1}. \quad (2.4)$$

Plus précisément, la procédure est définie de la manière suivante :

Etant donné x_0 , on choisit une première application linéaire, par exemple, si F est dérivable en x_0 , on pourra prendre $A_0 = DF(x_0)$, ou alors la valeur de la dérivée en un point proche de x_0 , ce qui est toujours possible si F est seulement localement Lipschitzienne.

Si A_0 est une application asymptotiquement stable, la solution issue de x_0 de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), y(0) = y_0,$$

tend vers 0 exponentiellement. On peut évaluer

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (2.5)$$

et on minimise G sur l'ensemble des matrices A . Si F est linéaire, le minimum est atteint pour la valeur $A = F$. (on a alors $A_0 = F$). Dans le cas général, on peut toujours minimiser G et la matrice qui donne le minimum est unique. On appelle A_1 cette matrice, on remplace A_0 par A_1 , on remplace y par la solution de l'équation associée à A_1 , et on continue. La dérivée optimale (qui dépend en général de x_0) est la limite (si elle existe) de la suite A_j ainsi construite. La procédure itérative peut être résumée comme suit

1. $A_0 \leftarrow DF(x_0)$.
2. $j \leftarrow 1$.
3. $A_j \leftarrow \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_{j-1}t}x_0)][e^{A_{j-1}t}x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_{j-1}t}x_0][e^{A_{j-1}t}x_0]^T dt \right]^{-1}$.
4. Si $\|A_j - A_{j-1}\| > \epsilon$.

$j \leftarrow j + 1$

Aller à 3.

Sinon

\tilde{A} (dérivée optimale) $\longleftarrow A_j$.

Fin SI.

FIN.

2.3 La dérivée optimale dans le cas scalaire

Considérons une équation différentielle scalaire non linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le problème est d'approcher (2.6) par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$g(a) = \int_0^{+\infty} |f(x(t)) - ax(t)|^2 dt \quad (2.8)$$

dans ce cas les hypothèses sur f sont les suivantes

h1) $f(0) = 0$.

h2) $f'(x) < 0$, en tout point où f' existe dans l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

h3) f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le calcul se fait d'une manière analogue à celle du cas vectoriel, on commence par le

calcul de $a_0 = f'(x_0)$ puis on calcul a_1 en résolvant le système $\frac{dx}{dt} = a_0x$ l'expression $x(0) = x_0$

de a_1 est donnée par (2.4) en substituant F par f :

$$a_1 = \frac{\int_0^{+\infty} f(x(t))x(t) dt}{\int_0^{+\infty} x^2(t) dt} \frac{1}{x_0} \quad (2.9)$$

en changeant la variable t par $x(t) = \exp(a_0 t) x_0$, il vient

$$a_1 = \frac{\int_0^{x_0} f(x) dx}{\int_0^{x_0} x dx} \quad (2.10)$$

$$= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (2.11)$$

a_1 ne dépend pas de a_0 ; et par conséquent, la procédure de la dérivation optimale converge au premier pas, à savoir

$$\tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (2.12)$$

2.4 Quelques propriétés de la dérivée optimale

2.4.1 Cas où F est une somme de termes linéaire et non linéaire

Dans cette situation, la fonction F s'écrit

$$F(x) = Mx + \hat{F}(x)$$

où M désigne la partie linéaire, le calcul de la matrice A_1 donne

$$A_1 = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T \right] [\Gamma(x(t))]^{-1}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} A_1 &= M + \left[\int_0^{+\infty} [\hat{F}(x(t))] [x(t)]^T \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= M + \hat{A}_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

d'une manière générale, pour l'itération j

$$A_j = M + \hat{A}_j \quad (2.14)$$

avec

$$\hat{A}_j = \left[\int_0^{+\infty} \left[\hat{F}(x_j(t)) \right] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x_j(t))]^{-1}. \quad (2.15)$$

Donc, si la composante f_k de F est linéaire alors \hat{f}_k est nulle, la $k^{\text{ième}}$ ligne de la matrice optimale est égale à f_k .

2.4.2 Relation entre la dérivée optimale et la linéarisation classique

La relation de la dérivée optimale avec la linéarisation classique constitue une des propriétés les plus importantes, supposons que la suite A_j converge vers la matrice optimale et que $DF(0)$ existe, dans ce cas on peut écrire

$$F(x) = DF(0)x + o(|x|). \quad (2.16)$$

En remplaçant dans l'expression (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left[\int_0^{+\infty} [DF(0)x(t) + o(|x(t)|)] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= DF(0) + \left[\int_0^{+\infty} o(|x(t)|) [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= DF(0) + o(1). \end{aligned}$$

où

$$o(1) = \left[\int_0^{+\infty} o(|x(t)|) [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1}.$$

avec $o(1)$ une quantité qui tend vers 0 quand $x_0 \rightarrow 0$.

2.4.3 Convergence de la dérivée optimale

Nous savons déjà que le calcul de la dérivée optimale se fait par un procédé itératif. En effet, lorsque les hypothèses sur le champ de vecteurs sont vérifiées, la procédure converge

automatiquement vers la matrice optimale (en réalité, la procédure converge vers la même matrice quelle que soit la matrice initiale, tant que son spectre est négatif).

Nous considérons à titre d'exemple, le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 5(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 5(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (2.17)$$

Les figures (2 – 1), (2 – 2) montrent la convergence de la procédure. Pour $\varepsilon = \|A_j - A_{j-1}\| = 6.10^{-6}$, la dérivée optimale est obtenue après treize itérations, la figure (2 – 3) montre l'erreur due aux approximations. Nous utiliserons par la suite deux formules pour le calcul d'erreurs, l'une étant instantanée

$$err_1 = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \quad (2.18)$$

$$err_2 = Max \|x(t) - \hat{x}(t)\| \quad (2.19)$$

où $x(t)$ représente la fonction observée (solution numérique du système non linéaire), $\hat{x}(t)$ représente la solution numérique du système linéarisé.

2.4.4 Dérivée optimale des systèmes découplés

Les plus simples des équations différentielles vectorielles d'ordre n , sont obtenus en considérant n équations scalaires sur chaque axe. Les comportements dynamiques de tels systèmes sont plus simples que ceux du cas général. Le calcul de la dérivée optimale peut se faire de deux manières différentes, soit en calculant n dérivées optimales sur chaque

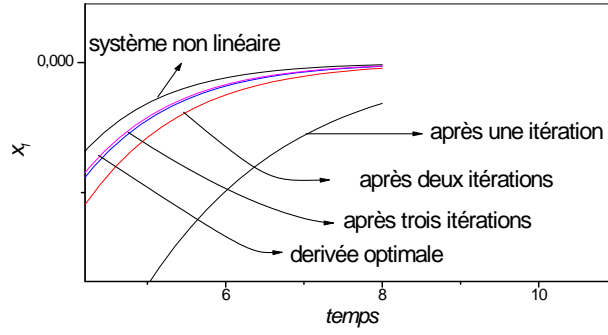


Figure 2-1: Solutions $x_1(t)$ du système non linéaire (2.17) et ses linéarisés au sens de la D.O. pour différentes itérations.

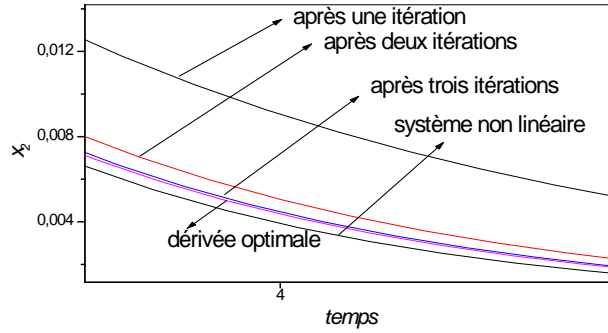


Figure 2-2: Solutions $x_2(t)$ du système non linéaire (2.17) et ses linéarisés au sens de la D.O. pour différentes itérations.

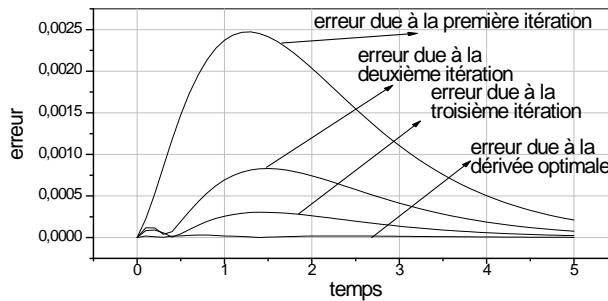


Figure 2-3: Erreur due aux approximations au sens de la D.O. du système (2.17) pour différentes itérations.

axe par la formule (2.12), on obtient dans ce cas une matrice optimale diagonale, soit en utilisant la procédure décrite au paragraphe 2.2 ; pour l'obtention d'une matrice optimale du système complet.

Exemple 4 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 - 3x_1^3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -1.89x_2 - 0.4x_2^3 \\ x_0 = (0.08, 0.1). \end{cases} \quad (2.20)$$

la dérivée optimale calculée sur chaque axe est donnée par

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3.0096 & 0 \\ 0 & -1.8920 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

la dérivée optimale du système complet en utilisant la formule générale s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3.0276 & 1.1755 \cdot 10^{-2} \\ -7.6286 \cdot 10^{-3} & -1.8900 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Les figures (2 – 4) et (2 – 5) représentent les solutions du système non linéaire et ceux linéarisés par les deux techniques. La figure (2 – 6) représente l'erreur introduite par les deux approximations. Remarquons que le système (2.22) linéarisé par la formule générale n'est pas vraiment un système découplé, (cela peut devenir plus clair lorsque x_0 est plus éloigné de l'origine), par contre la linéarisation classique d'un système découplé conduit toujours à un système découplé. Il est clair, d'après la figure (2 – 6) et le tableau (2 – 1), que le système linéarisé donné par (2.22), donne une meilleure approximation du système non linéaire, ceci est dû au fait que la matrice optimale vectorielle est calculée par une procédure itérative, par contre, dans le cas scalaire, le calcul se fait en une seule itération.

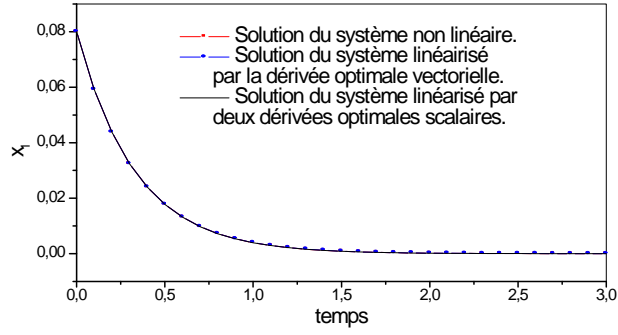


Figure 2-4: Solutions $x_1(t)$ du système non linéaire (2.20) et ses linéarisés par les D.O. (2.21) et (2.22).

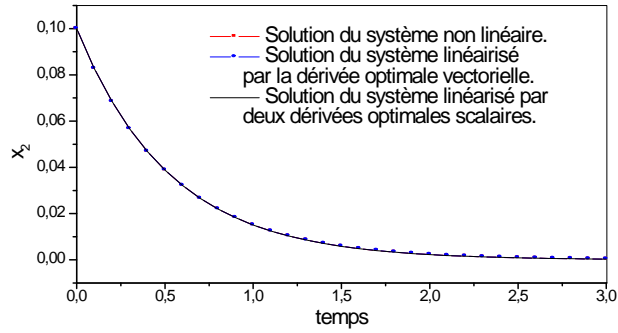


Figure 2-5: Solutions $x_2(t)$ du système non linéaire (2.20) et ses linéarisés par les D.O. (2.21) et (2.22).

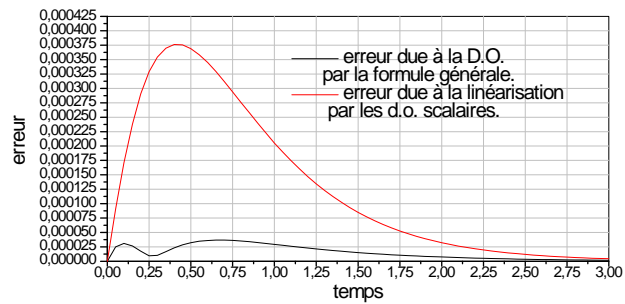


Figure 2-6: Erreur due aux approximations par les dérivées optimales (2.21) et (2.22) pour le système non linéaire (2.20).

<i>Erreur err_2 due à l'approximation du système (2.20) par (2.21)</i>	$3.7619 \cdot 10^{-4}$
<i>Erreur err_2 due à l'approximation du système (2.20) par (2.22)</i>	$3.6790 \cdot 10^{-5}$

Tableau 2 – 1: Erreur absolue maximale due à l'approximation de (2.20) par (2.21) et (2.22).

2.4.5 Dérivée optimale en une itération

Dans certaines situations, le spectre de $DF(x)$ pour $x \neq 0$ n'est pas négatif, dans ce cas la procédure ne converge pas, le calcul de la dérivée optimale se fait en une itération par la formule (2.4), on notera \tilde{A}_1 la dérivée optimale calculée dans une telle situation, on n'exclut pas que la D.O. possède une valeur propre nulle ou une paire de valeurs propres purement imaginaires.

2.4.6 Choix de la condition initiale

Lors du calcul de la dérivée optimale, le point x_0 est choisi arbitrairement voisin de l'origine. Dans cette section, nous allons mettre en évidence l'influence de ce choix.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - rx_2(1 - x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases} \quad (2.23)$$

On se propose de calculer la dérivée optimale et l'erreur introduite par l'approximation pour différentes conditions initiales. Prenons $r = 8.55$, le tableau (2 – 2) montre les matrices optimales pour différentes données initiales et l'erreur absolue maximale due aux deux

approximations. Les figures (2 – 7) montrent l’erreur instantanée.

Conditions initiales.	Matrices c
$x_0 = (0.1, 0.5)$ $\ x_0\ = 0.5099$	$\begin{bmatrix} -1.1759 \\ 1 \end{bmatrix}$
$x_0 = (0.1, 0.05)$ $\ x_0\ = 0.1118$	$\begin{bmatrix} -1.0044 \\ 1 \end{bmatrix}$
$x_0 = (0.01, 0.05)$ $\ x_0\ = 0.0510$	$\begin{bmatrix} -1.0189 \\ 1 \end{bmatrix}$
$x_0 = (0.01, 0.005)$ $\ x_0\ = 0.0112$	$\begin{bmatrix} -1.0009 \\ 1 \end{bmatrix}$
$x_0 = (0.001, 0.0005)$ $\ x_0\ = 1.1180 \cdot 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$x_0 = (10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$ $\ x_0\ = 5.0990 \cdot 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$x_0 = (10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5})$ $\ x_0\ = 5.0990 \cdot 10^{-5}$	$\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$x_0 = (10^{-5}, 5 \cdot 10^{-6})$ $\ x_0\ = 1.1180 \cdot 10^{-5}$	$\begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tableau 2 – 2: Erreur absolue maximale due à l’approximation du système non linéaire (2.23) par la linéarisation classique et la dérivation optimale pour différentes conditions initiales.

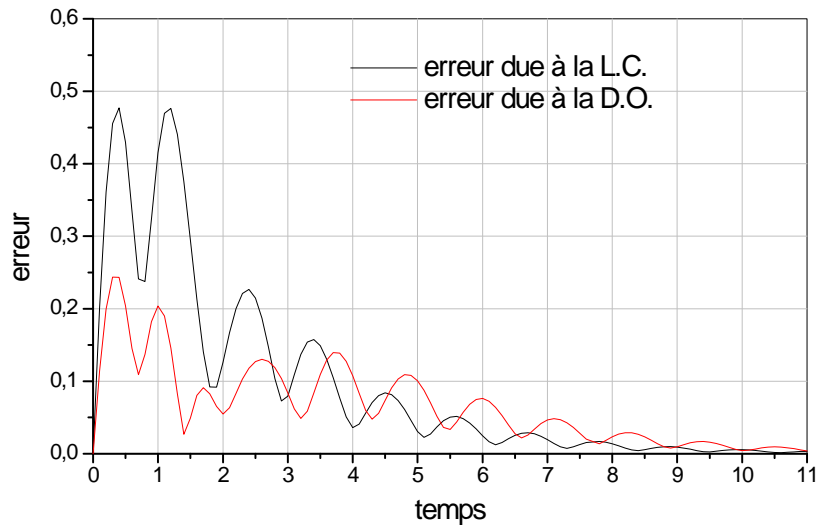


Figure 2-7-a: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (0.1, 0.5)$, $\|x_0\| = 0.5099$

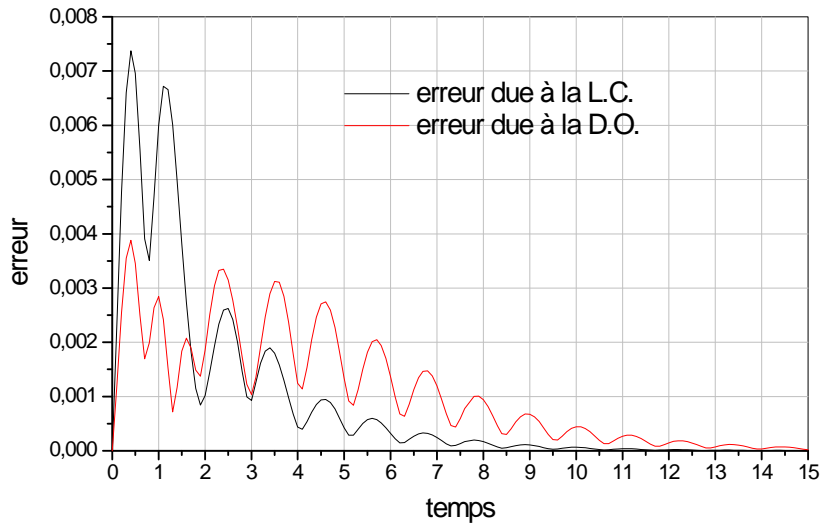


Figure 2-7-b: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (0.1, 0.05)$, $\|x_0\| = 0.1118$

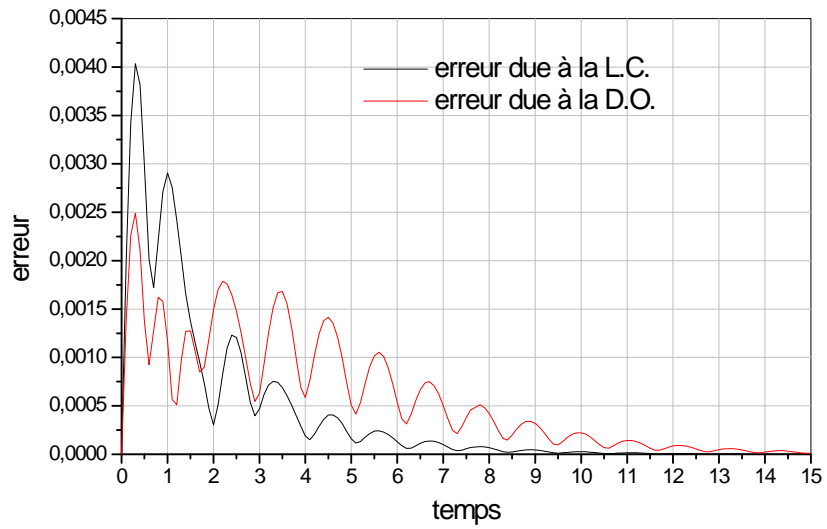


Figure 2-7-c: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (0.01, 0.05)$, $\|x_0\| = 0.0510$

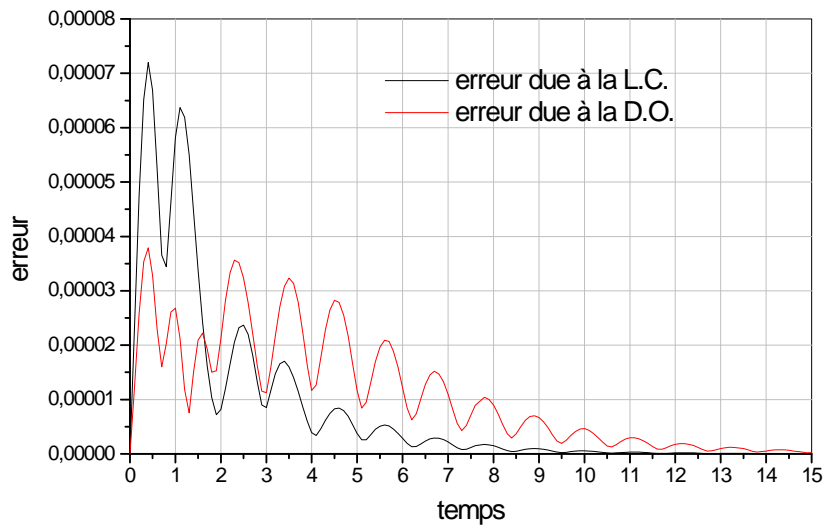


Figure 2-7-d: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (0.01, 0.005)$, $\|x_0\| = 0.0112$

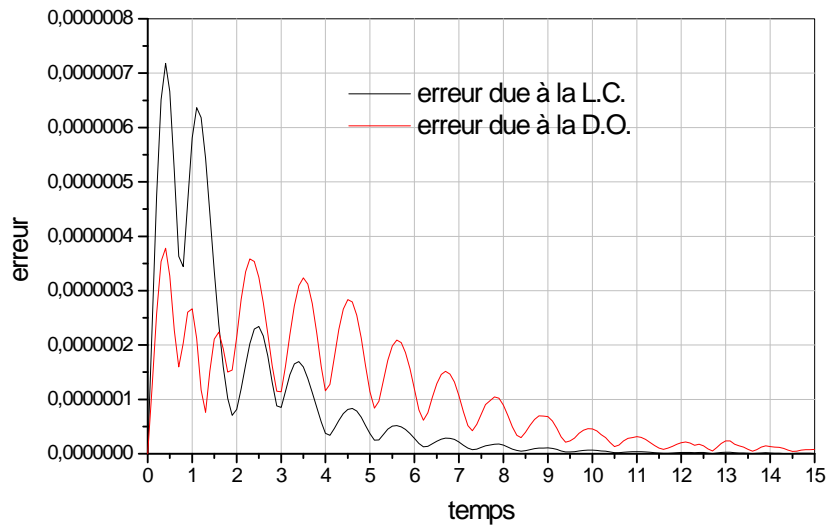


Figure 2-7-e: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (0.001, 0.0005)$, $\|x_0\| = 1.1180 \cdot 10^{-3}$

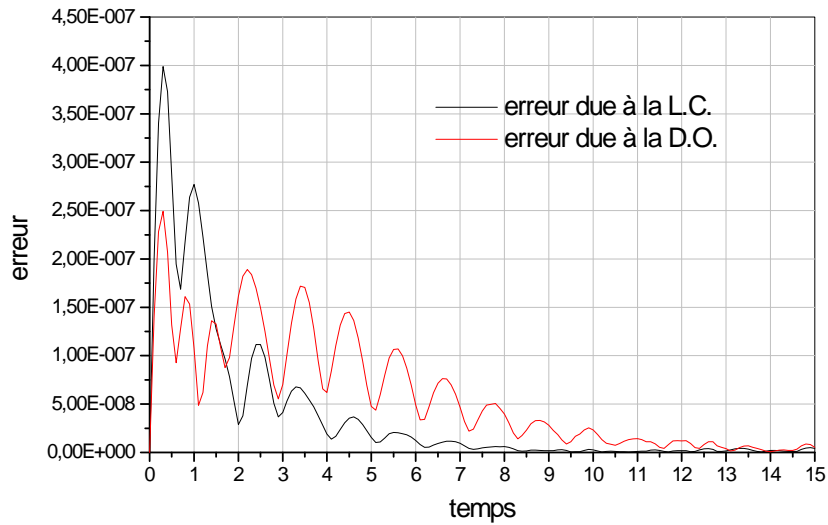


Figure 2-7-f: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$, $\|x_0\| = 5.0990 \cdot 10^{-4}$

