

# Table des Matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>4</b>
0.1 Historique . . . . .	4
0.2 Contribution . . . . .	7
<b>1 Rappels:</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Les équations Proies Prédateurs de Lotka - Volterra . . . . .	10
1.2.1 Présentation du modèle . . . . .	11
1.3 Modèle Ratio dépendants: . . . . .	13
1.4 Les phénomènes d'extinction . . . . .	14
1.5 Rappels sur la Méthode de la Dérivée Optimale: . . . . .	17
1.5.1 Méthode de la Dérivée Optimale: . . . . .	18
<b>2 Etude théorique de deux modèles ratios-dépendants:</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction: . . . . .	21
2.2 Modèle Arditi - Ginzburg: . . . . .	22
2.2.1 Présentation du modèle . . . . .	22
2.2.2 Position du problème: . . . . .	25
2.2.3 Points d'équilibre du modèle ratio-dépendant: . . . . .	27
2.2.4 Le point d'équilibre compliqué ( $O(0,0)$ ): . . . . .	30
2.2.5 Les points d'équilibre A et B. . . . .	33

2.2.6	Interprétation des portraits de phase . . . . .	35
2.3	Modèle Parasites - Population hôte . . . . .	36
2.3.1	Introduction: . . . . .	36
2.3.2	Position du problème: . . . . .	37
2.3.3	Points d'équilibre du modèle Parasites-population hôte: . . . . .	39
2.3.4	Résumé des résultats: . . . . .	42
2.3.5	Interprétation des résultats: . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Application numérique:</b>	<b>47</b>
3.1	Modèle ratio dépendant d'Arditi-Ginzburg . . . . .	47
3.1.1	Introduction . . . . .	47
3.1.2	Cas ou l'équilibre $O(x=0,y=0)$ est un col (point-selle): . . . . .	48
3.1.3	Commentaire . . . . .	51
3.1.4	Cas ou l'équilibre $O(x=0,y=0)$ est un noeud stable . . . . .	52
3.1.5	Commentaire . . . . .	53
3.1.6	Cas ou l'équilibre $O(x=0,y=0)$ est un noeud instable . . . . .	55
3.1.7	Commentaires: . . . . .	58
3.2	Parasites / Population hôte: . . . . .	59
3.2.1	Introduction . . . . .	59
3.2.2	1er scénario: . . . . .	60
3.2.3	Commentaire . . . . .	63
3.2.4	2eme scénario . . . . .	63
3.2.5	Commentaire . . . . .	67
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>72</b>

## Introduction Générale.

# Introduction générale

## 0.1 Historique

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches,...[39], [11], [12], [13], [39] et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, les sciences physiques et plus récemment la biologie, l'électronique, spécialités où de nombreux modèles conduisent à des équations du même type [23]. La plupart de ces équations sont globalement de nature non linéaire. La dénomination "non-linéaire" rassemble des systèmes extrêmement divers ayant peu de points communs dans leur comportement. Il résulte qu'il n'existe pas, jusqu'à présent, de théorie d'ensemble des équations non linéaires. Parmi ces problèmes non linéaires, une classe importante est modélisée par les équations différentielles ordinaires non linéaires de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x). \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (0.1)$$

La seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle a été caractérisée par le développement de méthodes mathématiques destinées à la modélisation des systèmes biologiques. L'accumulation des données expérimentales en Biologie nécessite la construction de modèles dynamiques permettant de comprendre et de décrire l'évolution au cours du temps de certaines variables biologiques. Les premiers efforts de modélisation en dynamique des populations se sont concentrés vers des modèles où l'on manipule une variable agrégée caractéristique de la population considérée dans son ensemble, par exemple la densité. Ces modèles sont appelés modèles agrégés de dynamique des populations. Ils s'appuient sur une équation différentielle ou sur plusieurs équations différentielles couplées (modèle logistique, modèle

de Lotka-Volterra). Donc, la modélisation des systèmes biologiques peut se faire à l'aide de systèmes d'équations différentielles ou bien en utilisant des modèles de simulation. Ces modèles permettent de prendre en compte chaque individu d'une population et de simuler son comportement et son interaction avec les autres individus.[28].

Par ailleurs, la construction et l'étude d'un modèle proie prédateur sont demeurées un domaine important en écologie théorique depuis les célèbres équations de Lotka (1924) et Volterra (1926). Ils ont prévu que la coexistence était une propriété normale.