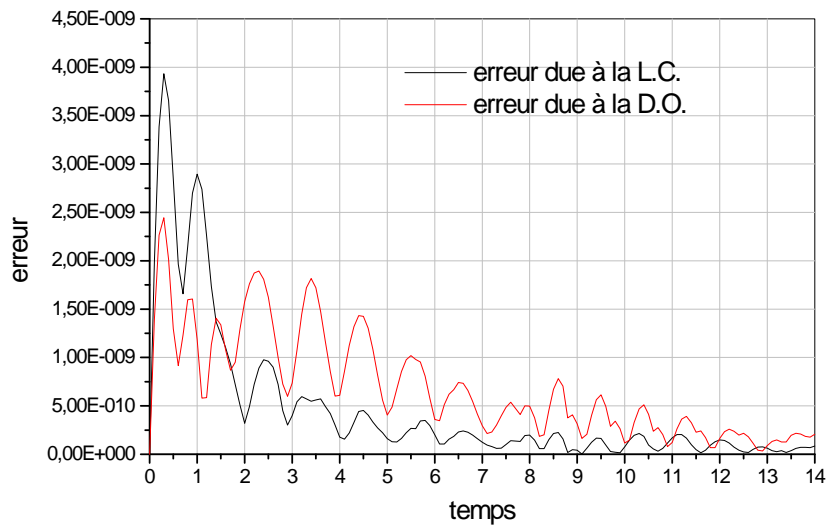


Figure 2-7-g: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5}), \|x_0\| = 5.0990 \cdot 10^{-5}$

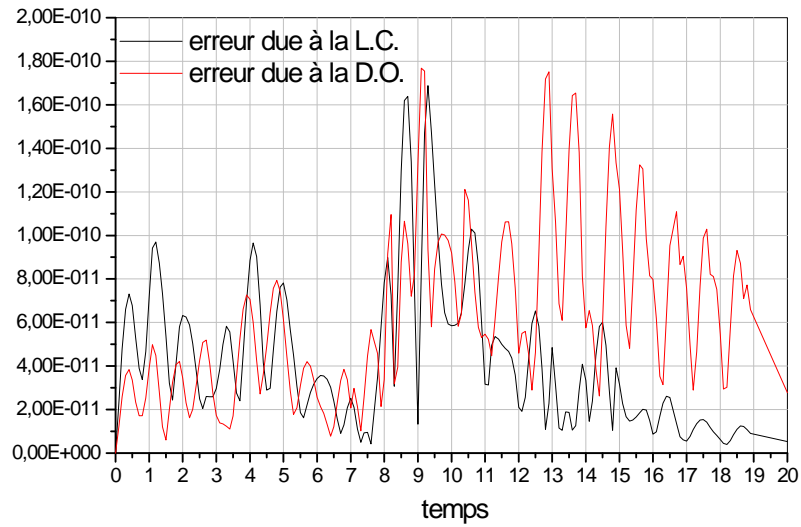


Figure 2-7-h: Tracé de l'erreur $err1$ pour une condition initiale $x_0 = (10^{-5}, 5 \cdot 10^{-6}), \|x_0\| = 1.1180 \cdot 10^{-5}$

Commentaires

D'après le tableau (2 – 2) et les figures (2 – 7) nous remarquons que

— Pour des conditions initiales $\|x_0\| > \alpha$ (suffisamment éloignées de l'origine), la linéarisation par la dérivée optimale constitue la meilleure approximation (l'erreur considérée est celle donnée par (2.19)), alors que pour une condition initiale $\|x_0\| < \alpha$, c'est la dérivation au sens de Fréchet qui est la meilleure.

— Pour une condition initiale x_0 donnée, l'approximation par la dérivation optimale est meilleure dans un voisinage de la donnée initiale, tandis que la linéarisation classique est meilleure au voisinage de l'origine (l'erreur considérée est instantanée : formule (2.18)). Ces deux aspects reflètent le fait que la linéarisation par la dérivation au sens de Fréchet (lorsqu'elle existe et lorsqu'elle est hyperbolique) constitue la meilleure approximation à l'origine.

2.4.7 Approximation des éléments de la matrice optimale

Lorsque le champ de vecteurs ne contient pas des non linéarités résultantes des produits des variables d'états, les éléments de la matrice optimale peuvent être approximés d'une manière similaire au cas scalaire, par des formules semblable à (2.12). Pour les systèmes d'ordre deux les coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{2}{x_1^2(0)} \int_0^{x_1(0)} f_1(x_1, 0) dx_1 \\ a_{12} &= \frac{2}{x_2^2(0)} \int_0^{x_2(0)} f_1(0, x_2) dx_2 \\ a_{21} &= \frac{2}{x_1^2(0)} \int_0^{x_1(0)} f_2(x_1, 0) dx_1 \\ a_{22} &= \frac{2}{x_2^2(0)} \int_0^{x_2(0)} f_2(0, x_2) dx_2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

2.4.8 Vitesse de contraction

On entend par la vitesse de contraction, la vitesse avec laquelle les solutions atteignent l'origine. En effet, les solutions d'un système linéarisé par la D.O., s'écrivant sous la forme $x(t) = e^{\tilde{A}t}x_0$, s'approchent de l'origine avec une vitesse exponentielle ; malheureusement, ceci n'est pas vrai pour tous les systèmes non linéaires, en particulier, pour ceux dont l'origine constitue un attracteur dégénéré. Bien que la linéarisation de ces systèmes par la dérivée optimale préserve la majorité des propriétés qualitatives, elle ne préserve pas la vitesse de contraction pour tous les systèmes non linéaires.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_0 = (-0.55, 0.3) \end{cases} \quad (2.25)$$

la matrice optimale est

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.1716 & 1.0298 \\ -0.9673 & -0.1979 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

La figure (2 – 8) montre le vitesse de contraction des systèmes linéarisé et non linéaire, la figure (2 – 9) montre le plan de phase, à partir du quel, on s'aperçoit que les solutions données par la dérivée optimale atteignent l'origine plus rapidement.

2.5 Applications

Dans cette section, nous allons mettre en oeuvre la procédure de linéarisation par la dérivée optimale. Pour cela nous allons considérer des systèmes physiques dont les non linéarités sont d'origines différentes, nous nous proposons d'effectuer une comparaison quantitative avec la linéarisation classique, par le calcul de l'erreur introduite par les deux approximations.

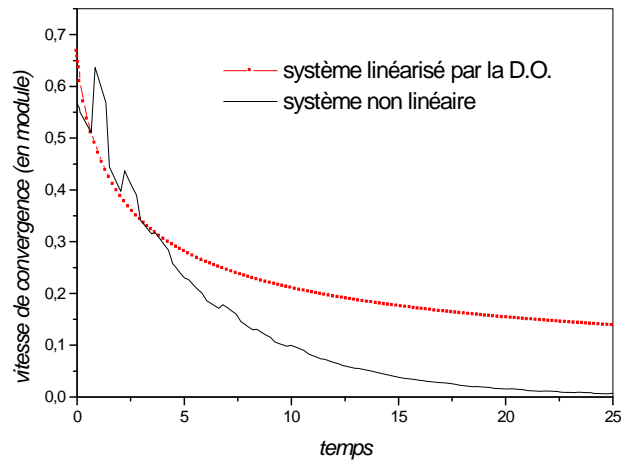


Figure 2-8: Vitesse de contraction des solutions du système (2.25) et son linéarisé par la D.O. (2.26).

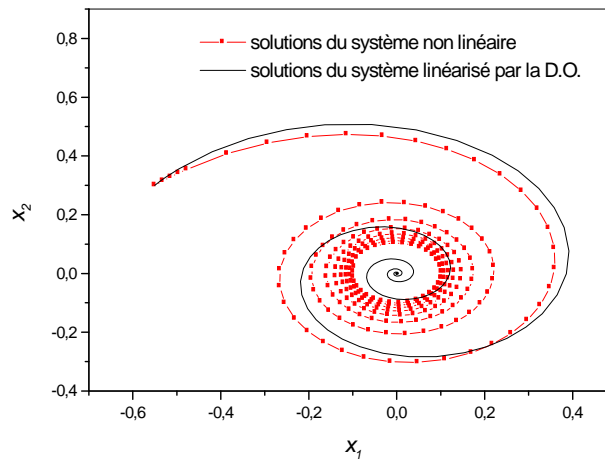


Figure 2-9: Trajectoires $(x_1(t), x_2(t))$ du système (2.25) et son linéarisé par la D.O. (2.26).

2.5.1 Circuit à diode

Considérons le circuit suivant

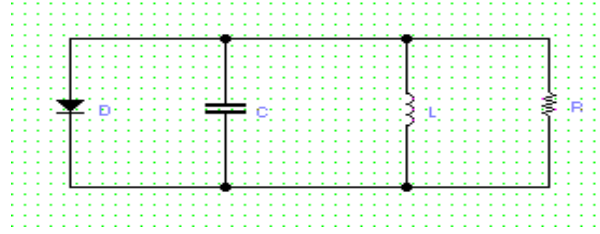


Figure 2-10.

Le caractère non linéaire du circuit provient de la présence de la diode dont la caractéristique est donnée par

$$i_d = f(v_d) = 3.85 \cdot 10^{-3} v_d + 2 \cdot 10^{-2} v_d^2 + 5 \cdot 10^{-2} v_d^3 \quad (2.27)$$

En choisissant comme variables d'état le courant de la self et la tension de la capacité, l'application des lois de Kirchhoff, conduit au système suivant

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = -i_L - \frac{v_C}{R} - f(v_C) \\ L \frac{di_L}{dt} = v_C \end{cases} \quad (2.28)$$

pour $C = 10^{-6} F$, $L = 10^{-3} H$, $R = 1 K\Omega$, et en posant $v_C = x_1$, $i_L = x_2$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -10^6 x_2 - 10^3 x_1 - 3.85 \cdot 10^3 x_1 - 2 \cdot 10^4 x_1^2 - 5 \cdot 10^4 x_1^3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 10^3 x_1 \end{cases} \quad (2.29)$$

la matrice Jacobienne à l'origine s'écrit

$$DF(0) = \begin{bmatrix} -4850 & -10^6 \\ 10^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

la matrice optimale pour $x_0 = (0.8, 0.008)$ s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -4.9617 \cdot 10^3 & -1.0005 \cdot 10^6 \\ 0.9999 \cdot 10^3 & -9.7273 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Les figures (2 – 12) et (2 – 13) montrent les solutions du système non linéaire (2.29), et de ses linéarisés par dérivation au sens de Fréchet au point d'équilibre et au sens de la dérivée optimale. La figure (2 – 14) et le tableau (2 – 3) montrent l'erreur pour les deux solutions. D'après ces figures, l'erreur introduite par la dérivation optimale est nettement inférieure à celle introduite par la linéarisation classique.

Erreur err_2 due à l'approximation du système non linéaire (2.29) par la linéarisation classique (2.30).	0.6417
Erreur err_2 due à l'approximation du système non linéaire (2.29) par la dérivation optimale (2.31).	0.0452

Tableau 2 – 3: Erreur due à l'approximation de (2.29) par la linéarisation classique et la dérivation optimale.

2.5.2 Circuit à jonction Josephson en régime libre

La figure suivante représente un circuit à jonction Josephson

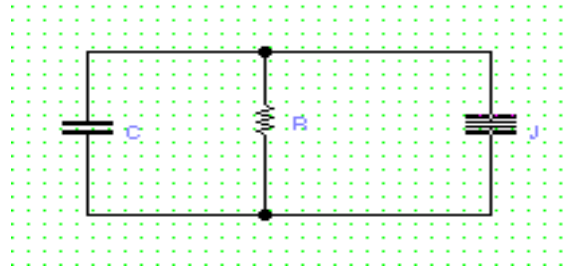


Figure 2-11.

La non linéarité est due à la jonction de Josephson qui constitue une inductance non linéaire. Le courant qui passe à travers la jonction s'écrit $i_L = I_0 \sin k\phi_L$, où ϕ_L représente

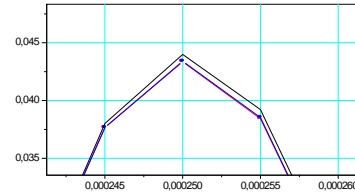
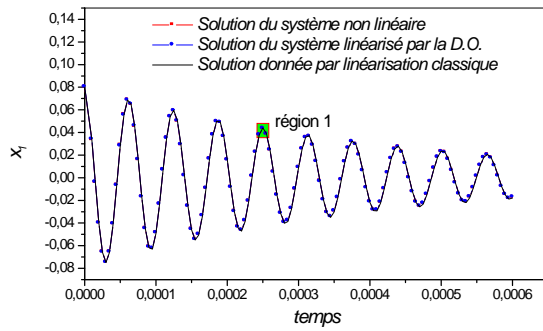


Figure 2-12-a: Solution $x_1(t)$ de (2.29) et ses Figure 2-12-b: Zooming
linéarisés classique et par la dérivation optimale, dans la région 1.
((2.30) et (2.31) Respectivement).

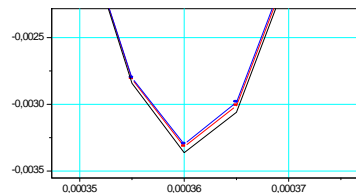
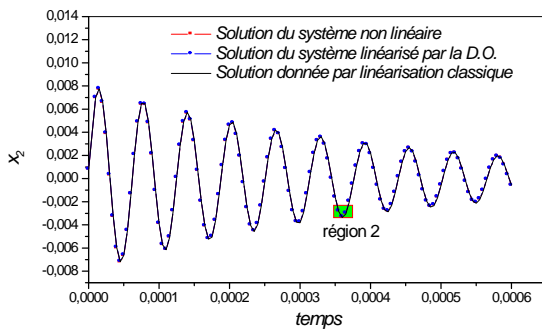


Figure 2-13-a: Solution $x_2(t)$ de (2.29) et ses Figure 2-13-b: Zooming
linéarisés classique et par la dérivation optimale, dans la région 2.
((2.30) et (2.31) Respectivement).

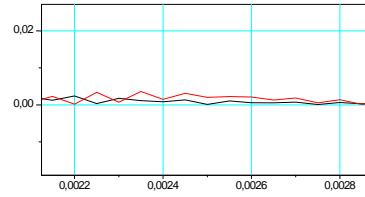
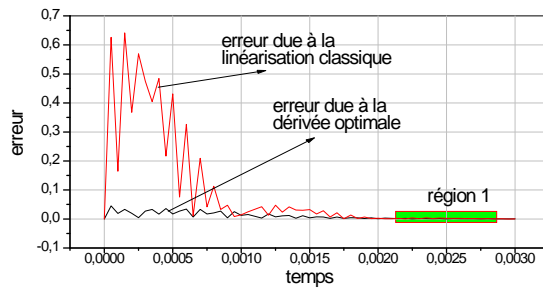


Figure 2-14-a: Erreur due à l'approximation de (2.29) par la L.C. et la D.O. ((2.30) et (2.31) Respectivement). Figure 2-14-b: Zooming dans la région 1.

le flux, $k = \frac{4\pi e}{h}$, e est la charge de l'électron et h la constante de Planck. L'équation d'état régissant le système s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} [-Gv_C - I_0 \sin k\phi_L] \\ \frac{d\phi_L}{dt} = v_C \end{cases} \quad (2.32)$$

pour $G = 0.25$ et des valeurs normalisées à 1 pour C , I_0 et k , la matrice Jacobienne à l'origine s'écrit

$$DF(0) = \begin{bmatrix} -0.25 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

la matrice optimale pour $x_0 = (0.3, 0.5)$ est la suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.2485 & -0.9688 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Les figures (2 – 15) et (2 – 16) montrent les solutions des trois systèmes, la figure (2 – 17) et le tableau (2 – 4) montrent l'erreur introduite par les deux méthodes de linéarisation. D'après la figure (2 – 17), l'erreur absolue maximale due à l'approximation par la D.O. est d'environ la moitié de celle introduite par la linéarisation classique, cette dernière devient meilleure après un temps égale à environ 15.

Erreur err_2 due à l'approximation du système non linéaire (2.32) par la linéarisation classique (2.33).	0.0293
Erreur err_2 due à l'approximation du système non linéaire (2.32) par la dérivation optimale (2.34).	0.0126

Tableau 2 – 4: Erreur due à l'approximation de (2.32) par la linéarisation classique et la dérivation optimale.

2.5.3 Dynamo

Le fonctionnement d'un dynamo peut être décrit par le modèle simplifié suivant

$$\begin{cases} J \frac{d\Omega}{dt} = -k\Omega - \mu_2 I_1 (I_1 + I_2) \\ L_1 \frac{dI_1}{dt} = -R_1 I_1 + -R_3 I_2 + \mu_1 \Omega I_1 \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} = -R_2 I_2 + \mu_2 \Omega I_1 \end{cases} \quad (2.35)$$

Les non linéarités sont quadratiques et résultent de produits de variables d'état, ce qui donne à (2.35) une similarité avec les équations de Lorentz ; dans ce cas Ω désigne la vitesse de rotation du disque, I_1, I_2 sont les courants d'induit, k : coefficient de frottement, J : moment d'inertie, μ_1, μ_2 : constantes dépendantes de la constante de flux et des résistances d'induit. En posant $x_1 = \Omega, x_2 = I_1, x_3 = I_2$, pour des valeurs numériques telles que

$$\begin{aligned} L_1 &= 0.2H, L_2 = 0.1427H, R_1 = 104.44ohm, R_2 = 74ohm, R_3 = 74ohm, \\ \mu_1 &= 108.66, \mu_2 = 77, k = 153.92, J = 78.73 \end{aligned}$$

l'équation devient

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -1.955x_1 - 0.978x_2(x_2 + x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = -522.22x_2 - 370x_3 + 543.33x_1x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = -522.22x_3 + 543.33x_1x_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

a linéarisation classique donne la matrice suivante

$$DF(0) = \begin{bmatrix} -1.955 & 0 & 0 \\ 0 & -522.22 & -370 \\ 0 & 0 & -522.22 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

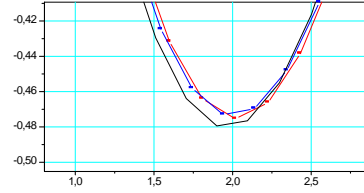
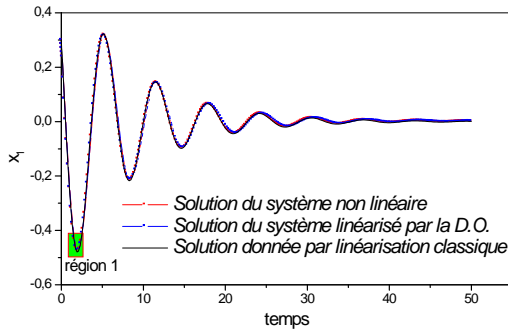


Figure 2-15-a: Solution $x_1(t)$ de (2.32) et ses linéarisés classique et par la dérivation optimale ((2.33) et (2.34) Respectivement).
 Figure 2-15-b: Zooming dans la région 1.

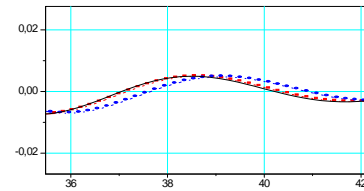
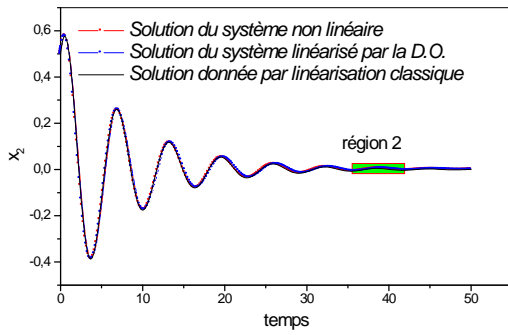


Figure 2-16-a: Solution $x_2(t)$ de (2.32) et ses linéarisés classique et par la dérivation optimale ((2.33) et (2.34) Respectivement).
 Figure 2-16-b: Zooming dans la région 2.

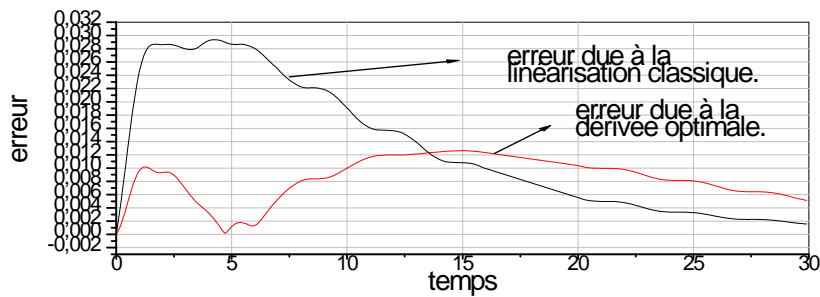


Figure 2-17: Erreur due à l'approximation
de (2.32) par la L.C. et la D.O. ((2.33)
et (2.34) Respectivement).

la matrice optimale pour $x_0 = (0.008, 0.008, 0.005)$ s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.9550 & -3.4416 \cdot 10^{-3} & -1.4839 \cdot 10^{-2} \\ 7.9744 \cdot 10^{-9} & -5.1796 \cdot 10^2 & -3.6985 \cdot 10^2 \\ 7.6688 \cdot 10^{-9} & 4.2550 & -5.2207 \cdot 10^2 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Les figures (2 – 18), (2 – 19), (2 – 20) montrent les solutions, le tableau 2 – 5 montre une comparaison quantitative

Erreur err_2 due à l'approximation du système non linéaire (2.36) par la linéarisation classique (2.37).	$2.7568 \cdot 10^{-5}$
Erreur err_2 due à l'approximation du système non linéaire (2.36) par la dérivation optimale (2.38).	$9.0425 \cdot 10^{-6}$

Tableau 2 – 5: Erreur due à l'approximation de (2.36) par la linéarisation classique et la dérivation optimale.

2.5.4 Commentaires

Les exemples présentés montrent le bon accord de la dérivation optimale avec le système non linéaire. En effet, le tracé des solutions reflète la similitude des trajectoires, d'un autre côté, le calcul d'erreurs montre que la dérivée optimale constitue la meilleure approximation dans un voisinage du point de départ.

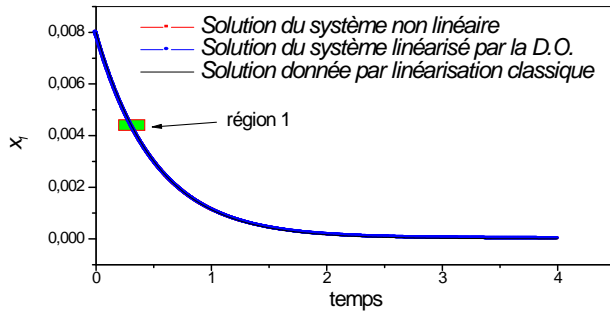


Figure 2-18-a: Solution $x_1(t)$ de (2.36) et ses linéarisés classique et par la dérivation optimale, ((2.37) et (2.38) Respectivement).

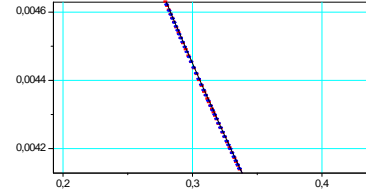


Figure 2-18-b: Zooming dans la région 1.

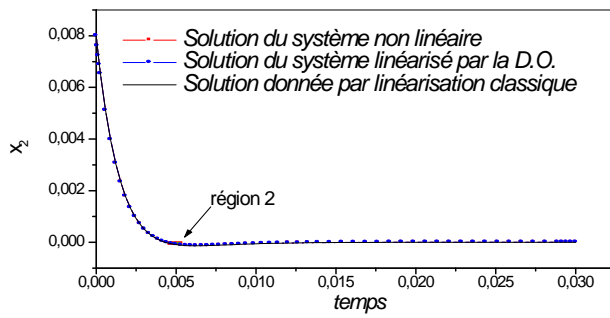


Figure 2-19-a: Solution $x_2(t)$ de (2.36) et ses linéarisés classique et par la dérivation optimale, ((2.37) et (2.38) Respectivement).

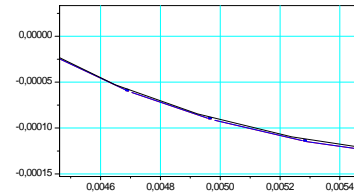


Figure 2-19-b: Zooming dans la région 2.

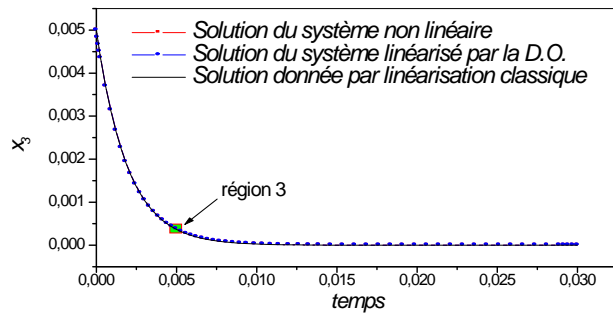


Figure 2-20-a: Solution $x_3(t)$ de (2.36) et ses linéarisés classique et par la dérivation optimale, ((2.37) et (2.38) Respectivement).

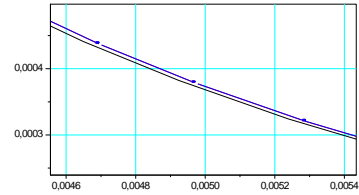


Figure 2-20-b: Zooming dans la région 3.

Chapitre III

**Stabilité Asymptotique,
Instabilité par la Dérivée Optimale.**

Chapitre 3

Stabilité asymptotique, Instabilité par la dérivée optimale

3.1 Introduction

S'agissant de l'étude de la stabilité d'un système non linéaire, et avec la difficulté de la recherche d'une fonction de Lyapunov, la linéarisation classique présente un moyen important, qui souvent permet de donner une bonne approximation, cependant, ceci n'est pas toujours vrai, en particulier dans les cas suivants

- i) La dérivée au sens de Fréchet au point d'équilibre n'existe pas, c'est le cas où le champ de vecteurs présente des discontinuités au voisinage de l'équilibre.
- ii) La matrice Jacobienne au voisinage de l'équilibre présente au moins une valeur propre nulle, ou une paire de valeurs propres purement imaginaires.
- iii) Puisque, l'équivalence topologique entre le système non linéaire et son linéarisé tangent classe les systèmes selon la stabilité ou l'instabilité, il arrive que, la linéarisation classique confond entre un noeud et un foyer stables (respectivement instables).

Ces écueils ont justifié l'introduction d'autres méthodes d'analyse de la stabilité, [Hahn, 1967], et [Gruyich et al, 1987] "**fonctions de Lyapunov vectorielles**", [Richard, Borne, Gentina, 1988] "**normes vectorielles et majoration des systèmes non linéaires**", [39].

Une autre approche a été de substituer à la notion de dérivation, la notion de sous différentiel, on obtient ainsi une équation différentielle multivoque. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la stabilité non linéaire par linéarisation au sens de la dérivée optimale, notamment lorsque la linéarisation classique n'existe pas, ou lorsqu'elle aboutit à un équilibre non hyperbolique. L'hypothèse sur le spectre de $DF(x)$, $x \neq 0$, n'implique pas la stabilité de l'origine du fait que la stabilité au sens de Lyapunov de ce dernier n'a pas été supposée.

3.2 Stabilité dans le cas scalaire

3.2.1 Cas où la dérivée au sens de Fréchet n'existe pas

Le problème de la stabilité par linéarisation se pose en premier lieu lorsque la dérivée au sens de Fréchet au point d'équilibre n'existe pas. C'est le cas par exemple, du système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - \sin |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Le système (3.1) est non différentiable à l'origine, la dérivée optimale pour $x_0 = 1$, s'écrit : $\tilde{a} = -1.9194$ et pour $x_0 = -1$, s'écrit : $\tilde{a} = -0.0806$. L'origine de (3.1) est donc, asymptotiquement stable, bien que les vitesses de contraction pour x_0 positif ou négatif soient très différentes, figures (3-1), (3-2).

Lorsque la dérivée au sens de Fréchet existe, on distingue deux cas qu'on étudiera par la suite.

3.2.2 Cas hyperbolique

Dans le cas scalaire, le calcul par la dérivée optimale conduit à des résultats identiques à ceux donnés par la linéarisation classique, et donc ne donne aucun renseignement supplémentaire d'un point de vue qualitatif.

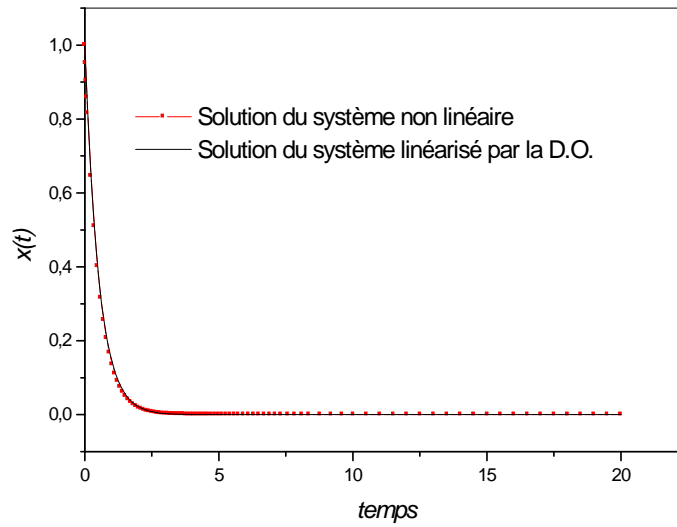


Figure 3-1: représente la variation de la solution $x(t)$ du système non linéaire (3.1) et son linéarisé par la dérivée optimale pour $x_0 = 1$.

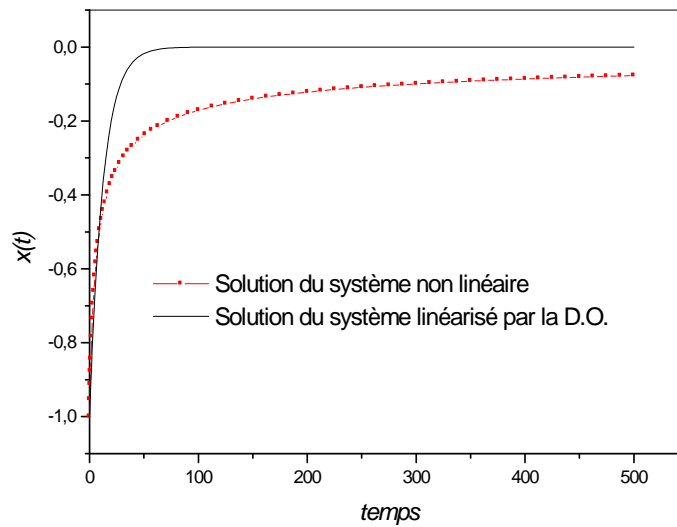


Figure 3-2: représente la variation de la solution $x(t)$ du système non linéaire (3.1) et son linéarisé par la dérivée optimale pour $x_0 = -1$.

3.2.3 Cas non hyperbolique

Dans ce cas, la dérivée de f au point d'équilibre est nulle, la stabilité de l'équilibre dépend du premier terme non linéaire, le système (2.6) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = bx^k + g(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $k \geq 2$, $b \in \mathbb{R}$, bx^k est le premier terme non linéaire, $g(x)$ représente les termes d'ordre supérieur ou égal à $k + 1$. Le calcul de la dérivée optimale se fait en intégrant sur \mathbb{R}^- ou \mathbb{R}^+ selon que $f'(x_0)$ soit positive ou négative. Nous allons dans ce qui suit étudier la stabilité dans des cas particuliers, en fonction de b et de k . Dans le calcul de \tilde{a} , nous allons négliger les termes de $g(x)$ puisque ; au voisinage de l'origine, ces termes n'apportent aucune modification qualitative tant que le premier terme non linéaire n'est pas nul, la dérivée optimale s'écrit

$$\tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} bx^k dx = \frac{2b}{k+1} x_0^{k-1}.$$

Il est clair que le signe de \tilde{a} dépend seulement de b et de k , nous distinguons les cas suivants

— 1^{er} cas : b positif, k impair

Dans ce cas, \tilde{a} est toujours positive le système (3.2) est instable.

— 2^{ème} cas : b négatif, k impair

Dans ce cas, \tilde{a} est toujours négative le système (3.2) est asymptotiquement stable.

— 3^{ème} cas : b de signe quelconque, k pair

Dans ce cas, l'hypothèse h_2 ne peut être vérifiée pour tout choix de $x_0 \in]-\alpha, \alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (cette hypothèse est vérifiée pour $x_0 \in]0, \alpha[$ quand b est négatif et pour $x_0 \in]-\alpha, 0[$ quand b est positif). On se propose, pour calculer la dérivée optimale, de diviser l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ en deux sous intervalles $]-\alpha, 0[$ et $]0, \alpha[$, puis calculer \tilde{a} sur chacun d'eux. Nous aboutissons finalement à deux dérivées optimales à gauche et à droite de l'équilibre pour le même système où

—Une dérivée optimale de type stable pour des conditions initiales x_0 situées dans un sous intervalle et donnant naissance à des solutions qui tendent vers l'origine quand $t \rightarrow +\infty$.

—Une dérivée optimale de type instable pour des conditions initiales x_0 situées dans l'autre sous intervalle et donnant naissance à des solutions qui tendent vers l'origine quand $t \rightarrow -\infty$. Certains auteurs utilisent la terminologie "demi stable" pour désigner la nature de l'équilibre dans le troisième cas.

Remarque 3.1

Le rôle de la dérivée optimale dans l'étude de la stabilité est évident dans le cas scalaire [45], [49], [50], [56] ; puisque la fonction $x \rightarrow v(x) = x^2 \tilde{a}(x)$ est une fonction de Lyapunov pour l'équation non linéaire. Donc si $x(t)$ est une solution de l'équation (3.2), par dérivation par rapport à t on obtient

$$\frac{d}{dt} [(x(t))^2 \tilde{a}(x(t))] = (f(x(t)))^2. \quad (3.3)$$

Puisque, d'un autre côté $v(x) < 0$, (à cause l'hypothèse h2), nous obtenons $v(x(t)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, et donc $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$,

3.2.4 Application

Comme application, nous allons introduire trois exemples dont chacun représente un des cas précédents.

Exemple 5 *Considérons le circuit suivant [26]*

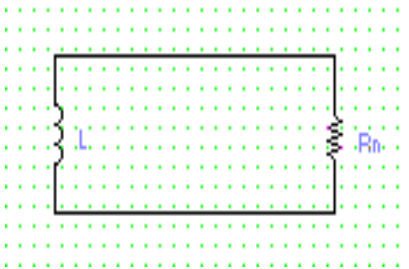


Figure 3-3.

Où R_n représente une résistance non linéaire dont la caractéristique s'écrit : $v = ri^3$, l'application des lois de Kirchhoff conduit au système suivant

$$L \frac{di}{dt} = -ri^3. \quad (3.4)$$

En normalisant les valeurs de L et r à 1 on obtient

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \quad (3.5)$$

son linéarisé au sens de la dérivée optimale pour $x_0 = 1$, s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = -0.5x \quad (3.6)$$

Exemple 6 Considérons le circuit suivant [26]

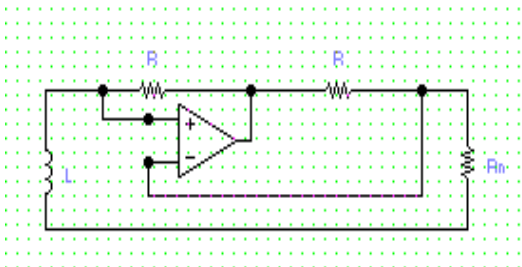


Figure 3-4.

L'application des lois de Kirchhoff conduit à

$$L \frac{di}{dt} = ri^3. \quad (3.7)$$

Nous obtenons, après la normalisation des valeurs de L et r à 1

$$\frac{dx}{dt} = x^3 \quad (3.8)$$

son linéarisé au sens de la dérivée optimale pour $x_0 = 1$, s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x. \quad (3.9)$$

Les figures (3 – 5) et (3 – 7) représentent les champs de vecteurs des systèmes non linéaires (3.5) et (3.8) respectivement, les figures (3 – 6) et (3 – 8) représentent les champs de vecteurs linéarisés par la d.o. et, montrent la concordance de la dérivation optimale avec le système non linéaire.

Exemple 7 Nous considérons le circuit de la figure (3 – 3), avec une non linéarité de la forme $v = ri^2$, nous obtenons finalement le système suivant

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 \quad (3.10)$$

son linéarisé au sens de la dérivée optimale dans le demi plan $x > 0$, pour $x_0 = 1$, s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = -0.66x \quad (3.11)$$

et dans le demi plan $x < 0$, pour $x_0 = -1$, le linéarisé s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = 0.66x. \quad (3.12)$$

La figure (3 – 9) représente le champ de vecteurs du système non linéaire, les figures

(3 – 10), (3 – 11) *représentent les champs de vecteurs des systèmes linéarisés au sens de la d.o. dans les deux demi plans.*

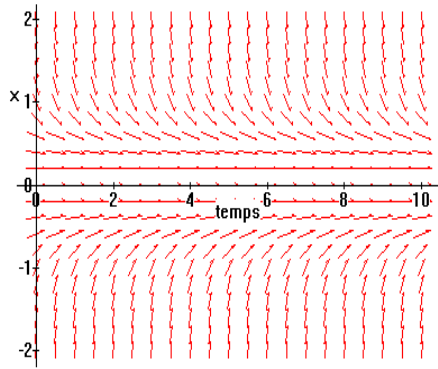


Figure 3-5: représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.5).

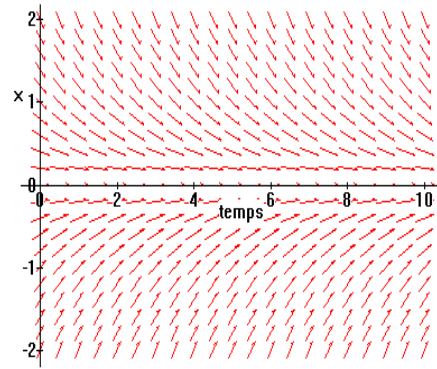


Figure 3-6: Champ de vecteurs du linéarisé par la d.o. (3.6) du système non linéaire (3.5).

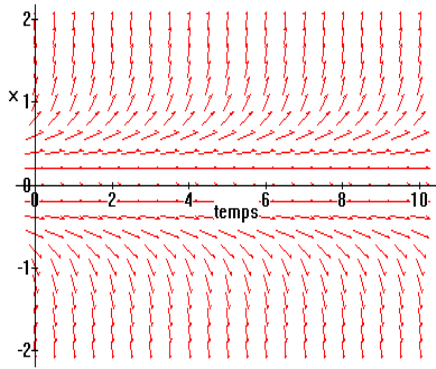


Figure 3-7: représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.8).

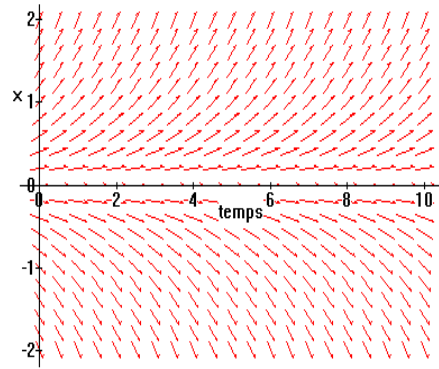


Figure 3-8: Champ de vecteurs du linéarisé par la d.o. (3.9) du système non linéaire (3.8).

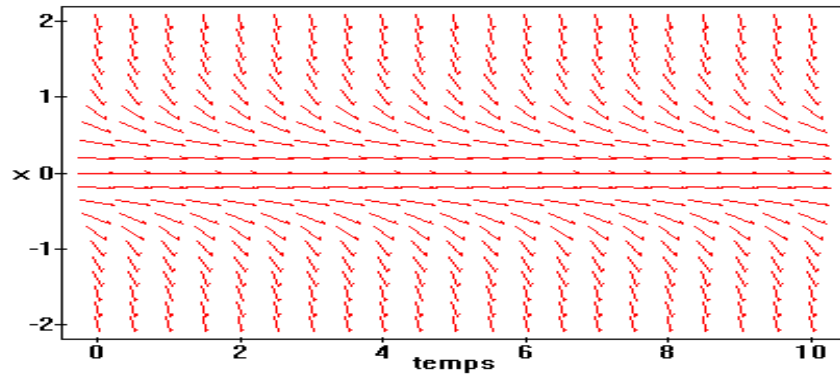


Figure 3-9: représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.10).

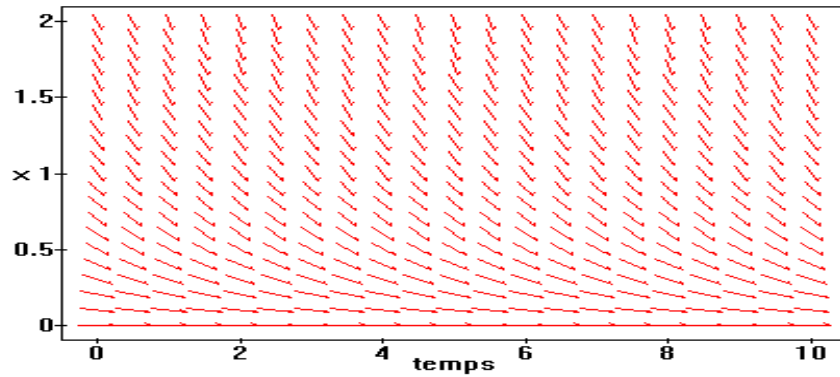


Figure 3-10: Champ de vecteurs linéarisé (3.11)
du système (3.10) dans le demi plan $x > 0$.

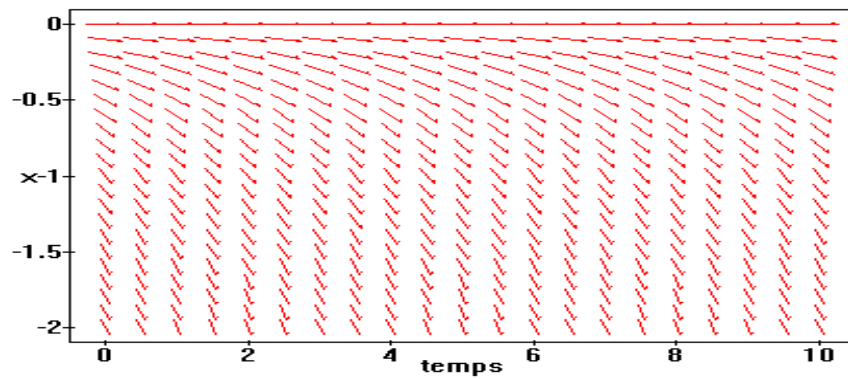


Figure 3-11: Champ de vecteurs linéarisé (3.12)
du système (3.10) dans le demi plan $x < 0$.

3.3 En présence de bifurcations élémentaires

Dans le cas où le champ de vecteurs dépend d'un ou de plusieurs paramètres, la structure qualitative peut changer quand les paramètres varient. En particulier, des points d'équilibre peuvent être créés, détériorés ou changer de nature. Ces changements dynamiques sont appelés bifurcations, les valeurs de paramètres pour lesquelles une bifurcation a lieu sont appelées points de bifurcation.

Dans cette étude il ne s'agit pas, comme dans la section précédente, de trouver une approximation linéaire unique au système (2.6), puisque les systèmes linéaires subissent rarement une bifurcation, mais plutôt de linéariser par la dérivée optimale pour plusieurs plages du paramètre de bifurcation en particulier à la valeur de bifurcation, cela va nous permettre de juger l'aptitude de la d.o. de suivre des éventuels échanges de la stabilité. Nous définissons la dérivée optimale paramétrée $a(\gamma, x_0)$.

3.3.1 Bifurcation point selle-noeud

La bifurcation point selle-noeud représente le mécanisme pour lequel les points d'équilibre sont détruits, la forme normale de cette bifurcation est la suivante

$$\frac{dx}{dt} = \gamma - x^2. \quad (3.13)$$

Nous allons voir la variation de la dynamique de (3.13) quand γ varie

1^{er} cas : $\gamma < 0$

Le système (3.13) ne possède aucun point d'équilibre.

2^{ème} cas : $\gamma = 0$

l'origine est le seul point d'équilibre. L'analyse par la linéarisation classique ne permet pas de déterminer la stabilité, cependant, l'analyse par la dérivée optimale conduit à

$$\tilde{a} = -\frac{2}{3}x_0$$

qui est de type instable quand $x_0 \in]-\alpha, 0[$ et de type stable quand $x_0 \in]0, \alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'origine est donc "demi stable".

3^{ème} cas : $\gamma = 0$

Le système (3.13) possède deux points d'équilibre : $x_{eq1} = -\sqrt{\gamma}$ et $x_{eq2} = \sqrt{\gamma}$, la linéarisation classique et la linéarisation par la dérivée optimale donnent

—Au voisinage de x_{1eq}

$$f'(x_{1eq}) = 2\sqrt{\gamma} \quad (3.14)$$

$$\tilde{a} = 2 \left[\sqrt{\gamma} + \frac{1}{3}x_0 \right]. \quad (3.15)$$

—Au voisinage de x_{2eq}

$$f'(x_{eq2}) = -2\sqrt{\gamma} \quad (3.16)$$

$$\tilde{a} = 2 \left[-\sqrt{\gamma} + \frac{1}{3}x_0 \right]. \quad (3.17)$$

Donc, par les deux linéarisations x_{1eq} est instable, x_{2eq} est asymptotiquement stable.

Quand $\gamma = 0$, le système (3.13) possède un seul point d'équilibre, de type demi stable.

En effet, pour $\gamma < 0$ et tendant vers 0, les deux points d'équilibre s'approchent l'un de l'autre et deviennent confondus à la valeur de bifurcation $\gamma = 0$.

3.3.2 Bifurcation transcritique

Dans certaines situations, le point d'équilibre doit toujours exister, dans ce cas la bifurcation est caractérisée par un échange dans la stabilité de l'équilibre, la bifurcation transcritique est un modèle standard pour un tel échange, sa forme normale est la suivante

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - x^2. \quad (3.18)$$

Tout comme le cas précédent on distingue trois domaines différents en fonction γ .

1^{er} cas : $\gamma < 0$

Dans ce cas le système (3.18) possède deux points d'équilibre $\mathbf{x}_{1eq} = 0$ et $\mathbf{x}_{2eq} = \gamma$.

L'analyse de la stabilité par la linéarisation classique et par la dérivée optimale donne

—Au voisinage de l'origine

$$f'(0) = \gamma$$
$$\tilde{a} = \gamma - \frac{2}{3}x_0.$$

—Au voisinage de $\mathbf{x}_{2eq} = \gamma$

$$f'(\mathbf{x}_{2eq}) = -\gamma$$
$$\tilde{a} = -\gamma - \frac{2}{3}x_0.$$

Donc, par les deux linéarisations, \mathbf{x}_{1eq} est asymptotiquement stable, \mathbf{x}_{2eq} est instable.

2^{ème} cas : $\gamma = 0$

Quand γ s'approche de 0, le point d'équilibre \mathbf{x}_{2eq} s'approche de l'origine. A la valeur de bifurcation, les deux points sont confondus. L'analyse de la stabilité par la linéarisation classique aboutit à un cas dégénéré, par la dérivée optimale on obtient

$$\tilde{a} = -\frac{2}{3}x_0$$

ce qui donne deux approximations optimales dont l'une est de type stable, l'autre est de type instable, selon la position de x_0 , l'équilibre est demi stable.