En effet, R. Arditi et ses collaborateurs ont introduit une notion d'invariance du modèle par l'identification d'espèces; cela consiste à dire que, si l'on identifie deux espèces comparables d'un même niveau trophique (deux prédateurs sur une même proie par exemple), on doit obtenir la même équation qu'en partant d'une seule espèce.

En modélisation mathématique des phénomènes biologiques, on ne dispose pas, en général, de lois rigoureuses comme celles de la physique: pour être plus précis, il n'existe pas de "loi" donnant la forme analytique d'une relation proie prédateur. On est donc amené à utiliser des raisonnements de logique et de bon sens, ou alors, quand on dispose de mesures, des formules reproduisant le mieux et le plus économiquement possible la forme des courbes expérimentales.

De nombreux travaux ont été consacré à ce sujet, différant généralement par la motivation de l'auteur (Mécanique, Géométrie, Physique,...). Une liste exhaustive des travaux portant sur cette classe d'équations comprend de nombreux articles. Nous citerons les ouvrages qui nous servent dans notre étude: Coddigton-Levinson (1995), Hale (1969, 1971), Rouche-Mawhin (1973), Pontriaguine (1975), Reinhart (1975), Sibony-Mardon (1988), Demailly (1991).

Un certain nombre de problèmes ont été rencontrés dans le traitement des équations différentielles ordinaires non linéaires. Par exemple:

- 1) L'impossibilité de situer les valeurs propres par rapport à l'axe des imaginaires, en particulier si une ou plusieurs valeurs propres sont de cet axe.
- 2) Si l'équilibre est un centre pour l'équation linéaire, c'est à dire, s'il y a des valeurs

propres imaginaires où si 0 est valeur propre, alors le comportement de la solution ordinaire non linéaire au voisinage d'un tel point peut être très variable.

3) L'impossibilité de déterminer la régularité de la fonction au voisinage du point stationnaire: il n'est pas possible de calculer la dérivée au sens de Fréchet. Cela peut se produire par exemple si la fonction est seulement localement Lipschitzienne..

4) Dans le cas où le système linéarisé présente un noeud et quand la non linéarité n'est pas assez petite. Le problème se traduit par le fait que dans ce cas, les courbes intégrales d'un champ de vecteurs quelconque, au voisinage d'un point singulier ne ressemblent pas toujours à celle du système qui lui est associé.

L'existence d'écueils importants à la bonne utilisation de cette méthode, a suscité plusieurs recherches pour établir d'autres techniques de linéarisation permettant de mieux approcher les systèmes non linéaire..Il n'est pas possible d'analyser par la méthode traditionnelle de linéarisation le comportement au voisinage de l'origine. Cet obstacle peut nuire sérieusement à la bonne compréhension d'un modèle. l'une d'elle, appelée "Linéarisation Optimale" est basée sur le principe de moindres contraintes de Gauss, a été introduite à l'origine par Vujanovic (1973), [24] initialement pour l'étude des vibrations non linéaires. récemment, elle a été utilisée par Jordan et al., [25], [26], [27] dans le cas du transfert de chaleur et de la linéarisation de équations d'états non linéaires [28].

Dans le but d'améliorer la linéarisation par rapport aux techniques existantes, une nouvelle méthode de linéarisation, appelée "Dérivée Optimale", a été introduite par Arino-Benouaz [29], [30], [31], [32], basée sur le principe des moindres carrés qui permet d'associer une application linéaire à une équation non linéaire, celle-ci étant conçue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable au cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivable.

## 0.2 Contribution

Dans le domaine biologique, les modèles proies prédateurs de type ratio dépendant posent un déficit concernant leurs dynamiques proche de l'origine. Ceci est dû au fait que la réponse fonctionnelle est indéfinie à l'origine donc elle ne peuvent être linéarisé autour de ce point.

Ceci constitue l'idée générale du point de départ de ce mémoire de tester et d'appliquer la nouvelle méthode de dérivation optimale introduite par BENOUAZ et ARINO [33] pour l'analyse de la stabilité aux points d'équilibres des modèles physiques régis par des équations différentielles ordinaires non linéaires.