3^{ème} cas : $\gamma > 0$

Le point d'équilibre $\mathbf{x}_{2eq} = \gamma$ apparaît de nouveau, l'analyse de la stabilité par les deux méthodes donne

—Au voisinage de l'origine

$$f'(0) = \gamma$$
$$\tilde{a} = \gamma - \frac{2}{3}x_0.$$

—Au voisinage de $\mathbf{x}_{2eq} = \gamma$

$$f'(\mathbf{x}_{2eq}) = -\gamma$$

$$\tilde{a} = -\gamma - \frac{2}{3}x_0.$$

L'origine est donc instable, le deuxième point d'équilibre $\mathbf{x}_{2eq} = \gamma$ est asymptotiquement stable, il s'est produit donc un échangeement de stabilité entre les deux points d'équilibre.

3.3.3 Bifurcation fourche

Cette bifurcation est souvent commune aux systèmes physiques présentant une symétrie, elle existe en deux variétés, nous allons nous contenter d'étudier la bifurcation fourche supercritique qui a comme forme normale

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - x^3. \quad (3.19)$$

Notons que cette équation est invariante sous un changement de variable $x \rightarrow -x$, l'étude du comportement de (3.19) en fonction de γ se fait comme suit

1^{er} cas : $\gamma < 0$

Le système (3.19) possède un seul point d'équilibre situé à l'origine, la linéarisation donne

$$f'(0) = \gamma$$

$$\tilde{a} = \gamma - \frac{x_0^2}{2}$$

l'origine est donc asymptotiquement stable.

2^{ème} cas : $\gamma = 0$

L'origine est toujours le seul point d'équilibre, il constitue un point d'équilibre dégénéré, la linéarisation classique ne permet pas de déterminer sa nature, cependant, il est asymptotiquement stable par la dérivée optimale, puisque

$$\tilde{a} = -\frac{x_0^2}{2}.$$

3^{ème} cas : $\gamma > 0$

Dans ce cas, en plus de l'origine, deux nouveaux points d'équilibre apparaissent, l'analyse de la stabilité donne

—Au voisinage de $x_{1eq} = -\sqrt{\gamma}$

$$f'(x_{1eq}) = -2\gamma$$
$$\tilde{a} = -2\gamma - \frac{x_0^2}{2} + 2x_0\sqrt{\gamma}.$$

—Au voisinage de $x_{2eq} = \sqrt{\gamma}$

$$f'(x_{2eq}) = -2\gamma$$
$$\tilde{a} = -2\gamma - \frac{x_0^2}{2} - 2x_0\sqrt{\gamma}.$$

—Au voisinage de l'origine

$$f'(0) = \gamma$$
$$\tilde{a} = \gamma - \frac{x_0^2}{2}$$

donc, par les deux méthodes de linéarisation, x_{1eq} et x_{2eq} sont asymptotiquement stables, l'origine est instable.

Remarque 3.2 *Dans tout le calcul précédent, x_0 est voisin de zero, en effet, les différents points x_0 sont obtenus après une translation d'un point arbitraire pris au voisinage de l'équilibre.*

3.3.4 Conclusion

L'intérêt présenté par la dérivée optimale réside surtout, dans la détermination de la nature de l'équilibre à la valeur de bifurcation, du fait, qu'à cette valeur, la linéarisation classique tombe sur un cas dégénéré et ne permet pas donc de déterminer la nature de

l'équilibre. Les figures (3 – 12) à (3 – 14) montrent les dérivées optimales en fonction du paramètre de bifurcation.

3.4 Application de la dérivée optimale scalaire aux systèmes conservatifs d'ordre deux.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'appliquer la méthode de la dérivée optimale aux systèmes conservatifs, pour la détermination de la nature de l'équilibre, en particulier dans les cas dégénérés. Rappelons que les points d'équilibre des systèmes conservatifs ne sont jamais attracteurs, de ce fait, la procédure itérative ne converge pas, l'équation (1.36) étant linéaire, nous procéderons par la linéarisation de $v(x_1)$ par la dérivation optimale scalaire pour la détermination de la nature du point d'équilibre. Puisque la solution de la seconde équation différentielle s'écrit sous la forme $x_2(t) = x_2(0) - \int_0^t v(x_1(t)) dt$, nous supposons que $x_1(0) = x_2(0)$, (après une translation éventuelle à l'origine), cela va nous permettre de déterminer la nature du point d'équilibre même dans le cas dégénéré : $V''(x_{1eq}) = 0$.

Après toute translation éventuelle du point d'équilibre à l'origine, la relation (2.12) devient (nous notons $x_1(0) = x_{01}$).

$$\tilde{a}(x_{01}) = \frac{2}{x_{01}^2} \int_0^{x_{01}} (-v(x_1)) dx_1. \quad (3.20)$$

En tenant compte de (1.38) il vient

$$\tilde{a}(x_{01}) = \frac{-2}{x_{01}^2} V(x_{01}). \quad (3.21)$$

La dérivée optimale dépend seulement de la valeur de x_{01} et de la fonction potentielle, la détermination de la nature d'un point d'équilibre est simple et, dépend seulement du signe de \tilde{a} , le système linéarisé du système conservatif s'écrit

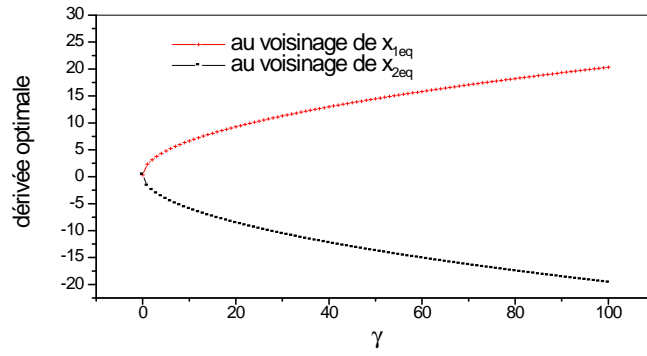


Figure 3-12: Dérivée optimale en fonction du paramètre de bifurcation, cas de la bifurcation point selle noeud.

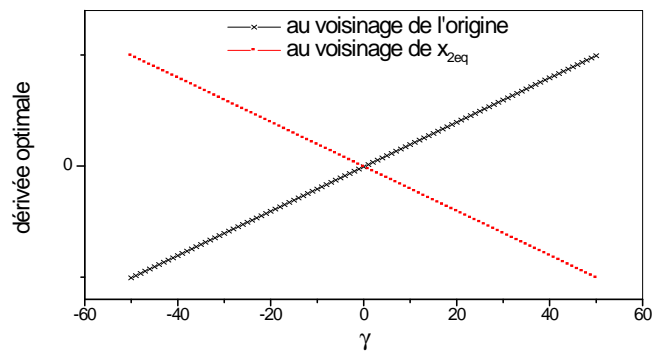


Figure 3-13: Dérivée optimale en fonction du paramètre de bifurcation, cas de la bifurcation transcritique.

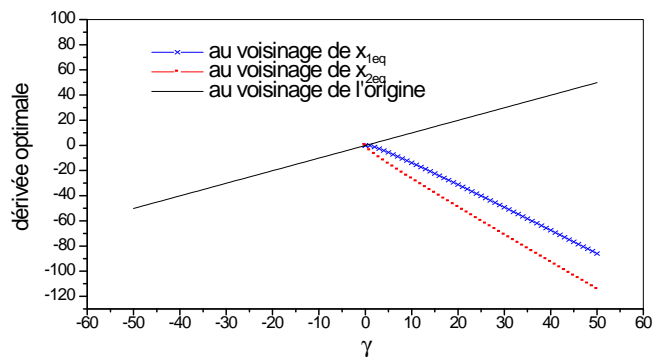


Figure 3-14: Dérivée optimale en fonction du paramètre de bifurcation, cas de la bifurcation fourche.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{a} & 0 \end{pmatrix} x. \quad (3.22)$$

Donc

—Si \tilde{a} est négative, le point d'équilibre $x_{eq}(x_{1eq}, 0)$ est un centre.

—Si \tilde{a} est positive, le point d'équilibre est un point selle.

Considérons l'exemple du premier chapitre

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_1^3 \end{cases}. \quad (3.23)$$

Ce système possède trois points d'équilibre, la linéarisation par la dérivée optimale donne

— *au point* $x_{1eq} = 0$

Nous avons $\tilde{a} = 0.995$, pour $x_0 = (0.1, 0.1)$. Le linéarisé de (3.23) est le suivant

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.995 & 0 \end{pmatrix} x \quad (3.24)$$

l'origine est donc un point selle.

— *au point* $x_{1eq} = 1$

Nous avons $\tilde{a} = -2.1012$, pour $x_0 = (1.05, 0.05)$, le système linéarisé de (3.23) au voisinage de ce point est

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2.1012 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

le point d'équilibre $x_{eq} = (1, 0)$ est un centre.

— *au point* $x_{1eq} = -1$

Nous avons $\tilde{a} = -1.9012$, $x_0 = (-1.05, 0.05)$, le système linéarisé de (3.23) au voisinage

de ce point est

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1.9012 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

le point d'équilibre $x_{eq} = (-1, 0)$ est donc un centre.

La figure (3 – 15) montre le champ de vecteurs du système linéarisé au voisinage de l'origine, la figure (3 – 16) montre le plan de phase du système non linéaire (3.23) et son linéarisé (3.25) au voisinage de $x_{eq} = (1, 0)$, la figure (3 – 17) montre le plan de phase du système non linéaire (3.23) et son linéarisé (3.26) au voisinage de $x_{eq} = (-1, 0)$.

Exemple 8 *Un cas dégénéré*

Considérons le système conservatif suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = bx_1^3 \end{cases} \quad (3.27)$$

La fonction potentielle est donnée par $V(x_1) = -\frac{b}{4}x_1^4$, l'origine correspond à un point d'équilibre dégénéré puisque $V''(0) = 0$. Dans ce cas il est impossible de déterminer la nature de ce point par la deuxième dérivée de l'énergie potentielle, le calcul de la dérivée optimale donne $\tilde{a} = \frac{2b}{4}x_{01}^2$, ce qui permet de conclure que l'origine est un point selle quand $b > 0$ et un centre quand $b < 0$. Les figures (3 – 19) et (3 – 20) montrent le champ de vecteurs du système non linéaire (3.27).

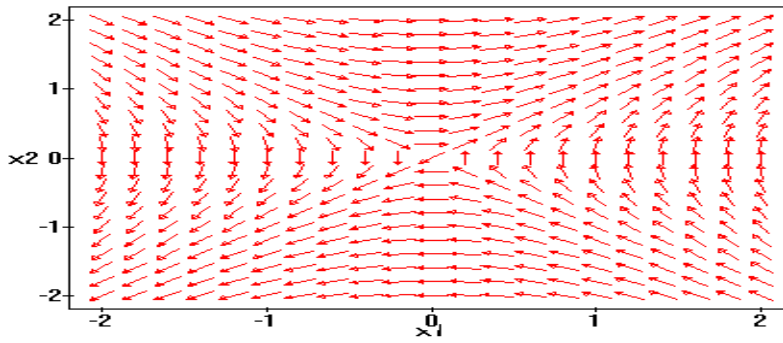


Figure 3-15: représente le champ de vecteurs du système (3.24), linéarisé par la d.o. de (3.23) au voisinage de l'origine.

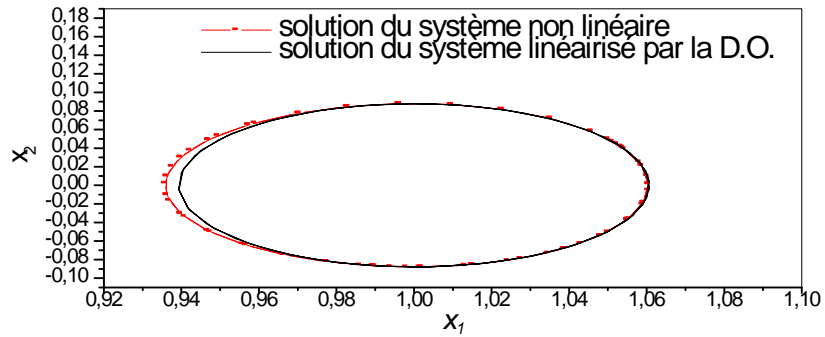


Figure 3-16: représente le plan de phase $(x_1(t), x_2(t))$ du système non linéaire (3.23) et son linéarisé au sens de la d.o. (3.25) au voisinage de $(1,0)$.

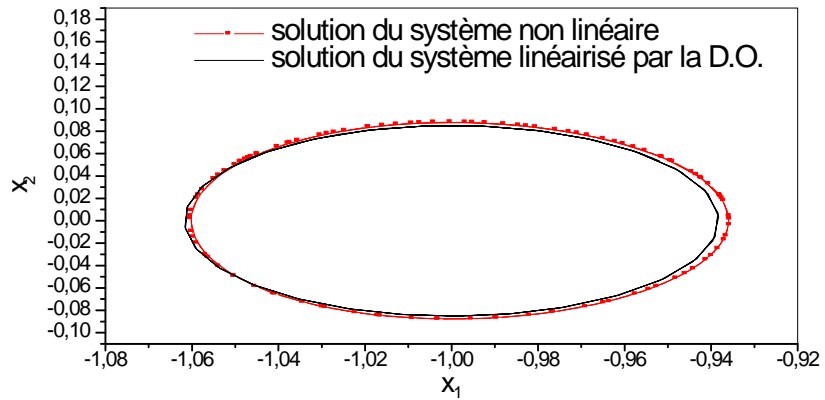


Figure 3-17: représente le plan de phase $(x_1(t), x_2(t))$ du système non linéaire (3.23) et son linéarisé au sens de la d.o. (3.26) au voisinage de $(-1,0)$.

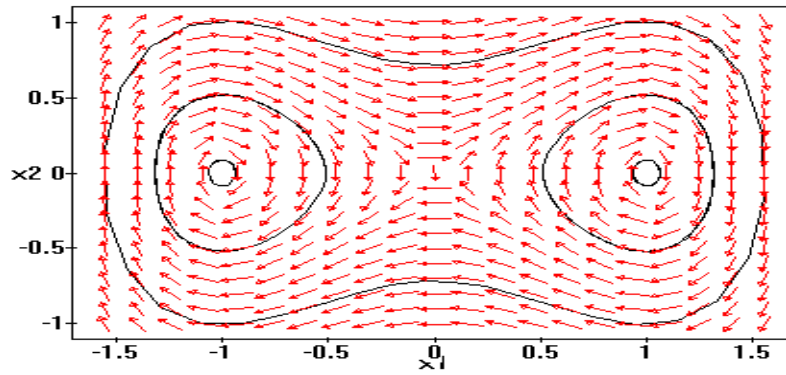


Figure 3-18: représente le portrait de phase du système non linéaire (3.23).

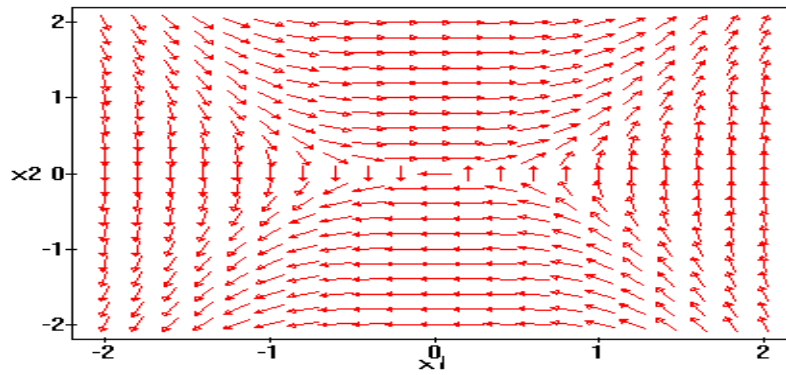


Figure 3-19: représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.27) pour $b > 0$.

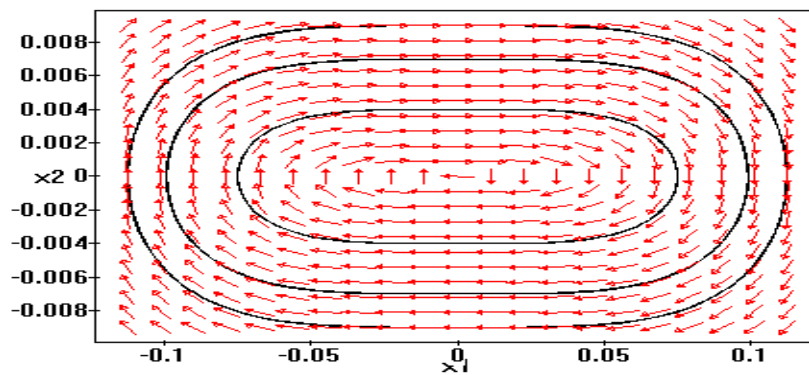


Figure 3-20: représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.27) pour $b < 0$.

3.5 Stabilité dans le plan de phase.

3.5.1 Cas où la linéarisation classique n'existe pas.

Les théorèmes de linéarisation classique ne sont pas applicables, puisque la Jacobienne au point d'équilibre n'existe pas, une telle situation peut être rencontrée, par exemple, dans le cas du circuit suivant

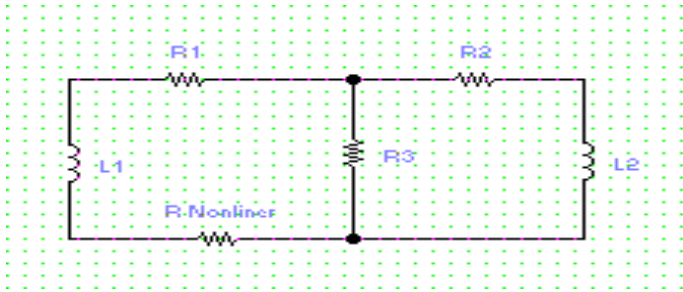


Figure 3-21-a

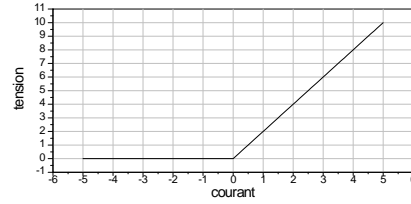


Figure 3-21-b: Caractéristique non linéaire.

Ce circuit contient une résistance non linéaire dont la caractéristique (*figure (3 – 21 – b)*) présente une linéarité de type valeur absolue : $v_N = R_0 (i_N + |i_N|)$, L'équation d'état est la suivante

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} &= -(R_1 + R_3 + R_0) i_{L_1} - R_3 i_{L_2} - R_0 |i_{L_1}| \\ L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} &= -R_3 i_{L_1} - (R_2 + R_3) i_{L_2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

En posant $x_1 = i_{L_1}$ et $x_2 = i_{L_2}$, et en normalisant les valeurs des composants à 1, l'application de la dérivée optimale pour $x_0 = (0.5, 0.3)$ et $x_0 = (-0.5, 0.3)$ conduit, respectivement aux systèmes linéaires suivants

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -3.9524x_1 - 1.0686x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - 2x_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

et

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad (3.30)$$

Les matrices optimales prévoient un noeud stable à l'origine, puisque, leurs valeurs propres sont réelles négatives. Les solutions du système non linéaire (3.28) et ses linéarisés au sens de la dérivation optimale (3.29) et (3.30), sont représentées dans le plan de phase (*figure (3 – 22)*), les figures (3 – 23) et (3 – 24) représentent les champs de vecteurs.

3.5.2 En présence d'une valeur propre nulle.

Intoduction.

Nous avons vu précédemment, que lorsque la matrice Jacobienne à de l'équilibre présente au moins une valeur propre nulle, le système non linéaire et son linéarisé classique ne sont plus équivalents (différentiablement puisque le problème de résonance existera toujours dans cette situation, topologiquement à cause du théorème de Hartman et Grobman), dans ce cas les non linéarités influent sur la stabilité et ne peuvent pas être négligées. Nous nous proposons donc, d'étudier le comportement de tels systèmes par linéarisation par la dérivée optimale.

Linéarisation par la dérivée optimale.

Considérons un système non linéaire d'ordre deux

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.31)$$

La fonction vectorielle $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est supposée localement Lipschizienne, avec $F(0) = 0$. Dans le cas où la matrice Jacobienne présente une valeur propre nulle,

son déterminant est nul : $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$. Les figures (3 – 31) et (3 – 41) représentent le champ de vecteurs d'un système linéaire présentant une valeur propre nulle. Dans ce qui suit, et afin de simplifier l'étude, nous considérons la forme la plus standard quand il s'agit d'une valeur propre nulle, c'est à dire que a_{22} , a_{12} et a_{21} sont nuls.

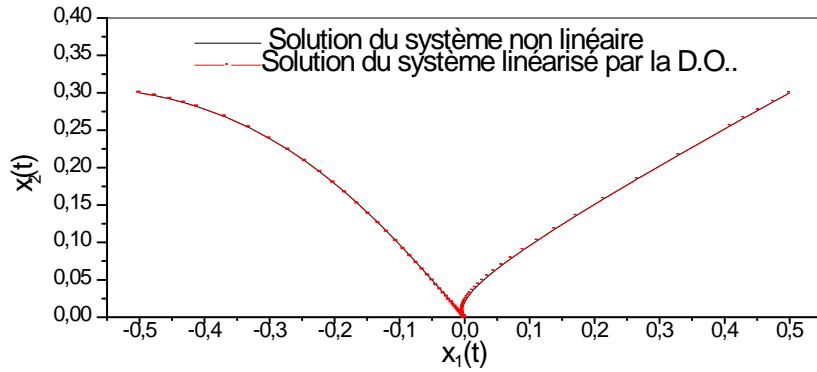


Figure 3-22: représente le plan de phase $(x_1(t), x_2(t))$ du système (3.28) et ses linéarisés par la D.O. pour les conditions initiales $x_0 = (0.5, 0.3)$ et $x_0 = (-0.5, 0.3)$

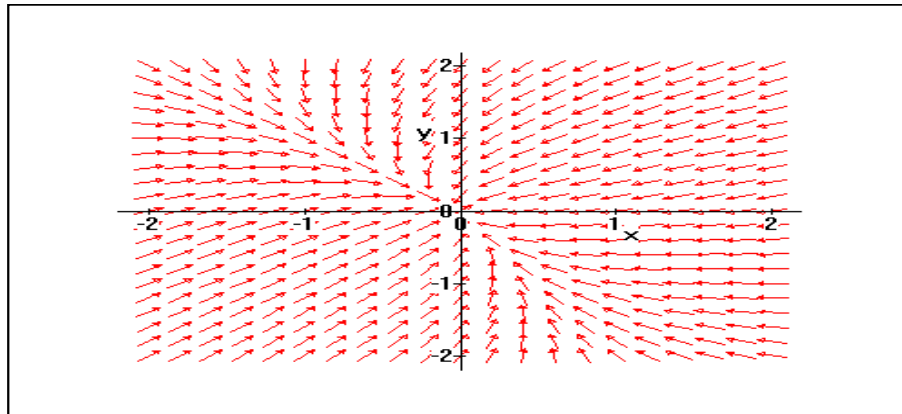


Figure 3-23: représente le champ de vecteurs du système non linéaire (3.28).