Il y a lieu de noter que le présent travail ne prétend pas être exhaustif sur le thème de la stabilité, notre objectif est d'utiliser la méthode de la dérivation optimale pour l'étude de la stabilité aux point d'équilibres afin d'étudier le phénomène d'extinction.

En s'inspirant des perspectives proposés par les travaux de BEKKOUCHE [34], CHIKHAOUI [35] et LASSOUANI, on s'est intéressé à:

Au phénomène d'extinction et à sa signification mathématique et biologique.

Aux différents scénarios d'extinction et de coexistence qui dépendent du choix des conditions initiales.

Nous illustrons les possibilités de la dérivée optimale d'être un outil puissant et précis pour approcher les systèmes non linéaires par des systèmes linéaires adéquats. (Modèles ratio dépendants).

Notre travail est configuré comme suit:

*Le premier chapitre*, comporte un rappel sur les modèles de Lotka Volterra, les modèles ratio dépendants, ainsi que Les principaux travaux qui ont contribués à leurs compréhension. Ce chapitre comportera aussi une présentation de la cette méthode développée par ARINO-BENOUAZ qui est une méthode d'approximation globale par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés. Cette présentation est compléter par l'énumération de ses principales propriétés.

Un rappel sur les principaux phénomènes d'extinction est développé dans ce chapitre.

*Le deuxième chapitre*, est consacré à la présentation de deux modèles ratios dépendants, à savoir:

- Le Modèle d'Arditi-Ginzburg.: indéfini à l'origine, l'étude de la réponse fonctionnelle est réalisée grâce à la dérivée optimale. Car l'origine représente l'annulation des deux sociétés. Nous donnons ensuite une étude théorique succincte dont le but est l'analyse et la détermination des points d'équilibres.

- Le modèle Parasite-Population Hôte: est un modèle inspiré du premier modèle (Arditi-Ginzburg.). C'est un modèle qui représente un exemple concret de dépendance d'un prédateur de sa proie. La relation qui se développe dans ce modèle suit un certain mode de transmission: Elle peut être verticale ou horizontale. L'origine, comme point d'équilibre représente l'extinction de la population hôte. Vu que la réponse fonctionnelle n'est pas dérivable en ce point, elle ne peut être linéarisé autour de ce point. Ce qui justifie la recherche d'autres techniques de linéarisation pouvant donner des résultats satisfaisants concernant de ces modèles non linéaires.

*Le troisième chapitre*, est consacré à l'aspect numérique, c'est à dire, la mise en oeuvre numérique de la sythèse de notre système en utilisant la dérivée optimale. Un calcul d'erreur quadratiques est présenté, suivi d'une comparaison.

La principale méthode dans l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle non linéaire est d'étudier les valeurs propres de sa linéarisé.

Enfin, une conclusion achèvera notre travail.

Il y a lieu de noter que ce travail à été vaalorisé par l'acceptation d'une communication intitulée "The chaotic waterwheel: Bifurcation analysis using bifurcation package AUTO2000 of nonlinear Lorenz model equations." dans le "Marrakech world conference on differential equations and applications,2006".



# Chapitre I

## Rappels

# Chapitre 1

## Rappels:

### 1.1 Introduction

L'incroyable complexité que présente le fonctionnement des modèles ratio dépendants à l'origine, ne peut être suivit par la simple acquisition de l'ensemble des paramètres qui le caractérisent comme cela été longtemps le cas lorsque la biologie se confinai à une démarche descriptive.

Ce chapitre est consacré aux rappels sur les principales notions mathématiques et biologiques abordées dans notre mémoire.

### 1.2 Les équations Proies Prédateurs de Lotka - Volterra

Le modèle de Lotka - Volterra décrit l'évolution d'une population proie et d'une population prédateur en interaction. Ce modèle à été largement étudié du fait qu'il soit relativement simple, et considéré comme la base des systèmes d'interaction proies prédateurs.

### 1.2.1 Présentation du modèle

La croissance de deux espèces concurrente dans un environnement fermé à été analysée par Volterra (Baily et Olis 1986) après la 1ère guerre mondiale.

Un modèle à été conçu sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP \\ \frac{dP}{dt} = -cP + dNP \\ N(0) = N_0 \quad P(0) = P_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où:

$a, b, c, d$ : représente la densité de Biomasse.

$N$ : Dynamique intrinsèque de croissance.

$P$ : Décroissance exponentielle.

Les termes d'interaction sont proportionnelles aux quatités de chacune des espèces.

Cette équations est également comme le modèle Proie - prédateurs de Lotka Volterra (1920).

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -cP + dNP \\ \frac{dN}{dt} = aN - bNP \end{cases} \quad (1.2)$$

En l'absence de prédateurs, les proies ont un taux de croissance constant (On suppose une abondance de nourriture et une absence de compétition):

$$\frac{n'(t)}{n(t)} = a$$

De même, les prédateurs ont tendance à disparaître en l'absence de proies, faute de nourriture:

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = -c$$

Il reste à prendre en compte les interactions entre les deux especes: Le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû aux prédateurs) est supposé proportionnel

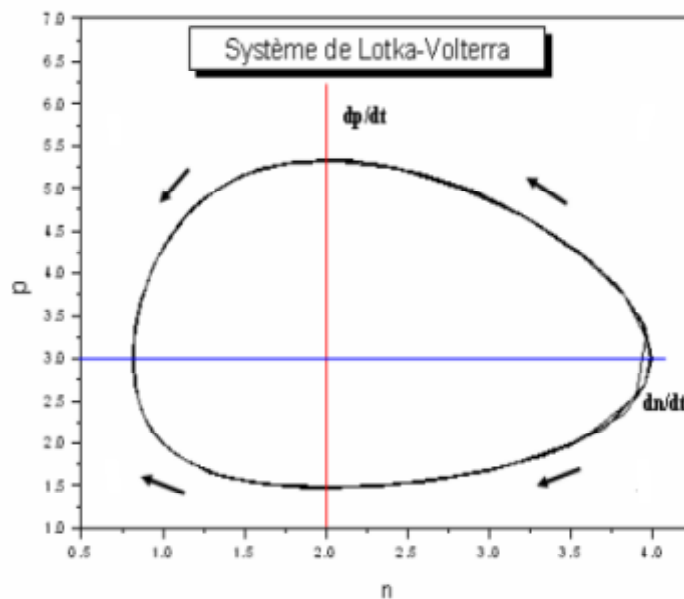
au nombre de prédateurs. De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateur est proportionnel à la quantité de nourriture disponible. C'est à dire au nombre de proies.

Des considérations nous conduisent aux équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{n'(t)}{n(t)} = a - bp \\ \frac{p'(t)}{p(t)} = -c + dn \end{cases} \quad (1.3)$$

D'un point de vue mathématique, il s'agit d'un système de deux équations différentielles, auquel on ajoute des conditions initiales:

$$\begin{cases} n' = n(a - bp) \\ p' = p(-c + dn) \end{cases}$$



**Figure (1.1):** Représentation du modèle de Lotka-Volterra, modélisant l'évolution des proies et des prédateurs dans un plan de phase.

### 1.3 Modèle Ratio dépendants:

Dans les systèmes écologiques, la fonction de réponse traduit la manière dont le prédateur s'adapte aux changements de la densité de la proie.

Parmi les modèles les plus classiques, il y a la fonction de type Michaelis-Menten ou de type Holling II.

Récemment, les modèles traditionnels ont été mis en question par de nombreux biologistes : Arditi et Guinzburg, Arditi, Guinzburg et Akcakaya , Gutierrez. Une réponse ratio-dépendante a été mise en évidence par Arditi. Une réponse ratio dépendante est une réponse qui dépend du rapport entre la proie et le prédateur. Ce type de réponse correspond notamment au partage de la ressource entre les prédateurs.

Un exemple de modèle ratio dépendant est le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx) - \frac{cxy}{my + x} \\ \frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{fx}{my + x}\right). \end{cases} \quad (1.4)$$

Un problème rencontré dans le traitement de ces équations est l'absence de régularité au voisinage de l'origine. il n'est pas possible d'analyser par la méthode traditionnelle de linéarisation le comportement au voisinage de l'origine. Cet obstacle peut nuire sérieusement à la bonne compréhension d'un modèle.

Il y a des méthodes qui permettent de contourner en partie cet obstacle, notamment celle de la valeur propre non linéaire. Leur mise en oeuvre est toutefois fort délicate et suppose une bonne connaissance de l'analyse fonctionnelle, sans commune mesure avec les techniques de développement de Taylor que l'on utilise dans le cas de points critiques réguliers.