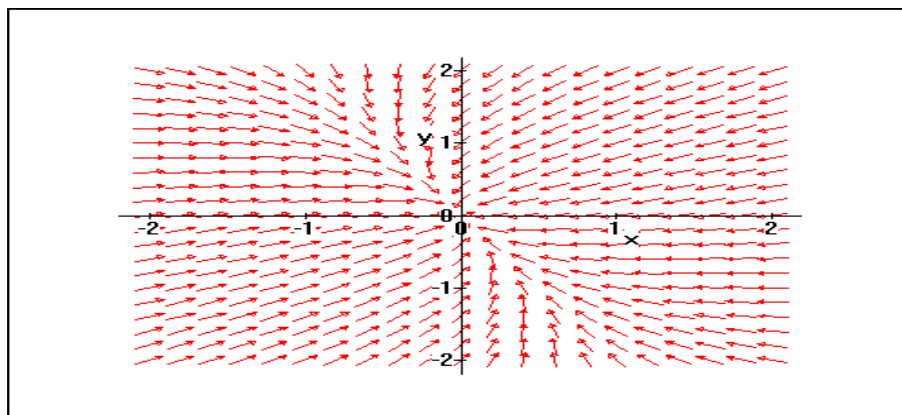


Figure 3-24: représente le champ de vecteurs du linéarisé au sens de la D.O. du système (3.28).

dans ces conditions, (3.31) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{matrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{matrix} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

$G = (g_1, g_2)$ avec $G(0) = 0, DG(0) = 0$. La stabilité de (3.32) dépend, en premier lieu, du signe de a_{11} . Sachant que les termes de $g_1(x_1, x_2)$ n'influent pas sur la stabilité tant que a_{11} n'est pas nul, nous nous proposons donc, de les négliger au voisinage de l'origine. Dans ce cas, la solution de la première équation scalaire s'écrit $x_1(t) = x_{01}e^{a_{11}t}$. Dans ce qui suit, nous supposons que $a_{11} < 0$, cela implique que $x_1(t) \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow +\infty$. Il reste afin de déterminer la stabilité de (3.32), de déterminer le comportement de $x_2(t)$ au voisinage de l'origine. On se propose d'écrire la non linéarité $g(x_1, x_2)$ sous les formes suivantes

* $g_2(x_1, x_2) = bx_1^k$

* $g_2(x_1, x_2) = bx_2^k$

* $g_2(x_1, x_2) = bx_1^{k_1}x_2^{k_2}$

Premier cas $g_2(x_1, x_2) = bx_1^k$

Nous supposons que $x_1(0) = x_2(0)$, afin de pouvoir appliquer la dérivée optimale scalaire.

Le calcul donne le système linéarisé suivant

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}_1 x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2b}{k+1}x_{01}^{k-1} & 0 \end{bmatrix} x \quad (3.33)$$

Le calcul des valeurs propres de la D.O. donne

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

quel que soit les valeurs de b et k , la matrice optimale \tilde{A}_1 aboutit à un équilibre non hyperbolique.

Deuxième cas $g_2(x_1, x_2) = bx_2^k$

Le système (3.32) a le comportement d'un système découplé, une petite investigation dans la section 3-2-3 nous montre que lorsque le temps tend vers l'infini

i) $x_2(t) \rightarrow +\infty$ quand k est impair, $b > 0$.

ii) $x_2(t) \rightarrow 0$ quand k est impair, $b < 0$.

iii) $x_2(t) \rightarrow 0$ ou bien $x_2(t) \rightarrow +\infty$, selon que x_0 soit situé dans le demi plan à gauche ou à droite de l'équilibre, quand k est pair.

Ce résultat peut être confirmé par le théorème de Lyapunov-Schmidt [37].

Troisième cas $g_2(x_1, x_2) = bx_1^{k_1}x_2^{k_2}$

Dans cette situation l'origine n'est pas attracteur, on se contente de calculer \tilde{A}_1 . L'exemple présenté dans l'application montre l'efficacité de la D.O..

Applications

Exemple 9 *Circuit non linéaire avec une dégénérescence cubique : Cas d'un noeud*

Nous nous proposons d'étudier le comportement du point d'équilibre du circuit suivant

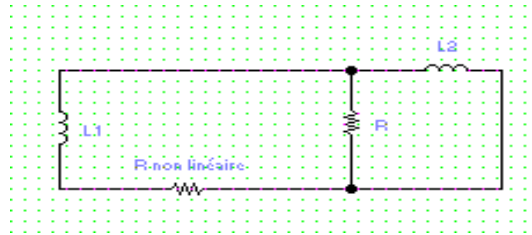


Figure 3-25.

Les équations d'état sont données par

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} &= -R(i_{L_1} + i_{L_2}) - v_{R \text{ non linéaire}} \\ L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} &= -R(i_{L_1} + i_{L_2}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nous écrivons la non linéarité sous la forme $v_R \text{ non linéaire} = i_{nl}^3$. La linéarisation classique tombe sur un cas dégénéré puisque les valeurs propres du linéarisé tangent sont

$$\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 = -2R.$$

Le tableau suivant donne les matrices optimales pour différentes conditions initiales (les composants étant normalisés).

Conditions initiales	Matrices optimales	Valeurs propres
$(-0.001, 0.1)$ ou $(0.001, -0.1)$	$\begin{bmatrix} -1.0030 & -1.0006 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -2.0018$ $\lambda_2 = -1.1989 \cdot 10^{-3}$
$(0.1, 0.1)$ ou $(-0.1, -0.1)$	$\begin{bmatrix} -1.0139 & -0.9912 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -2.0026$ $\lambda_2 = -1.1335 \cdot 10^{-3}$

Tableau 3-1: Matrices optimales pour le système non linéaire (3.35).

Les figures (3 – 26) et (3 – 27) représentent les solutions du système non linéaire (3.35) et ses linéarisations au sens classique et au sens de la dérivée optimale, les figures (3 – 28) et (3 – 29) montrent les plans de phase $(x_1(t), x_2(t))$, enfin les figures (3 – 30), (3 – 31) et (3 – 32) représentent les champs de vecteurs. Les figures (3 – 26) à (3 – 32) reflètent l'avantage de la dérivation optimale. En effet les trajectoires du linéarisé classique convergent vers la droite $x = -y$ (qui constitue un ensemble d'équilibre), alors que la réalité est différente, les trajectoires du système non linéaire tendent vers la droite $x = -y$, puis vers l'origine. Ceci est vrai pour le linéarisé par la dérivation optimale, En plus, les valeurs propres des matrices optimales nous permettent de prédire la nature de l'origine (qui est un noeud stable).

Exemple 10 Cas d'un foyer

Le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega^2 \cos x_1 \sin x_1 - \frac{g}{l} \sin x_1 - mx_2 \end{cases} \quad (3.36)$$

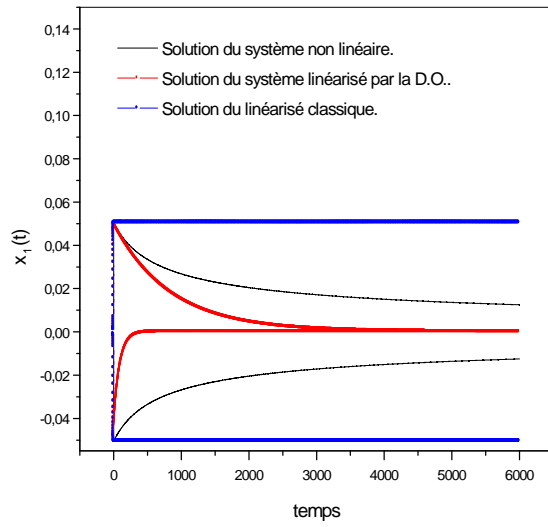


Figure 3-26 : Variation des solutions $x_1(t)$ du système non linéaire (3.35) et ses linéarisés pour $x_1(0) = \pm 0.001$

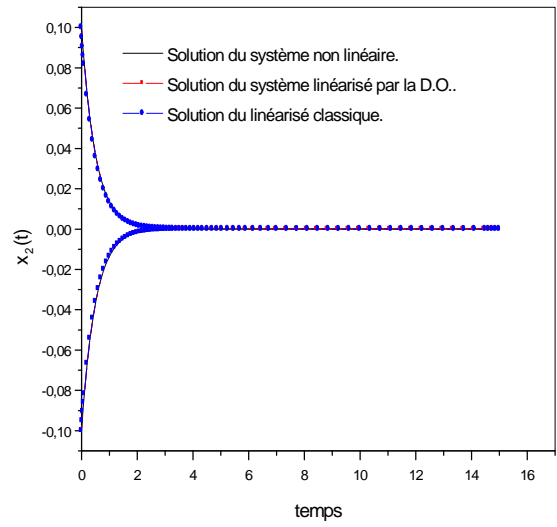


Figure 3-27: Variation des solutions $x_2(t)$ du système non linéaire (3.35) et ses linéarisés pour $x_2(0) = \pm 0.1$

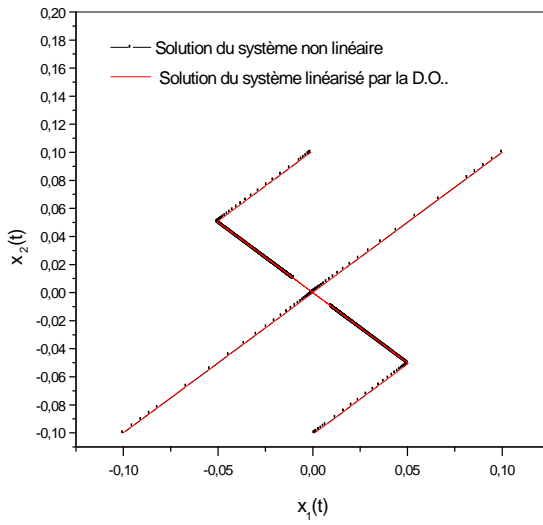


Figure 3-28: Espace de phase du système non linéaire (3.35) et son linéarisé au sens de la D.O., pour $x_0 = (-0.001, 0.1)$, $(0.001, -0.1)$, $(0.1, 0.1)$ et $(-0.1, -0.1)$.

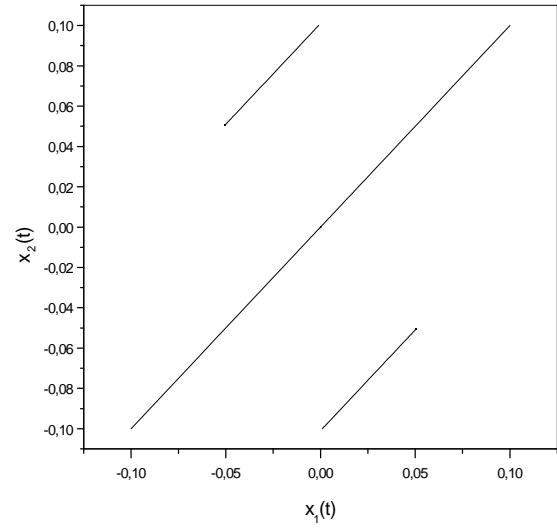


Figure 3-29: Espace de phase du linéarisé classique du système non linéaire (3.35) pour $x_0 = (-0.001, 0.1)$, $(0.001, -0.1)$, $(0.1, 0.1)$ et $(-0.1, -0.1)$.

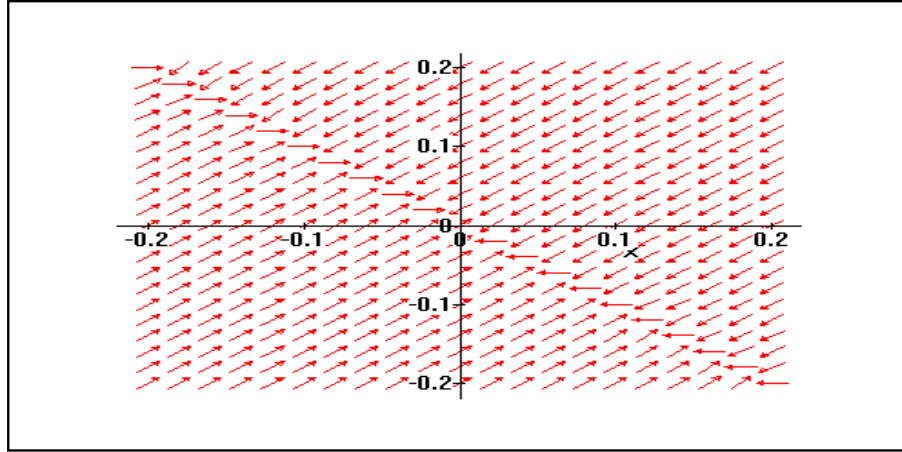


Figure 3-30: Champ de vecteurs du système non linéaire (3.35).

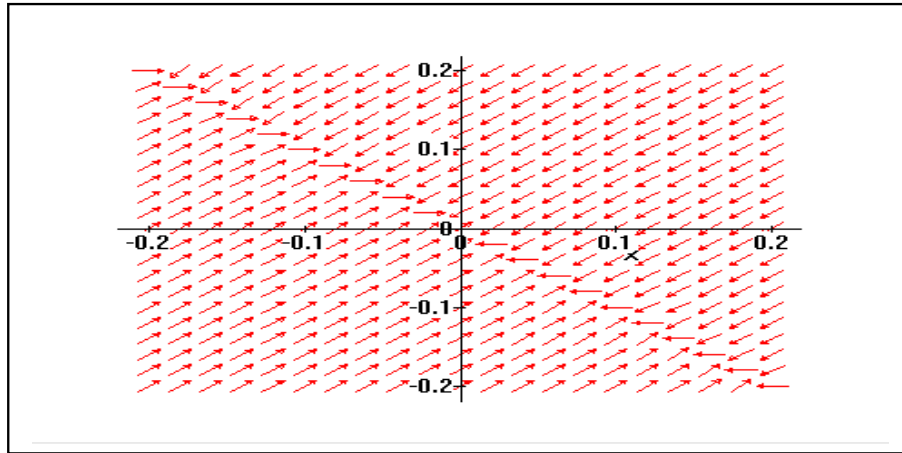


Figure 3-31: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O. de (3.35).

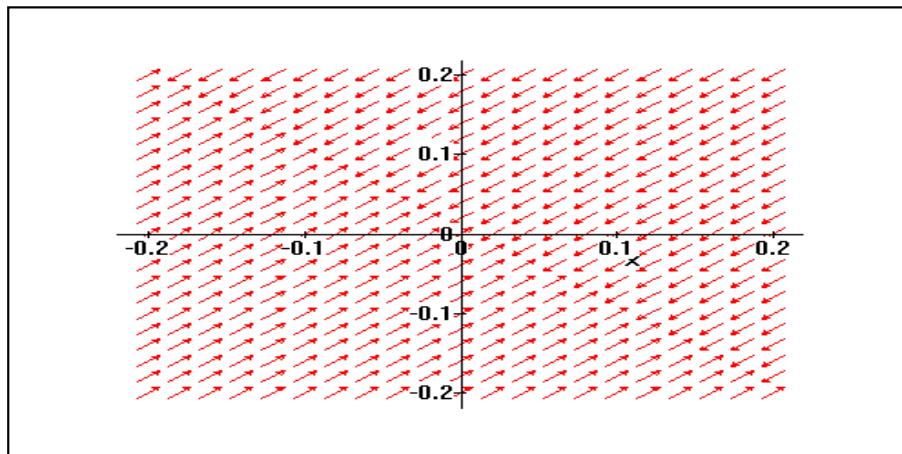


Figure 3-32: Champ de vecteurs du linéarisé classique de (3.35).

subit une bifurcation fourche pour $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, on parvient à démontrer par la linéarisation classique que

— Pour $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$, le système (3.36) possède un seul point d'équilibre asymptotiquement stable situé à l'origine.

— Pour $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$, en plus de l'origine, qui devient instable, le système (3.36) possède deux autres points d'équilibre asymptotiquement stables situés à $(\pm \arccos \frac{g}{l\omega^2}, 0)$.

Nous nous proposons d'étudier la nature de l'équilibre à la valeur de bifurcation. Dans cette situation, la linéarisation classique donne le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -mx_2 \end{cases} \quad (3.37)$$

Les valeurs propres de la dérivée au sens de Fréchet étant $\lambda_1 = 0$, et $\lambda_2 = -m$; l'équilibre est non hyperbolique. Le calcul de la dérivée optimale pour $g = 9.81, l = 0.25, m = 0.1$ et des conditions initiales $x_0 = (0.05, 0.1)$, donne la matrice suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3629 & -0.1084 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

ayant comme valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0390 + 1.3801i \\ \lambda_2 &= -0.03900 - 1.3801i \end{aligned} \quad (3.39)$$

donc, par linéarisation au sens de la dérivée optimale, l'origine est un foyer stable figure (3 – 36). D'après les figures (3 – 34) et (3 – 35) représentant les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$; la D.O. présente deux avantages par rapport à la linéarisation classique

1. Le premier se situe dans la solution $x_1(t)$, où l'on remarque que celle donnée par la linéarisation classique ne converge pas vers l'origine, ceci est dû à la présence de la valeur

propre nulle, alors que la solution non linéaire et celle donnée par la D.O. convergent vers l'origine.

2. Le deuxième se situe dans la solution $x_2(t)$, où l'on remarque que celle donnée par la linéarisation classique converge vers l'origine beaucoup plus rapidement puisque la matrice Jacobienne possède une valeur propre réelle sur cette direction, alors que la solution non linéaire et celle donnée par la D.O. convergent vers l'origine en oscillant.

Exemple 11 Circuit non linéaire avec une dégénérescence quadratique.

Le circuit suivant est dérivé du circuit de Chua

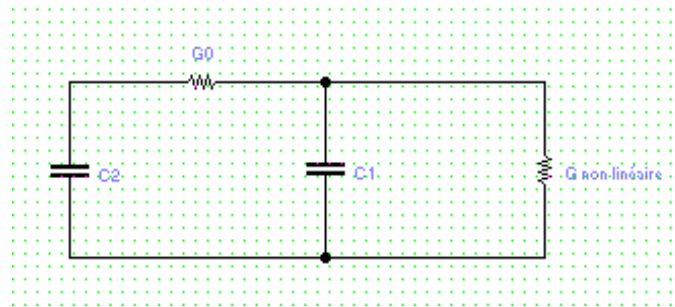


Figure 3-33.

Les équations d'état régissant le système sont les suivants

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= G_0 (v_{C_2} - v_{C_1}) - g(v_{C_1}) \\ C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= G_0 (v_{C_1} - v_{C_2}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Avec $g(v_{C_1})$, la caractéristique non linéaire, qu'on supposera quadratique : $g(v_{C_1}) = v_{C_1}^2$. En normalisant C_1, C_2 et G_0 à 1, les valeurs propres du linéarisé classique sont $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -2$; la dégénérescence est identique à celle de l'exemple 9. L'application de la dérivation optimale conduit au tableau suivant

<i>Conditions initiales</i>	<i>Matrices optimales</i>	<i>Valeurs propres</i>
$(-0.1, 0.3)$	$\begin{bmatrix} -1.0476 & 0.9835 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -2.0158$ $\lambda_2 = -3.1798 \cdot 10^{-2}$
$(0.1, -0.05)$	$\begin{bmatrix} -1.0601 & 1.0428 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -2.0517$ $\lambda_2 = -8.4597 \cdot 10^{-3}$
$(0.05, 0.3)$	$\begin{bmatrix} -1.1434 & 1.0123 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -2.0804$ $\lambda_2 = -0.6302 \cdot 10^{-2}$
$(-0.1, -0.1)$	$\begin{bmatrix} -0.9019 & 0.9746 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 3.7486 \cdot 10^{-2}$ $\lambda_2 = -1.9394$

Tableau 3-2: Matrices optimales pour le système (3.40).

Les figures (3 – 37), (3 – 38) représentent les solutions, la figure (3 – 39) montre le plan de phase, enfin les figures (3 – 40) à (3 – 43) montrent les champs de vecteurs.

La non linéarité dans ce cas est quadratique, dans le paragraphe 3 – 2 – 3 nous avons associé la notion de demi-stable à ce type de non linéarité, nous définissons deux dérivées optimales pour le système (3.40), les trajectoires du linéarisé classique tendent vers la droite $x = y$, (figure (3 – 43)). En effet, à cause de la non linéarité, les solutions du système non linéaire tendent vers la droite $x = y$, puis vers l'origine dans le segment de la droite situé dans le plan $x > 0, y > 0$; et vers $-\infty$ pour le segment situé dans le plan $x < 0, y < 0$. La linéarisation par la dérivation optimale donne deux approximations dont les champs sont tracés sur les figures (3 – 41) et (3 – 42) et, qui reflètent le comportement non linéaire (figure (3 – 40)) avec grande précision.

Exemple 12 Nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1^3 \\ x_0 = (10^{-3}, 10^{-3}) \end{cases} \quad (3.41)$$

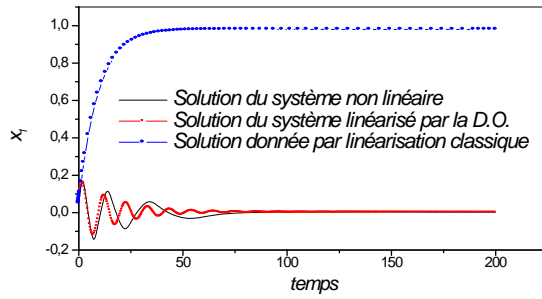


Figure 3-34: Variation des solutions $x_1(t)$ du système non linéaire (3.36) et ses linéarisés à la valeur de bifurcation.

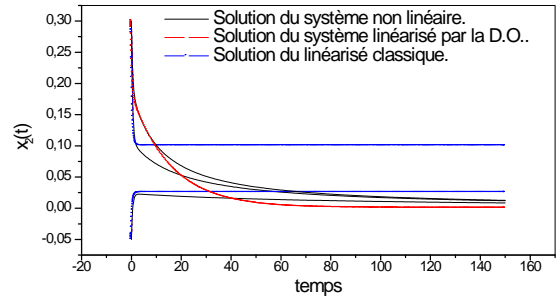


Figure 3-37: Variation des solutions $x_1(t)$ du système non linéaire (3.40) et ses linéarisés .

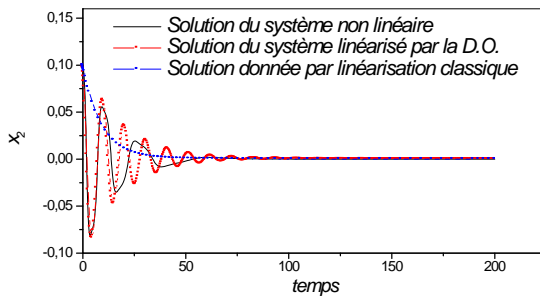


Figure 3-35: Variation des solutions $x_2(t)$ du système non linéaire (3.36) et ses linéarisés à la valeur de bifurcation.

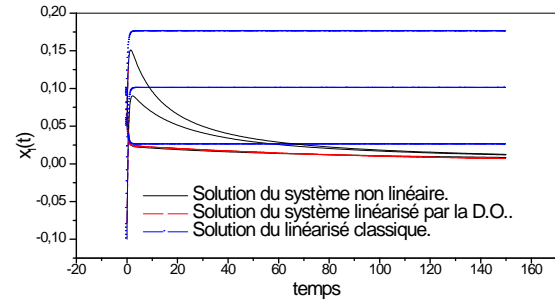


Figure 3-38: Variation des solutions $x_2(t)$ du système non linéaire (3.40) et ses linéarisés .

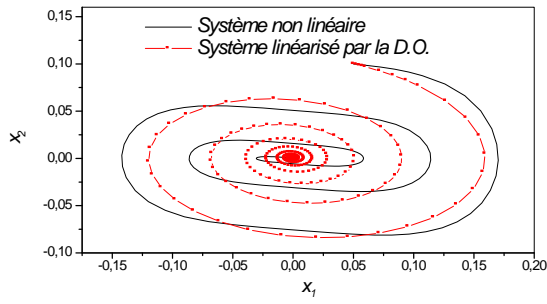


Figure 3-36: Plan de phase $(x_1(t), x_2(t))$ du système non linéaire (3.36) et son linéarisé par la D.O. pour $x_0 = (0.05, 0.1)$

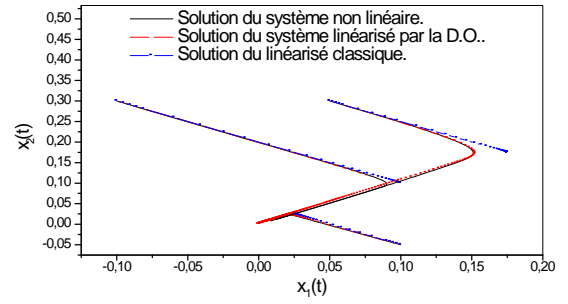


Figure 3-39: Plan de phase $(x_1(t), x_2(t))$ du système non linéaire (3.40) et ses linéarisés pour différentes données initiales.