## 1.4 Les phénomènes d'extinction

Le modèle proie prédateur classique à été proposé en premier lieu par Lotka-Volterra qui ont prédit que la coexistence est une propriété naturelle d'un système proie prédateur.

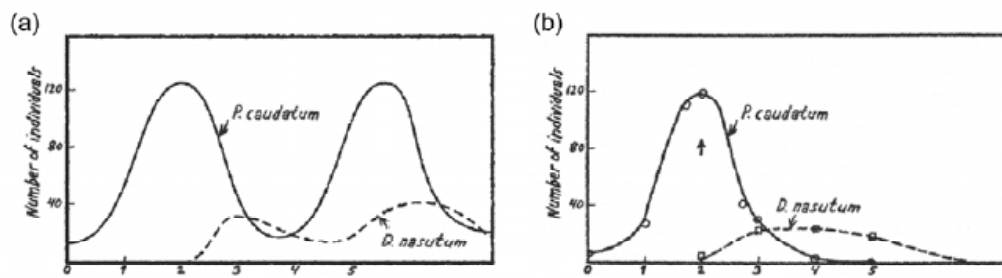
Afin de tester la validité de ces prédictions, Gause (1934) était incapable de démontrer ce système (équation de Lotka-Volterra). En utilisant le système "Didinium Paramecium", Gause n'a observé qu'expérimentalement la dualité entre la proie et le prédateur. Presque 40 ans après, Luckinbill (1973) démontra que la coexistence pouvait être générée en diminuant l'interaction proie-prédateur et en limitant la disponibilité de la nourriture.

Veilleux (1979) a développé les travaux de Luckinbill démontrant ainsi que l'extinction du prédateur, la coexistence et la dualité d'extinction des deux espèces peut être contrôlée par les paramètres fondamentaux de l'interaction. Les résultats de Luckinbill et Veilleux ont une interprétation originale des équations de Lotka-Volterra.

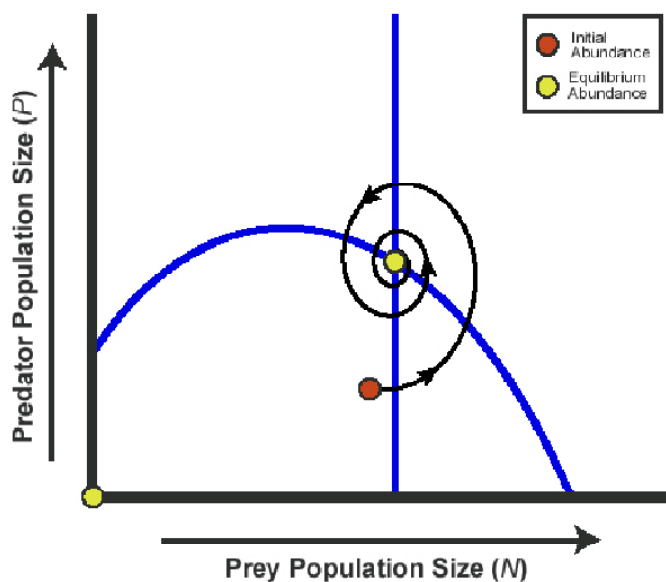
Les modèles ratio dépendants représentent une alternative viable aux modèles proie prédateur et les récents travaux sur le sujet ont mis en évidence la dynamique très riche des modèles ratios dépendants. Les travaux de (Berezovskaya et al. 2001) nous permettent d'avoir une meilleure compréhension des résultats de Luckinbill et Veilleux.

La réponse fonctionnelle est un maillon important de la modélisation biologique. Plus elle prend en compte les paramètres du système, mieux seront les résultats numériques. Le phénomène d'extinction représente une préoccupation majeure pour les écologistes. Si la réponse fonctionnelle n'est pas définie à l'origine, il est vital de chercher la meilleure méthode qui nous permettra d'observer les propriétés des modèles ratio dépendants et

de surmonter les problèmes de continuités liés à la réponse fonctionnelle.