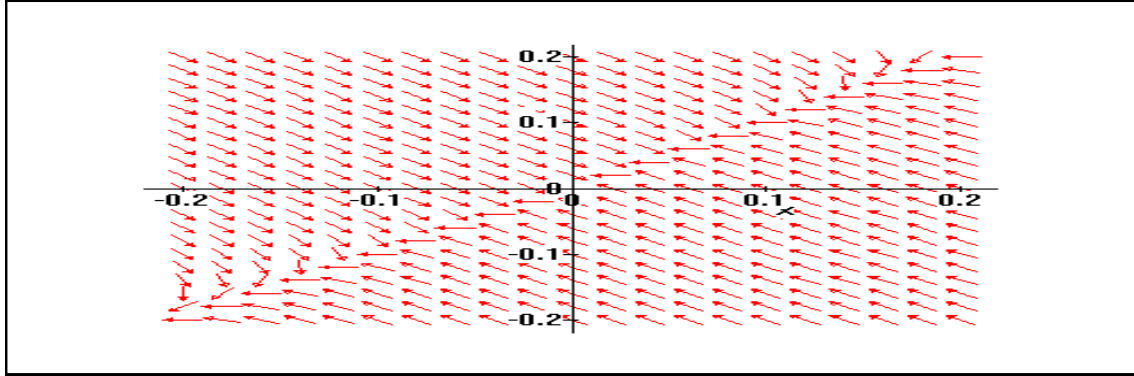


Figure 3-40: Champ de vecteurs du système non linéaire (3.40).

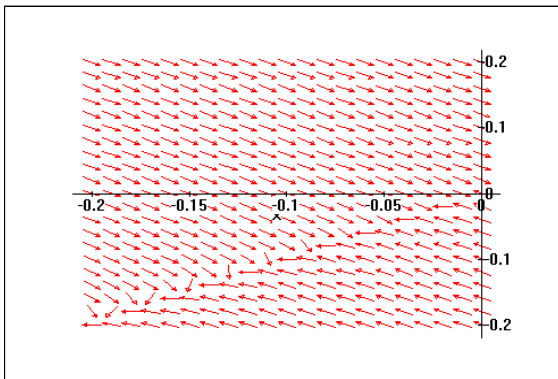


Figure 3-41: Champ de vecteurs du linéarisé par la D.O. dans le demi plan $x < 0$ du système (3.40).

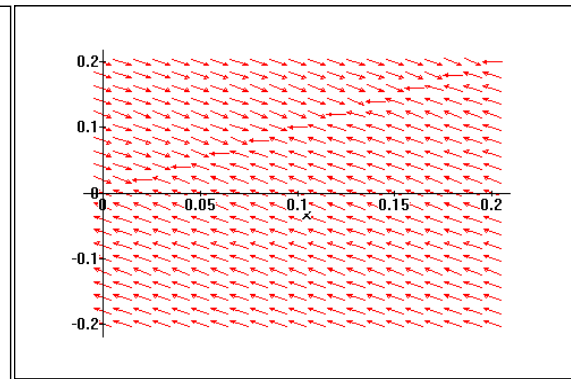


Figure 3-42: Champ de vecteurs du linéarisé par la D.O. dans le demi plan $x > 0$ du système (3.40).

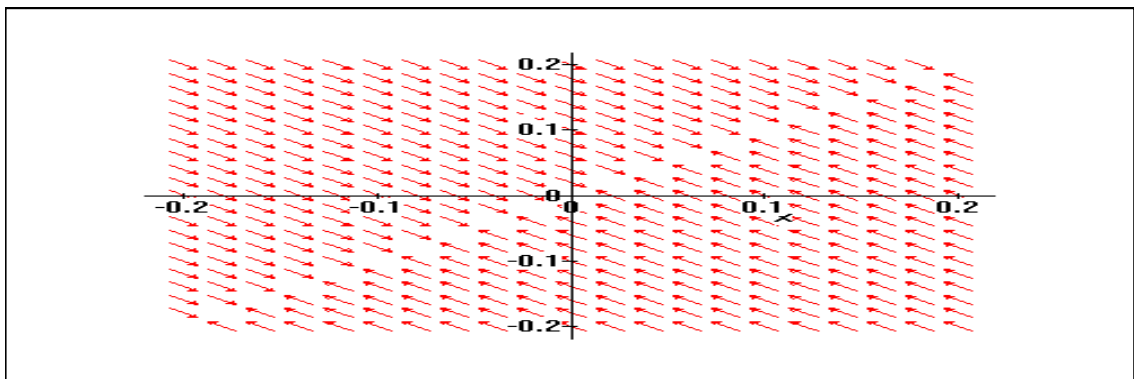


Figure 3-43: Champ de vecteurs du linéarisé classique du système non linéaire (3.40).

on obtient

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.5 \cdot 10^{-6} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Les champs de vecteurs non linéaire et linéarisé par la D.O. sont tracés dans les figures (3 – 44) et (3 – 45), les solutions sont parallèles à l'axe des x et tendent vers l'ensemble $x = 0$ dans les deux cas.

Exemple 13 En considérant le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1^2 x_2 \\ x_0 = (10^{-3}, 10^{-3}) \end{cases} \quad (3.43)$$

on obtient

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2.7329 \cdot 10^{-17} \\ -6.7855 \cdot 10^{-7} & 3.7126 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Les figures (3 – 46) et (3 – 47) montrent une comparaison entre le système non linéaire et son linéarisé au sens de la D.O.. En effet, les trajectoires dans les deux cas tendent vers l'ensemble $x = 0$.

Commentaires La similitude des champs des vecteurs, du système non linéaire et son linéarisé au sens de la dérivée optimale, dans les deux exemples précédents, implique, le bon accord de la dérivée optimale \tilde{A}_1 avec le système non linéaire, ceci, malgré la présence de la valeur propre nulle que présente \tilde{A}_1 .

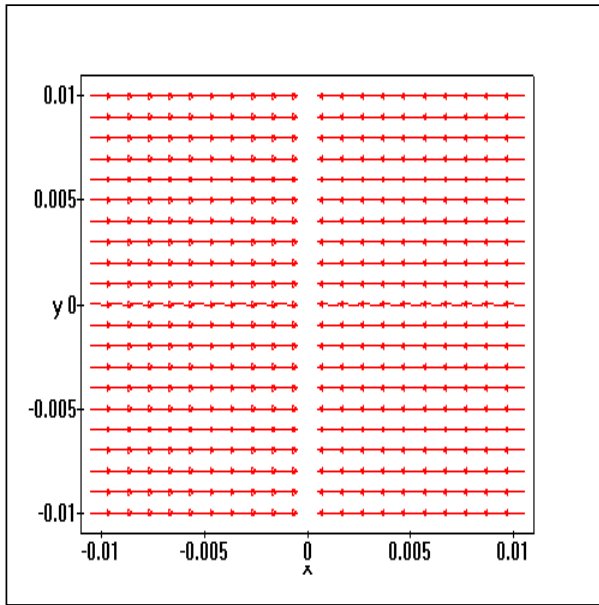


Figure 3-44: Champ de vecteurs du système non linéaire (3.41).

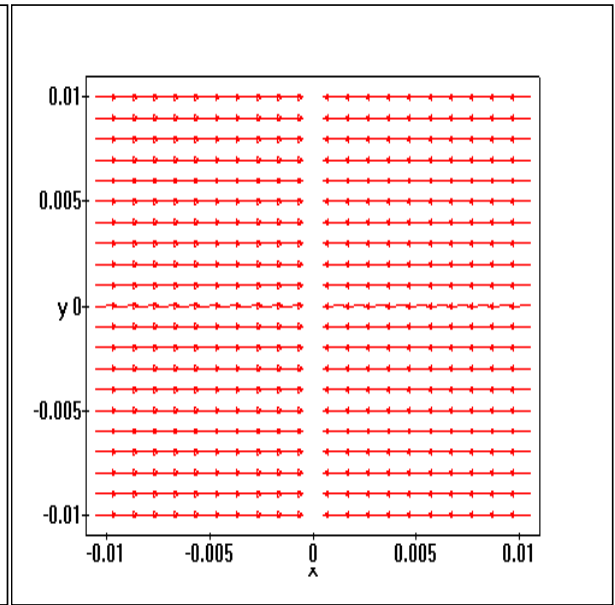


Figure 3-45: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O. de (3.41).

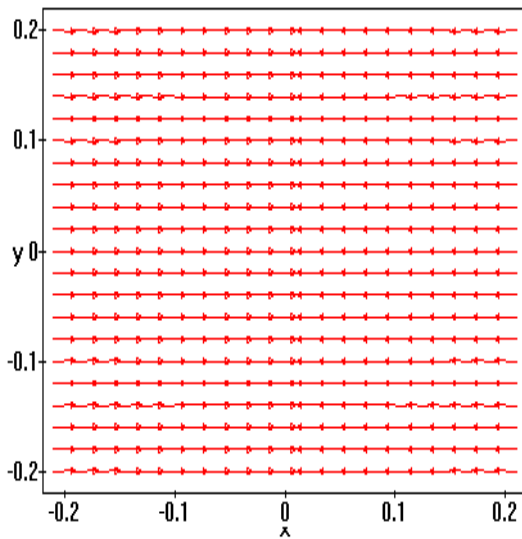


Figure 3-46: Champ de vecteurs du système non linéaire (3.43).

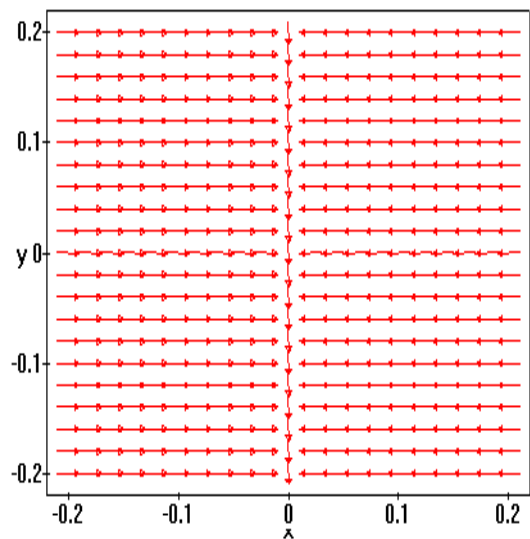


Figure 3-47: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O. de (3.43).

3.6 En présence d'une paire de valeurs propres purement imaginaires

Tout comme le cas d'une valeur propre nulle, la présence d'une paire de valeurs propres purement imaginaires met la linéarisation classique en échec. Dans cette situation, la matrice Jacobienne au point d'équilibre est caractérisée par un déterminant positif et par une trace nulle.

Dans ces conditions, le système non linéaire peut avoir la forme simplifiée suivante

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{matrix} b_1 x_1 f_1(x_1, x_2) \\ b_2 x_2 f_2(x_1, x_2) \end{matrix} \quad (3.45)$$

f_1 et f_2 sont des fonctions positives. a_1, a_2 positives. On distingue trois cas, selon le signe de b_1 et b_2 .

Premier cas b_1 et b_2 négatifs : Le spectre de $DF(x)$ est négatif, le calcul de la dérivée optimale aboutit à une matrice optimale de type stable, on parle de non linéarités stabilisantes.

Deuxième cas b_1 et b_2 positifs : Le spectre de $DF(x)$ est positif, le calcul de la dérivée optimale aboutit à une matrice optimale de type instable, on parle de non linéarités instabilisantes.

Troisième cas b_1 et b_2 de signes différents : Au voisinage de l'équilibre les non linéarités n'influent pas, pour x_0 suffisamment petit, la matrice initiale $DF(x_0)$ et la matrice optimale sont très proches de la matrice Jacobienne à l'origine.

Cas de non linéarités stabilisantes

Considérons le circuit suivant

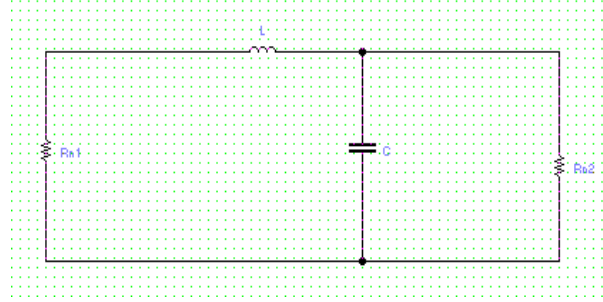


Figure 3-48.

Où R_{n1} est une résistance non linéaire commandée en courant, R_{n2} une résistance non linéaire commandée en tension. Les caractéristiques des résistances s'écrivent

$$v_{n1} = r(i_{n1}) = i_{n1}^3, i_{n2} = g(v_{n2}) = v_{n2}^3.$$

Les équations d'état sont

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -i_L - v_C^3 \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_C - i_L^3 \end{aligned} \quad (3.46)$$

En normalisant les valeurs des composants à 1 et, en prenant $x_1 = v_C, x_2 = i_L$, (3.46) devient

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 - x_1^3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - x_2^3 \end{aligned} \quad (3.47)$$

la matrice Jacobienne à l'origine s'écrit

$$DF(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

et donc elle prédit un centre. La matrice Jacobienne en un point x_0 quelconque s'écrit

$$DF(x_0) = \begin{bmatrix} -3x_{01}^2 & -1 \\ 1 & -3x_{02}^2 \end{bmatrix}$$

et est de type stable, le calcul de la dérivée optimale pour différentes conditions initiales donne

Conditions initiales	Matrices optimales	Valeurs propres
(1, 0.5)	$\begin{bmatrix} -0.3526 & -1.0712 \\ 0.9415 & -0.3862 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -0.3694 + 1.0041i$ $\lambda_2 = -0.3694 - 1.0041i$
(0.1, 0.05)	$\begin{bmatrix} -0.0069 & -1.0000 \\ 0.9997 & -0.0071 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -0.0070 + 0.9998i$ $\lambda_2 = -0.0070 - 0.9998i$
(0.001, 0)	$\begin{bmatrix} -7.4761 \cdot 10^{-7} & -1.0000 \\ 1.0000 & -7.5015 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -7.4843 \cdot 10^{-7} + 1.0000i$ $\lambda_2 = -7.4843 \cdot 10^{-7} - 1.0000i$

Tableau 3-3: Matrices optimales de (3.47) pour différentes données initiales.

En effet, les termes non linéaires, qui n'apparaissent pas dans le linéarisé classique et, qui apparaissent sur la diagonale de la matrice optimale, donnent la nature de l'équilibre. La trace de la matrice optimale étant négative, le système (3.47) est asymptotiquement stable. Nous remarquons aussi, que lorsque, les conditions initiales s'approchent de l'origine, les termes diagonaux de la matrice optimale tendent vers 0, et les valeurs propres s'approchent de ceux du cas dégénéré, ceci confirme la propriété 2-4-2 citée dans le chapitre deux et provient du fait que les non linéarités deviennent de plus en plus négligeables quand on s'approche de l'origine. Les figures (3 – 50) et (3 – 51) montrent les solutions, la figure (3 – 52) montre l'espace des mouvement.

Cas de non linéarités instabilisantes

Dans le cas précédent, la non linéarité était stabilisante, elle donnait naissance à un équilibre asymptotiquement stable, dans ce cas nous allons considérer une non linéarité instabilisante, le calcul de la matrice optimale se fait en intégrant sur \mathbb{R}^- . On se propose d'étudier le comportement du circuit de la figure (3 – 49).

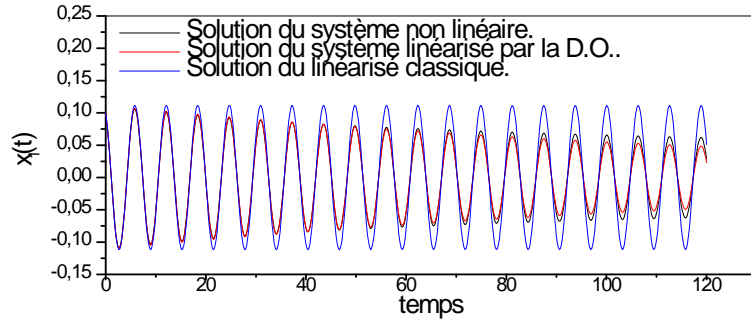


Figure 3-50: Variation des solutions $x_1(t)$ du système (3.47) et ses linéarisés classique (3.48) et au sens de la D.O. pour $x_0 = (01, 0.05)$

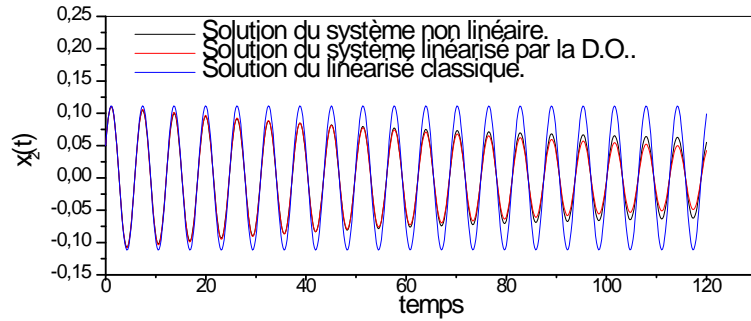


Figure 3-51: Variation des solutions $x_2(t)$ du système (3.47) et ses linéarisés classique (3.48) et au sens de la D.O. pour $x_0 = (01, 0.05)$

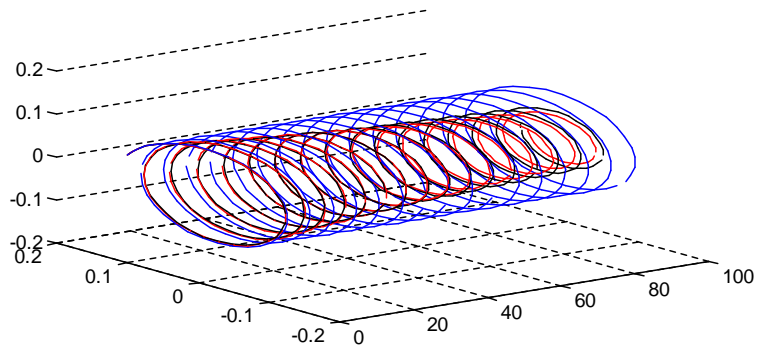


Figure 3-52: Espace des mouvements $(x_1(t), x_2(t), t)$ du système (3.47) et ses linéarisés classique (3.48) et au sens de la D.O. pour $x_0 = (01, 0.05)$

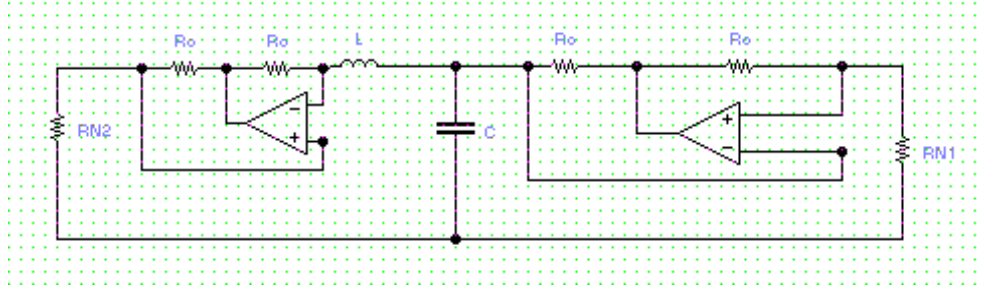


Figure 3-49.

Où R_{n1} est une résistance non linéaire commandée en tension, R_{n2} est une résistance non linéaire commandée en courant. Les caractéristiques des résistances s'écrivent

$$v_{n1} = r(i_{n1}) = i_{n1}^3, i_{n2} = g(v_{n2}) = v_{n2}^3$$

dans ce cas les équations d'état sont

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C}{dt} &= -i_L + v_C^3 \\ L \frac{di_L}{dt} &= v_C + i_L^3 \end{aligned} \quad (3.49)$$

en normalisant les valeurs des composants à 1 et en prenant $x_1 = v_C, x_2 = i_L$, (3.49)

devient

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 + x_1^3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + x_2^3 \end{aligned} \quad (3.50)$$

la matrice optimale pour $x_0 = (0.05, 0.05)$ est la suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.0035 & -1 \\ 0.9998 & 0.0035 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

elle présente des valeurs propres complexes conjuguées, avec des parties réelles strictement positives

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0036 + 1.0000i \\ \lambda_2 &= 0.0036 - 1.0000i \end{aligned} \quad (3.52)$$

ce qui permet de conclure que l'origine est un foyer instable, Les figures (3 – 53) à (3 – 55) montrent les solutions du système non linéaire, du linéarisé classique et du linéarisé par la D.O..

3.6.1 Dérivée optimale en présence de bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf.

Ce type de bifurcation est caractérisé par une paire de valeurs propres purement imaginaires à la valeur de bifurcation, et par l'apparition et la disparition de cycles limites ; l'application de la dérivée optimale permettra d'approximer le système non linéaire au voisinage de l'équilibre, puis déterminer la nature de ce dernier. La forme normale en coordonnées polaires de la bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf est la suivante

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = d\mu r + ar^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = w + c\mu + br^2 \end{cases} \quad (3.53)$$

en posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, (3.53) devient

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = d\mu x_1 - \mu c x_2 - w x_2 + (a x_1 - b x_2) (x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = d\mu x_2 + \mu c x_1 + w x_1 + (a x_2 + b x_1) (x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (3.54)$$

le linéarisé classique qui s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} d\mu & -\mu c - w \\ \mu c + w & d\mu \end{bmatrix} x \quad (3.55)$$

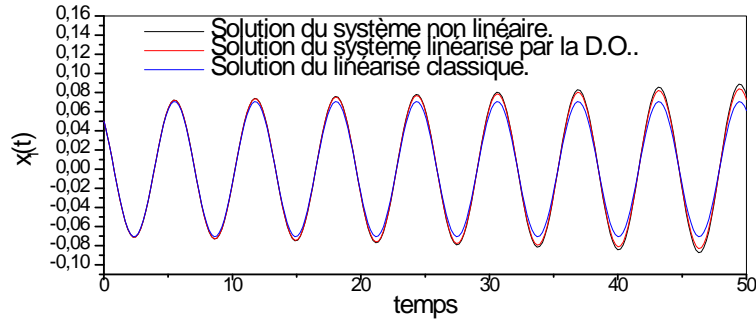


Figure 3-53: Variation des solutions $x_1(t)$ du système (3.50) et ses linéarisés classique et au sens de la D.O. (3.51).

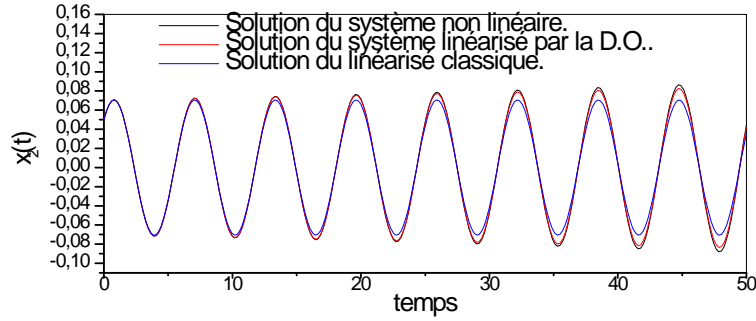


Figure 3-54: Variation des solutions $x_2(t)$ du système (3.50) et ses linéarisés classique et au sens de la D.O. (3.51).

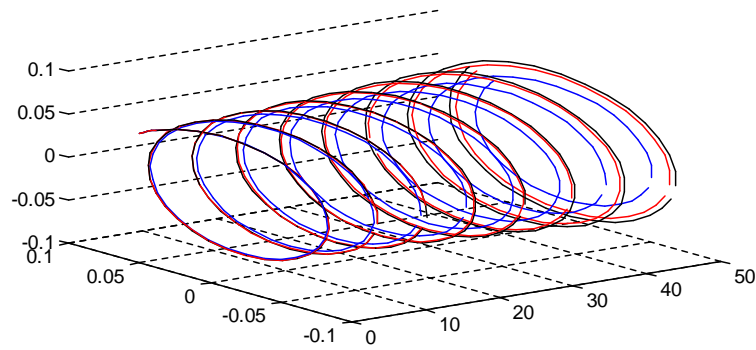


Figure 3-55: Espace des mouvements $(x_1(t), x_2(t), t)$ du système (3.50) et ses linéarisés classique et au sens de la D.O. (3.51) pour $x_0 = (0.05, 0.05)$.

possède comme valeurs propres

$$\lambda_1 = \frac{2d\mu + \sqrt{4d^2\mu^2 - 4(w^2 + 2w\mu c + \mu^2(d^2 + c^2))}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2d\mu - \sqrt{4d^2\mu^2 - 4(w^2 + 2w\mu c + \mu^2(d^2 + c^2))}}{2}$$

selon les signes de a et de d , quatre cas sont possibles. Afin de pouvoir effectuer une analyse numérique nous posons $a = \pm 1, d = \pm 1, w = 1.456, c = 1.3, b = 1.5$, la condition initiale est fixée à $x_0 = (0.6, 0.5)$; nous nous proposons d'effectuer une comparaison qualitative avec la linéarisation classique à la valeur de bifurcation.

Les figures (3 – 56) à (3 – 59), montrent les solutions non linéaires et linéarisés au sens de la dérivée optimale, dans les figures (3 – 56) et (3 – 57), il s'agit d'un équilibre stable, et d'un équilibre instable dans les figures (3 – 58) et (3 – 59). Les solutions données par la linéarisation classique présentent un centre.

—Premier cas a, d négatifs

	matrices	valeurs propres	nature de l'équilibre
$DF(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1.4560 \\ 1.4560 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 1.4560i$ $\lambda_2 = -1.4560i$	centre
$D.O.$	$\begin{bmatrix} -0.3013 & -1.9708 \\ 1.8230 & -0.2922 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -0.2967 + 1.8954i$ $\lambda_2 = -0.2967 - 1.8954i$	foyer stable

Tableaux 3-4: Matrices optimale et Jacobienne à la valeur de bifurcation pour a, d négatifs.

—Deuxième cas a positif, d négatif

	matrices	valeurs propres	nature de l'équilibre
$DF(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1.4560 \\ 1.4560 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 1.4560i$ $\lambda_2 = -1.4560i$	centre
$D.O.$	$\begin{bmatrix} 0.3187 & -1.8262 \\ 1.9676 & 0.2748 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 0.2967 + 1.8954i$ $\lambda_2 = 0.2967 - 1.8954i$	foyer instable

Tableaux 3-5: Matrices optimale et Jacobienne à la valeur de bifurcation pour a positif, d négatif.

—Troisième cas a négatif, d positif

	matrices	valeurs propres	nature de l'équilibre
$DF(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1.4560 \\ 1.4560 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 1.4560i$ $\lambda_2 = -1.4560i$	centre
$D.O.$	$\begin{bmatrix} -0.3023 & -1.9710 \\ 1.8240 & -0.9200 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = -0.6111 + 1.8707i$ $\lambda_2 = -0.6111 - 1.8707i$	foyer stable

Tableaux 3-6: Matrices optimale et Jacobienne à la valeur de bifurcation pour a négatif, d positif.

Quatrième cas a, d positifs

	matrices	valeurs propres	nature de l'équilibre
$DF(0)$	$\begin{bmatrix} 0 & -1.4560 \\ 1.4560 & 0 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 1.4560i$ $\lambda_2 = -1.4560i$	centre
$D.O.$	$\begin{bmatrix} 0.3187 & -1.8262 \\ 1.9676 & 0.2748 \end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 0.2967 + 1.8954i$ $\lambda_2 = 0.2967 + 1.8954i$	foyer instable

Tableaux 3-7: Matrices optimale et Jacobienne à la valeur de bifurcation pour a, d positifs.

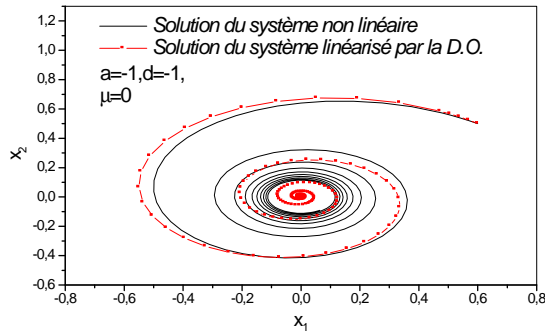


Figure 3-56: Plan de phase du système non linéaire (3.54) et son linéarisé par la D.O. à la valeur de bifurcation pour $a = -1, d = -1$.

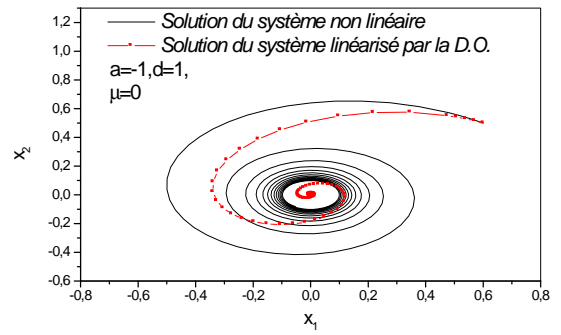


Figure 3-57: Plan de phase du système non linéaire (3.54) et son linéarisé par la D.O. à la valeur de bifurcation pour $a = -1, d = 1$.

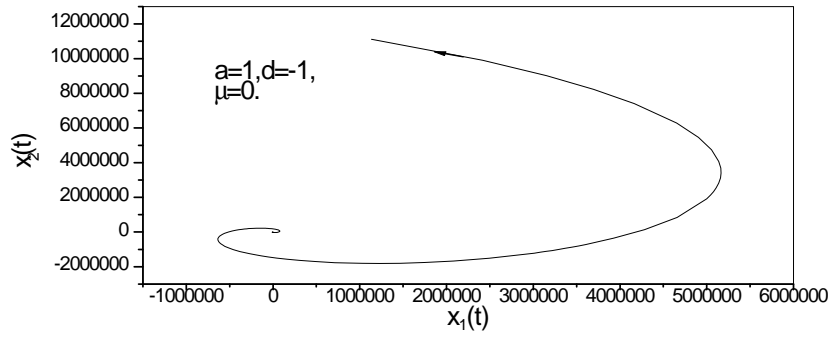


Figure 3-58: Plan de phase du système non linéaire (3.54) pour $a = 1, d = -1$.

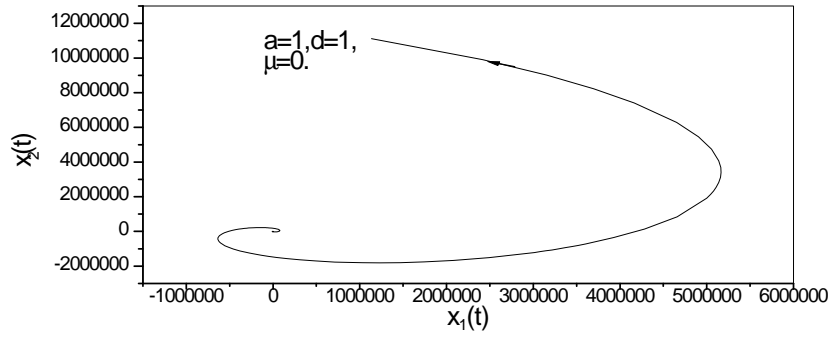


Figure 3-59: Plan de phase du système non linéaire
 (3.54) pour $a = 1, d = 1$.

Commentaires et conclusion

Dans ce cas, la bifurcation est caractérisée par un échange de stabilité, puisque l'équilibre existe pour toutes les valeurs du paramètre de bifurcation, Nous remarquons que les échanges de stabilité qui ont lieu brusquement à la valeur de bifurcation, sont suivis rigoureusement par la dérivée optimale ; En effet, pour $d < 0$ et μ croissant, l'équilibre passe d'un état instable à un état stable, les valeurs propres de la matrice Jacobienne traversent le demi plan droit au demi plan gauche en passant par une paire de valeurs propres purement imaginaires à la valeur de bifurcation, et prédisent un centre à l'origine. Ceci n'est pas vrai du fait qu'il ne s'agit pas d'une bifurcation dégénérée. Ainsi l'origine est toujours attracteur, les valeurs propres de la matrice optimale passent du demi plan droit au demi plan gauche, en gardant les parties réelles des valeurs propres non nulles à la valeur de bifurcation. De même pour $d > 0$ et μ croissant, l'équilibre passe d'un état stable à un état instable, les valeurs propres de la matrice optimale passent du demi plan gauche au demi plan droit. Les cycles limites existent pour $\mu < 0$ quand, a et d sont de même signe et pour $\mu > 0$ quand, a et d sont de signes différents. Ils sont stables quand l'équilibre est instable et inversement, dans le cas où le cycle limite est asymptotiquement stable, il s'agit d'une bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf supercritique, lorsque le cycle limite est instable il s'agit d'une bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf subcritique ; remarquons que la linéarisation classique ne donne aucun renseignement à ce propos, concernant la dérivée optimale, il s'agit

—d'une bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf supercritique lorsque la matrice optimale prédit un foyer stable à l'origine à la valeur de bifurcation.

—d'une bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf subcritique lorsque la matrice optimale prédit un foyer instable à l'origine à la valeur de bifurcation.

Ce qui nous permet de distinguer entre les deux types de bifurcations en utilisant les valeurs propres de la matrice optimale à la valeur de bifurcation (*Tableau 3 – 8*)

	Nature de la matrice optimale	Type de la bifurcation
$a = -1, d = -1$	stable	supercritique
$a = 1, d = -1$	instable	subcritique
$a = -1, d = 1$	stable	supercritique
$a = 1, d = 1$	instable	subcritique

Tableau 3-8: Matrices optimales à la valeur de bifurcation et types de bifurcation.

Remarque 3.3 *Le résultat précédent devient trivial lorsqu'on sache que la trace de la dérivée optimale s'écrit en fonction de la donnée initiale et du paramètre de bifurcation : $Tr(\tilde{A}) = 2d\mu + 2a\Phi(x_0)$, où $\Phi(x_0)$ est une fonction positive, tandis que la trace de la matrice Jacobienne à l'origine s'écrit $Tr(DF(0)) = 2d\mu$.*

3.6.2 En présence d'une paire de valeurs propres nulles

Le système non linéaire s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(x) \quad (3.56)$$

avec $G(0) = 0$, $DG(0) = 0$, A est la matrice Jacobienne à l'origine, elle peut s'écrire sous l'une des trois formes suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou bien } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Il est donc clair que la stabilité dépend des termes non linéaires. Par la suite nous proposons une étude numérique

En présence d'un foyer Dans ce cas, le système (3.56) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 r^2 + b_1 x_1 f_1(r^4) + g_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 r^2 + b_1 x_2 f_2(r^4) + g_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, G contient les termes d'ordres supérieurs, nous distinguons deux cas

i) Non linéarités stabilisantes

b_1, b_2 sont négatifs, la matrice optimale est de type stable.

ii) Non linéarités instabilisantes

b_1, b_2 sont positifs, la matrice optimale est de type instable.

dans les deux cas les valeurs propres de la matrice optimale sont complexes conjuguées.

En présence d'un noeud Le système (3.56) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_1 x_1 f_1(r^2) + g_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = b_2 x_2 f_2(r^2) + g_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.59)$$

de même, distinguons deux cas

i) non linéarités stabilisantes

b_1, b_2 sont négatifs, la matrice optimale est de type stable.

ii) non linéarités instabilisantes

b_1, b_2 sont positifs, la matrice optimale est de type instable.

Dans les deux cas les valeurs propres de la matrice optimale sont réelles.

Applications

Nous considérons les systèmes suivants, pour une application numérique

Exemple 14

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2(x_1^2 + x_2^2) - 0.11x_1(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1(x_1^2 + x_2^2) - 0.22x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ x(0) = (-0.08, 0.0001) \end{cases} \quad (3.60)$$

la matrice optimale s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0324 & -0.3206 \\ 0.3219 & -0.0124 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -0.0224 + 0.3211i$$

$$\lambda_2 = -0.0224 - 0.3211i$$

l'origine est donc un foyer stable, figure (3 – 60).

Exemple 15

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2(x_1^2 + x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1(x_1^2 + x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ x(0) = (-0.08, 0.0005) \end{cases} \quad (3.62)$$

la matrice optimale s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4.1003 \cdot 10^{-5} & -6.3961 \cdot 10^{-3} \\ 6.4008 \cdot 10^{-3} & 1.2277 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 0.0001 + 0.0064i$$

$$\lambda_2 = 0.0001 - 0.0064i$$

l'origine est un foyer instable, figure (3 – 61)

Exemple 16

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5.99x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2x_2^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 3.99x_2(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2x_2^2 \\ x(0) = (0.08, 0.06) \end{cases} \quad (3.64)$$

la matrice optimale s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.1308 & -0.1115 \\ 0.0641 & -0.0525 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 0.0745$$

$$\lambda_2 = 0.0038$$

l'origine est un noeud instable, figure (3 – 62)

Exemple 17

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -50x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3x_2^2 - x_1^4 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3x_2^2 - x_2^4 \\ x_0 = (0.08, 0.6) \end{array} \right. \quad (3.66)$$

la matrice optimale s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -26.0041 & 0.5552 \\ -2.8826 & -4.0187 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -26.0767$$

$$\lambda_2 = -3.9461$$

l'origine est un noeud stable, figure (3 – 63).

Commentaires

Bien que le degré de la non linéarité soit grand (le premier terme étant cubique), les exemples précédents, montrent que le comportement du système non linéaire est suivi rigoureusement par la dérivation optimale.

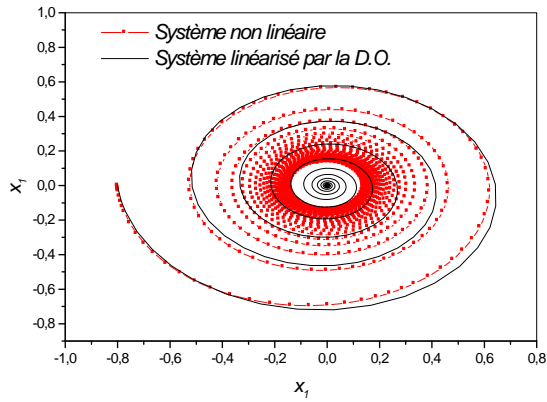


Figure 3-60: Plan de phase du système non linéaire (3.60) et son linéarisé par la D.O. pour $x_0 = (-0.08, 0.0005)$.

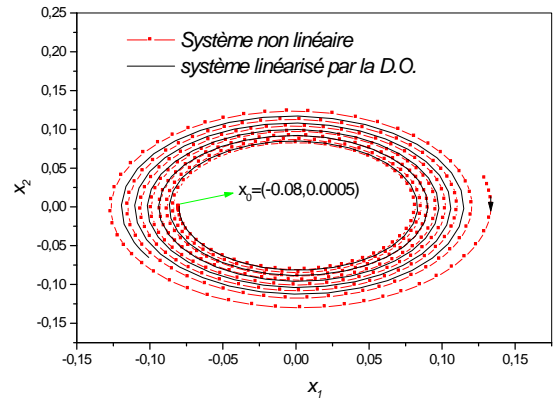


Figure 3-61: Plan de phase du système non linéaire (3.62) et son linéarisé par la D.O. pour $x_0 = (-0.08, 0.0005)$

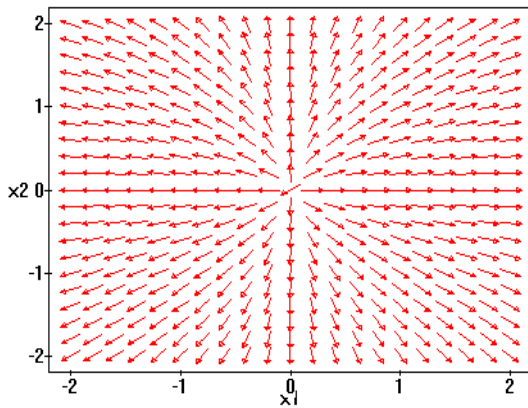


Figure 3-62: Champ de vecteurs du système non linéaire (3.64).

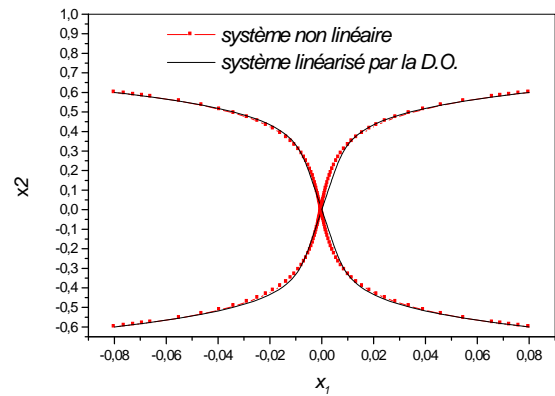


Figure 3-63: Portrait de phase du système non linéaire (3.66) et son linéarisé par la D.O.

3.6.3 Un noeud ou un foyer?

Dans le cas hyperbolique, les non linéarités n'influent pas sur la stabilité de l'équilibre, mais peuvent influencer sur sa nature. Plus exactement, les non linéarités peuvent transformer un noeud en un foyer. Pour une étude numérique nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0.11x_1 + 50x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -0.22x_2 - x_1^3 \\ x_0 = (0.9, 0.5) \end{cases} \quad (3.68)$$

son linéarisé classique est donnée par (3.69).

$$DF(0) = \begin{bmatrix} -0.11 & 50 \\ 0 & -0.22 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

puisque les valeurs propres de $DF(0)$ sont réelles négatives, la linéarisation classique prédit un noeud stable à l'origine figure (3 – 64). La matrice optimale s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.1100 & 50 \\ -2.4541 & -0.2132 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

ayant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0616 + 11.0771i \\ \lambda_2 &= -0.0616 - 11.0771i \end{aligned} \quad (3.71)$$

comme valeurs propres, ce qui permet de conclure que la dérivée optimale prédit un foyer,(figure (3 – 65)), la figure (3 – 66) représentant le système non linéaire montre qu'il s'agit bien d'un foyer stable et non pas d'un noeud stable. Les figures (3 – 67) à (3 – 69) montrent les solutions.

Cet exemple montre que, l'équivalence entre le système non linéaire est son linéarisé au sens de la dérivation optimale est probablement plus forte que l'équivalence topologique.

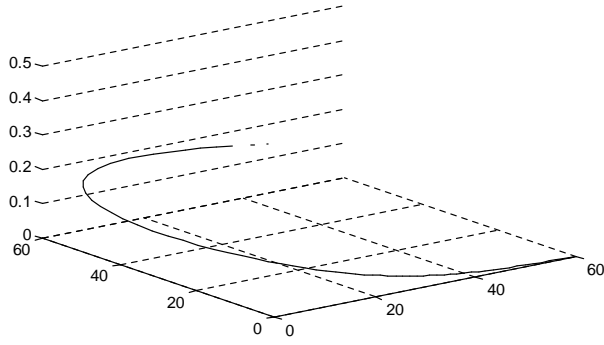


Figure 3-64: Espace de mouvements $(x_1(t), x_2(t), t)$ du système (3.69) linéarisé classique du système (3.68).

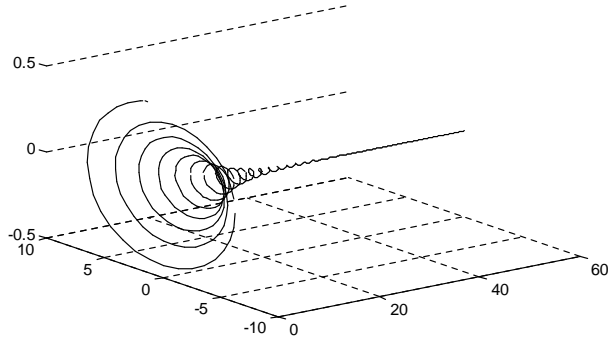


Figure 3-65: Espace de mouvements $(x_1(t), x_2(t), t)$ du système (3.70) linéarisé par dérivée optimale de (3.68).

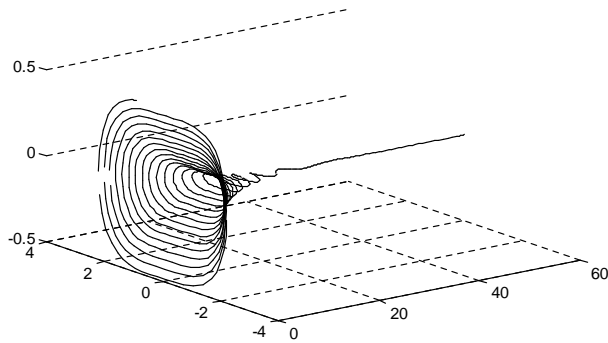


Figure 3-66: Espace de mouvements $(x_1(t), x_2(t))$ du système non linéaire (3.70).

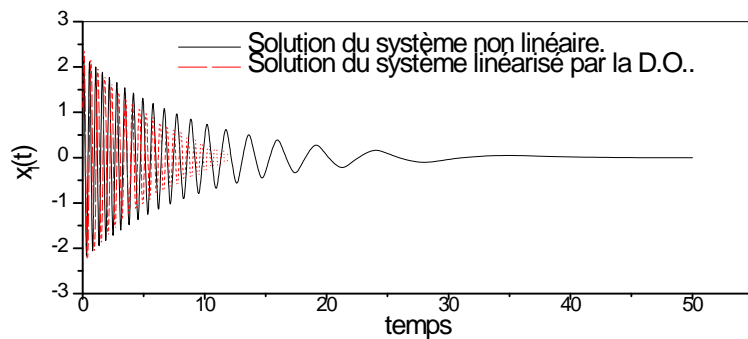


Figure 3-67: Variation des solutions $x_1(t)$ du système non linéaire (3.68) et son linéarisé par la dérivation optimale (3.70).

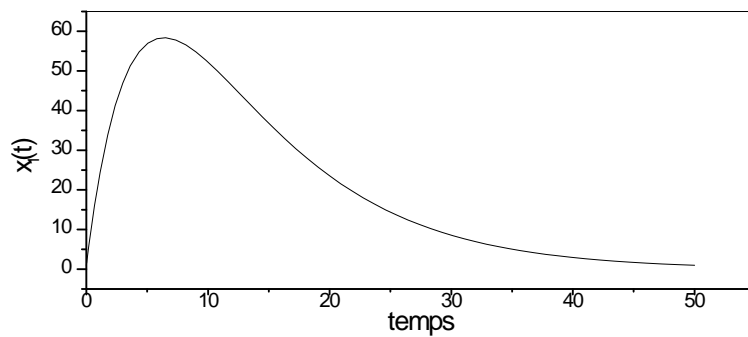


Figure 3-68: Variation des solutions $x_1(t)$ du linéarisé classique (3.69) du système (3.68).

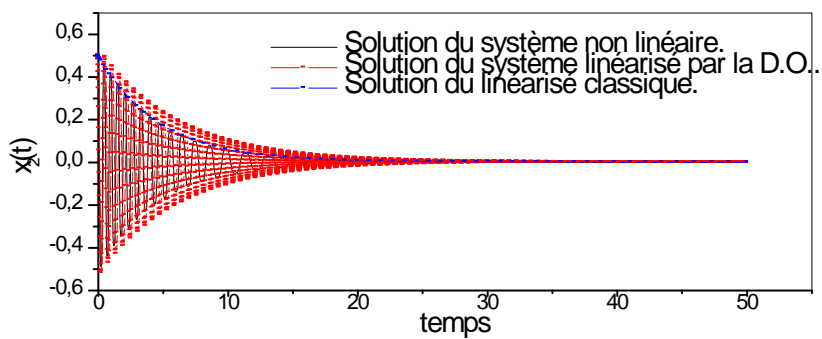


Figure 3-69: Variation des solutions $x_2(t)$ du système non linéaire (3.68) et ses linéarisés classique (3.69) et par dérivation optimale (3.70).

Chapitre IV

Dérivée Optimale Des Systèmes à Temps Discret.

Chapitre 4

Dérivée optimale des systèmes à temps discret

4.1 Introduction

Dans certaines situations, il est indispensable de voir le temps comme variable discrete, dans ce dernier chapitre nous introduisons la notion de la dérivée optimale discrète, sachant que les problèmes de stabilité posés pour les équations différentielles non linéaires restent toujours posés pour les équations aux différences.

4.2 Position du problème

Considérons une équation aux différences non linéaire

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F(x_k) \\x_{k=0} &= x_0\end{aligned}\tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Notre objectif est de trouver une approximation linéaire à (4.1), sous la forme

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k \\ x_{k=0} &= x_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A est une matrice à déterminer, pour cela nous supposons que :

- i) L'origine est un point d'équilibre pour le système non linéaire.
- ii) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0 pour lequel $DF(x)$ existe.
- iii) F est continue, localement Lipschizienne.

La dérivée optimale donnée par le système linéaire (4.2) est obtenue en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \|F(x_k) - Ax_k\|^2 \tag{4.3}$$

le long d'une solution x_k donnée. En supposant que la matrice $\Gamma(x_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} [x_k][x_k]^T$ est inversible, La résolution nous ramène à l'équation suivante

$$A = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} [F(x_k)][x_k]^T \right] [\Gamma(x_k)]^{-1} \tag{4.4}$$

4.3 Procédure de calcul

Le calcul de la matrice optimale se fait d'une manière itérative, comme précédemment :

1. $A_0 \leftarrow DF(x_0)$.
 2. $j \leftarrow 1$.
 3. $A_j \leftarrow \left[\sum_{k=0}^{+\infty} [F(A_{j-1}^k x_0)][A_{j-1}^k x_0]^T \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} [A_{j-1}^k x_0][A_{j-1}^k x_0]^T \right]^{-1}$.
 4. Si $\|A_j - A_{j-1}\| > \epsilon$.
- $j \leftarrow j + 1$
Aller à 3.

Sinon

\tilde{A} (dérivée optimale) $\longleftarrow A_j$

Fin SI.

FIN.

4.4 Applications

Exemple 1 *Considérons l'application logistique retardée d'ordre deux*

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= y_k \\ y_{k+1} &= ay_k(1 - x_k)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Pour $a = 0.8$, la linéarisation de (4.5) au voisinage de l'origine pour $(x_0, y_0) = (0.002, 0.002)$ donne le système optimal suivant

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= y_k \\ y_{k+1} &= -4.1133 \cdot 10^{-4}x_k + 7.9946 \cdot 10^{-1}y_k\end{aligned}\tag{4.6}$$

La linéarisation classique donne le système suivant

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= y_k \\ y_{k+1} &= 0.8y_k\end{aligned}\tag{4.7}$$

Les figures (4-1) et (4-2) représentent les solutions du système non linéaire et son linéarisé au sens de la dérivée optimale, l'erreur due aux approximations par la dérivée optimale et par la linéarisation classique est représentée sur la figure (4-3). L'erreur absolue maximale pour la linéarisation classique est de $8.0157 \cdot 10^{-6}$ et pour la dérivation optimale est de $2.5943 \cdot 10^{-6}$.

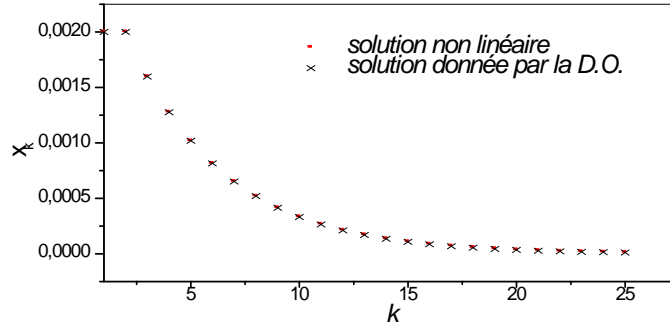


Figure 4-1: Variation des solutions x_k pour l'application logistique retardée et son linéarisé par la D.O. (4.6).

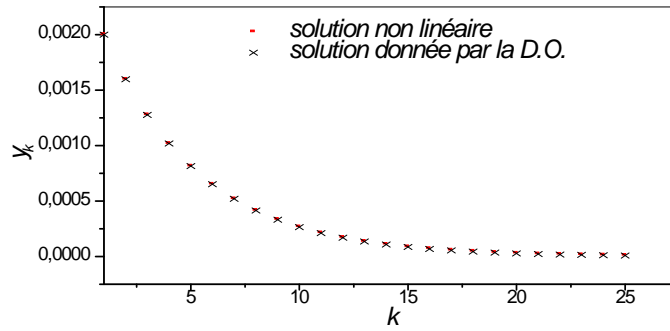


Figure 4-2: Variation des solutions y_k pour l'application logistique retardée et son linéarisé par la D.O. (4.6).

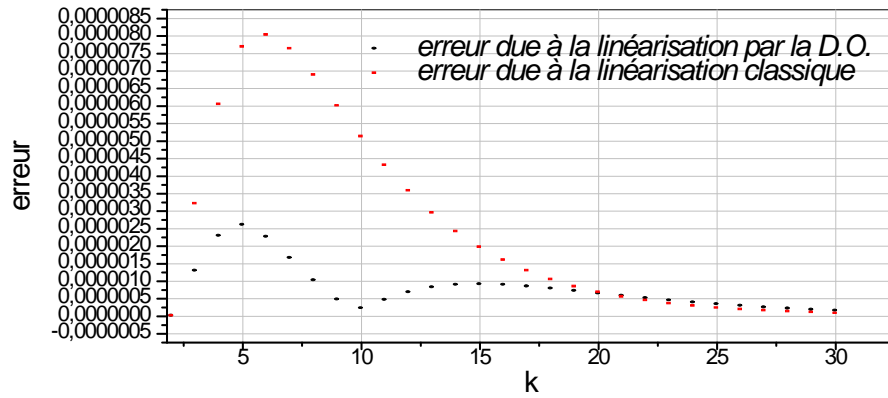


Figure 4-3: Erreur due à l'approximation de l'application logistique (4.5) retardée par la linéarisation classique (4.7) et la dérivation optimale (4.6).

4.4.1 Commentaires

La figure (4 – 3) montre que la dérivée optimale présente la meilleure approximation au voisinage de la donnée initiale, alors que la linéarisation classique présente la meilleure approximation au voisinage de l'origine, ceci, confirme le résultat déjà obtenu dans le cas continu.

4.4.2 Comparaison qualitative entre la linéarisation classique et la D.O.

Exemple 2 *En présence d'une valeur propre de module 1*

Considérons l'équation aux différences non linéaire

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - 0.9622x_k^3 + y_k^2 \\y_{k+1} &= 0.83y_k - 0.777y_k^3\end{aligned}\tag{4.8}$$

Le linéarisé classique est le suivant

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k \\y_{k+1} &= 0.83y_k\end{aligned}\tag{4.9}$$

L'origine est non hyperbolique puisque la matrice Jacobienne à l'origine présente une valeur propre de module égale à 1, la D.O. donne pour $(x_0, y_0) = (0.06, 0.3)$

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 0.94383x_k + 0.20252y_k \\y_{k+1} &= 0.00458x_k + 0.79656y_k\end{aligned}\tag{4.10}$$

Pour laquelle, les modules sont inférieurs à l'unité.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.94988 \\ \lambda_2 &= 0.79051\end{aligned}\tag{4.11}$$

De ce fait l'origine est asymptotiquement stable (noeud stable), les solutions sont tracées dans les figures (4 – 4) et (4 – 5).

Exemple 3 En présence d'une paire de valeurs propres avec un module égal à 1

C'est un autre cas où la linéarisation classique est mise en échec, considérons le système

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -1.51x_k^3 + y_k \\ y_{k+1} &= -x_k + 0.36y_k^3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Par linéarisation classique, l'équilibre est un centre, le linéarisé optimal pour $(x_0, y_0) = (0.2, 0.09)$ est le suivant

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -0.06407x_k + 0.99501y_k \\ y_{k+1} &= -1.00231x_k + 0.01510y_k \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec, les valeurs propres suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.02448 + 0.99787i \\ \lambda_2 &= -0.02448 - 0.99786i \end{aligned} \quad (4.14)$$

puisque les modules sont égaux à

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.99817 \\ m_2 &= 0.99817 \end{aligned} \quad (4.15)$$

L'origine est asymptotiquement stable, la figure (4 – 6) représente le plan de phase.

4.5 Conclusion

Comme dans le cas précédent, la dérivée optimale discrète donne une très bonne approximation au système non linéaire au voisinage de l'origine et qualitativement, elle permet de résoudre le problème de la stabilité des équilibres non hyperboliques.

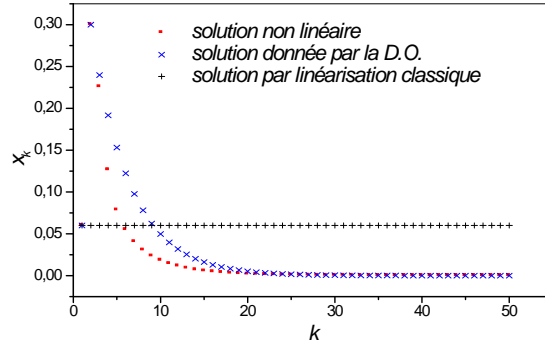


Figure 4-4: Variation des solutions x_k pour le système non linéaire (4.8), son linéarisé classique et son linéarisé par la D.O. (4.10).

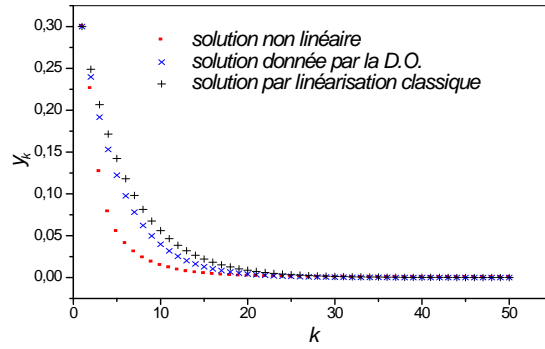


Figure 4-5: Variation des solutions y_k pour le système non linéaire (4.8), son linéarisé classique et son linéarisé par la D.O. (4.10).

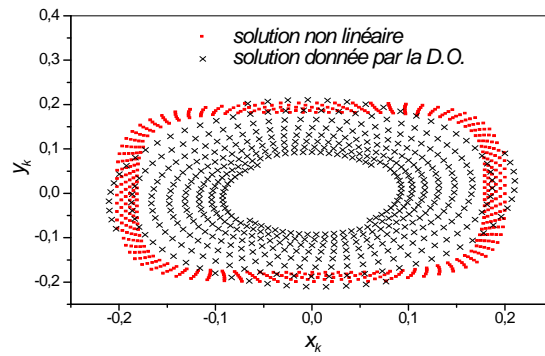


Figure 4-6: plan de phase (x_k, y_k) pour le système non linéaire (4.12) et son linéarisé par la D.O. (4.13).

Conclusion générale.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons présenté une application de la dérivation optimale au problème de stabilité non linéaire lorsque la dérivation classique est mise en défaut.

Les principaux résultats se résument comme suit

Sur le plan quantitatif, l'étude comparative par le calcul d'erreurs montre l'avantage de la dérivation optimale pour les approximations globales (approximations le long d'une trajectoire), tandis que sur le plan qualitatif, dans le cas scalaire, l'application de la méthode met en évidence l'influence du facteur et du degré du monôme. La définition des équilibres demi stables conduit directement à la détermination des domaines d'attraction. L'écriture de la dérivée optimale en fonction d'une intégrale simple du champ de vecteurs non linéaire permet l'élaboration d'une linéarisation paramétrée, qui en outre, distingue entre les dégénérescences quadratique et cubique à la valeur de bifurcation.

Dans le cas vectoriel, l'analyse numérique, lorsque les théorèmes de linéarisation classique ne sont pas applicables, (par exemple à cause de la non-régularité du champ de vecteurs) ou bien lorsque l'équilibre est non hyperbolique, montre la bonne concordance de la D.O. avec le système non linéaire, ceci est justifié par l'ordre de la méthode qui est le même que la non-linéarité, cette propriété permettant la distinction entre les bifurcations Poincaré-Andronov-Hopf supercritique et subcritique (les deux types de bifurcation sont caractérisés par une paire de valeurs propres purement imaginaires à la valeur de bifurcation).

Dans le cas hyperbolique, la méthode présente l'avantage de pouvoir distinguer entre une étoile et un foyer, alors que par la linéarisation classique, un foyer peut être confondu à une étoile dans certaines situations.

Les aspects qualitatifs et quantitatifs, présentés dans les systèmes à temps continu, peuvent être retrouvés lorsque le temps est discret ; l'introduction de la dérivée optimale dis-

crète permet d'associer aux systèmes discrets non linéaires des systèmes discrets linéaires et de résoudre les problèmes de stabilité lorsque, les valeurs propres du linéarisé tangent sont situées sur le cercle de rayon unité du plan complexe.

Visiblement, il reste beaucoup à faire pour comprendre la relation entre la dérivation optimale et la stabilité asymptotique ; parmi les prolongements possibles de notre travail, nous citons

- Une étude plus approfondie et plus rigoureuse d'un point de vue mathématique sur l'application de la méthode aux problèmes de bifurcation.
- Une étude plus approfondie sur la détermination du domaine d'attraction.
- Une étude, similaire à celle des chapitres deux et trois peut être élaborée dans le cas des systèmes non linéaires à temps discret.
- Une étude similaire à celle de la bifurcation Poincaré-Andronov-Hopf peut être élaborée dans le cas de la bifurcation Naimark-Sacker.

Bibliographie

- [1] **E. J. Rhout** (1877) , A Treatise on the Stability of a Given State of Motion, London : Macmillan.
- [2] **A. Lyapunov**, Problème Général de la Stabilité de Mouvement, Annals of Math. studies, 17. Princeton University Press (traduction de l'édition originale Russe publiée en 1892 par Mathematics Society of Kharkov).
- [3] **A. Herwitz**, (1895) , On the Conditions Under Which an Equation has only Roots with Negative Real Parts, Mathematische Annalen, 46:273-284.
- [4] **P. Vidal**, (1960) , Systèmes Echantillonnés Non Linéaires, Gordon et Breach.
- [5] **R.E. Kalman and J.E. Bertram**, (1960) , Control System and Design Via the "Second Method of Lyapunov" I Continuous Systems, Journal of Basic Engineering, june-1960.
- [6] **J. L. Lagrange**, (1965) , Mécanique Analytique (2vols) 1788, Edition Albert Blanchart, Paris.
- [7] **J. Ch. Gille, P. Decaulne M. Pelegrin**, (1967) , Systèmes Asservis Non Linéaires, tome 3, Méthodes Topologique, Stabilité, Dunod.
- [8] **H. Leipholz**, (1970) , Stability Theory, An Introduction to the Stability of Dynamical Systems and Rigid Bodies. Academic Press.

- [9] **V.I. Arnold**, (1971), Matrices Depending on Parameters, Russian Math. Surveys 26, 29-13.
- [10] **V.I. Arnold**, (1972), Lectures on Bifurcations on Several Families, Russian Math. Surveys 27,54-119.
- [11] **Y. Takahashi, M. J. Rabins and D. M. Auslander**, (1972), Control and Dynamical Systems, Addison-Wesley Publishing Company.
- [12] **B. Vujanovich**, (1973), Application of the Optimal Linearization to the Heat Transfer Problem, International Journal Heat Mass Transfer 16, 1111-1117.
- [13] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), Equations Différentielles Ordinaires, Tome I, Théorie Générale, Masson et Cie.
- [14] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), Equations Différentielles Ordinaires, Tome II, Stabilité et Solutions Périodiques, Masson et Cie.
- [15] **V. Arnold**, (1974), Equations Différentielles Ordinaires, Edition Mir.
- [16] **L. Pontriaguine**, (1975), Equations Différentielles Ordinaires, Edition Mir.
- [17] **N. Marsden and M. McCracken**, (1976), Hopf Bifurcation and its Applications, Applied Mathematical Science,19. Springer-Verlag.
- [18] **V. Arnold**, (1978), Chapitres Supplémentaires sur les Equations Différentielles Ordinaires, Edition Mir.
- [19] **A. J. Jimenez and S. W. Director**, (1978), New families of Algorithms for Solving Nonlinear Circuit Equations, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. cas-25, no. 1, January.
- [20] **J. A. Walker**, (1980), Dynamical Systems and Evolution Equations, Theory and Applications, Plenum press.

- [21] **J. Macki, A. Stauss**, (1982), Introduction to Optimal Control Theory, Springer-Verlag, New York.
- [22] **Z. Arstein**, (1982), Stability, Observability and Invariance, Journal of Differential Equations 44, 224 – 248.
- [23] **P. J. Holmes and F. C. Moon**, (1983), Strange Attractors and Chaos in Non-linear Mechanics, Journal of applied Mechanics Vol. 50/1021 December.
- [24] **T. matsumoto**, (1984), A Chaotic Attractor From Chua's Circuit, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. cas-31, no. 12, December.
- [25] **F. Verhulst**, (1984), Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag.
- [26] **M. Hasler et J. Neiryneck**, (1985), Circuits Non Linéaires, Presses Polytechniques Romandes.
- [27] **A. Z. Bensenane**, (1986), Linéarisation des Equations d'Etats Non Linéaires, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.
- [28] **C. Maganza, R. Caussé, F. Laloë**, (1986), Bifurcation, Period Doublings and Chaos in Clarinetlike Systems, Europhysics Letters 1 (6), pp. 295-302.
- [29] **A. Jordan, M. Benmouna, A.Bensnane and A. Borucki**, (1987), Optimal Linearization Method Applied to Resolution of State Equation, RAIRO APII 21, 175-185.
- [30] **A. Jordan, M. Benmouna, A.Bensnane and A. Borucki**, (1987), Optimal Linearization of Nonlinear, State Equation. RAIRO APII 21, 263-271.
- [31] **R. A. Smith**, (1987), Orbital Stability for Nonlinear Ordinary Differential Equations, Journal of Differential Equations 69, 265-287.

- [32] **L. O. Chua, Ch. A. Desoer and E. S. Kuh**, (1987), Linear and Nonlinear Circuits, McGraw-Hill Book Company.
- [33] **A. Iserles**, (1988), Nonlinear Stability and Asymptotics of O.D.E. Solvers, International Journal of Series of Numerical Mathematics, Vol. 86.
- [34] **P. Manneville**, (1990), Structure Dissipatives, Chaos et Turbulence, Academic Press.
- [35] **S. Wiggins**, (1990), Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag.
- [36] **J. Demailly**, (1991), Analyse Numérique et Equations Différentielles, Presse Universitaire de Grenoble.
- [37] **J. K. Hale and H. Koçak**, (1991), Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag.
- [38] Systèmes non linéaires, Volume 1 ; (1993), Modélisation-Estimation ; Ouvrage collectif réalisé par la DRET et la AFCET, Masson.
- [39] Systèmes non linéaires, Volume 2 ; (1993), Stabilité-Stabilisation ; Ouvrage collectif réalisé par la DRET et la AFCET, Masson.
- [40] Systèmes non linéaires, Volume 3 ; (1993), Commande des Systèmes Non Linéaires ; Ouvrage collectif réalisé par la DRET et la AFCET, Masson.
- [41] **Paul Glendinning**, (1994), Stability, Instability and Chaos, An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations.
- [42] **S. H. Strogatz**, (1994), Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison Wesley Publishing Company.
- [43] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995), Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N₀.95/10.

- [44] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995), Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [45] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995), Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure, Appl. Math. and Comp sci., N° 1, Vol. 5, pp 33-48.
- [46] **T. Benouaz**, (16 – 20 *June* 1995), Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by an Optimal Procedure, Proceeding of the 2nd International Conference on Differential Equations in Marrakech, Maroc.
- [47] **T. Benouaz**, (13 – 17 *August* 1995), Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation : The Scalar Case, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp. 19-22 , Plovdiv, Bulgaria.
- [48] **T. Benouaz**, (3–5 *December* 1996), Lyapounov Function Generated by Least Square approximation, Deuxième Conférence Maghrébine sur l'Automatique Vol.1 pp.73-75, Tlemcen.
- [49] **T. Benouaz**, (1996), Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire, Thèse de Doctorat d'état, Tlemcen.
- [50] **T. Benouaz and O. Arino**, (1996), Least Square Approximation of a Non-linear Ordinary Differential Equation, Computers Math. Applic., Vol. 31, N° 8, pp 69-84.
- [51] **J. P. Corriou**, (1996), Commande des Procédés, Techniques et Documentations.
- [52] **R. Sepultine, M. Janckovich and P. Kokotovich**, (1997), Constructive Non-linear Control, Springer-Verlag London.

- [53] **S. Murashige and K. Aihara**, (1997), Coexistence of Periodic Roll Motion and Chaotic one in Forced Flooped ship, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 619-626.
- [54] **K. Eguchi and T. Inoue**, (1997), A Current-Mode Analog Chaos Circuit Realizing a Hénon map. IEICE Trans. Electron., Vol. E80-c, NO. 7.
- [55] **M. B. Allen III, E. L. Isaacson**, (1998), Numerical Analysis for Applied Science, John Wiley & Sons, Inc.
- [56] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998), Optimal Approximation of the Initial Value Problem, Computers Math. Applic. vol. 36, N°1, pp.21-32.
- [57] **S. A. Lazzouni**, (1998), Analyse des Aspects Qualitatifs de Certaines Classes de Circuits électroniques non linéaire, thèse de Magister en Electronique.
- [58] **C. Robinson**, (1998), Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos, CRC Press.
- [59] **T. Benouaz, F. Bendahmane, A. Chikhaoui**, (1999), Generalisation of the Optimal Linearization of Nonlinear Ordinary Differential Equation, Submitted for Publication in Mathematics and Computer in simulation journal.
- [60] **T. Benouaz**, (2000), Optimal Derivative of a Nonlinear Ordinary Differential Equation, Equadiff 99, International Conference on Differential Equations, Vol. 2, pp 1404-1407, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [61] **G. Conte, C. H. Moog and A.M. Perdon**, (1999), Lecture Notes in Control Systems, Springer-Verlag London.
- [62] **M. F. Bendahmane**, (2000), Contribution à l'Etude des Systèmes Non Linéaires Avec Excitation, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.

- [63] **A. Chikhaoui**, (2000), Contribution à l'Etude de la Stabilité des Systèmes Non Linéaires, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.
- [64] **T. Benouaz et F. Belkhouche**, (7 – 8 *mai* 2001) Etude Numérique des Bifurcations Elementaires par la Méthode de Dérivation Optimale – Linéarisation à la Valeur de Bifurcation, Deuxièmes Journées de Mathématiques, Tlemcen.
- [65] **T. Benouaz et F. Belkhouche** (4 – 6 *juin* 2001), Etude de la Bifurcation Engendrée par une Transition de Phase, Application à un Condensateur Non Linéaire, Congrès Euro-Méditerranéen de la Matière Condensée, Tlemcen.