**Figure (1.4.a):** Plan de phase (approximatif) représentant l'évolution d'un modèle *Didinium – Paramecium*



**Figure (1.4.b) :** Diagramme de bifurcation (Veilleux).

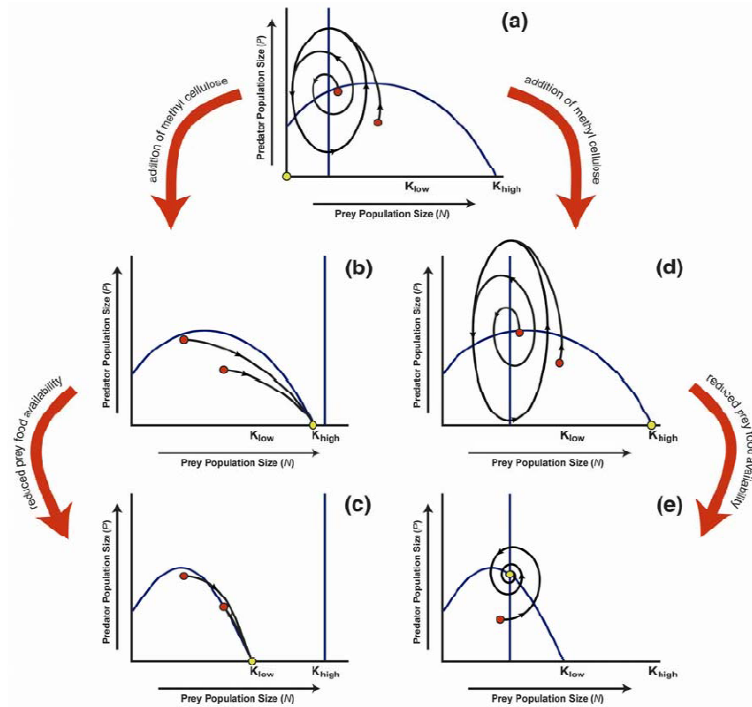


Figure (1.4.c): Schéma récapitulatif des travaux de Luckinbill (1973) basé sur les travaux de Roseinzweig-MacArthur.

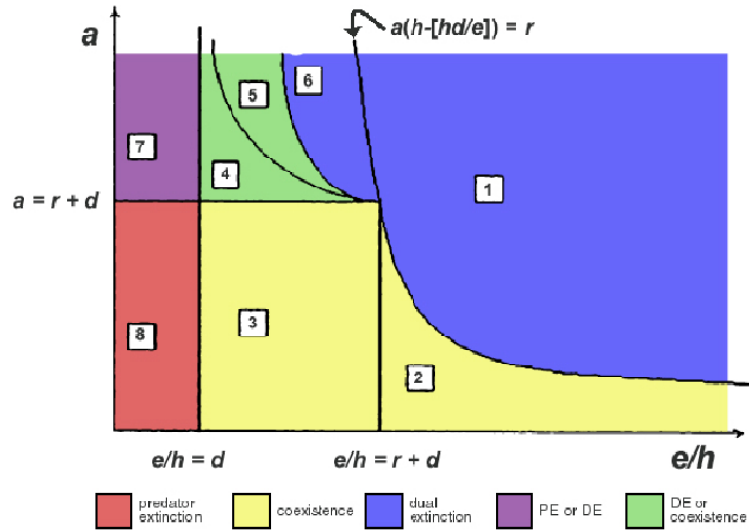


Figure (1.4.d) :Diagramme de bifurcation (Luckinbill).



## 1.5 Rappels sur la Méthode de la Dérivée Optimale:

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale, si la fonction  $F$ , qui définit l'équation est suffisamment régulière au voisinage de l'équilibre et, si la linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, ce qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines de zéro de l'équation linéaire. Par contre, la tâche est toute autre en l'absence de régularité ou si le point d'équilibre est un centre.

Concentrons nous sur le cas non régulier. Imaginons même le cas où seul l'équilibre est non régulier. Dans ce cas, on ne peut pas dériver l'équation et on ne peut pas donc étudier l'équation linéarisée. Une question naturelle se pose alors : y a-t-il d'autres moyens d'associer à l'équation non linéaire, une équation linéaire dont le comportement asymptotique soit le même?

En effet, on peut envisager par exemple, de substituer à la dérivation, la notion de sous différentiel. On obtient ainsi, une équation différentielle multivoque. L'idée retenue par Benouaz et Arino repose sur une méthode d'approximation. Donc ils ont introduit la notion de la dérivée optimale. Il s'agit en fait d'une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés.

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement la dérivation optimale et ses propriétés principales.

### 1.5.1 Méthode de la Dérivée Optimale:

Considérons le système d'équations différentielles non linéaires suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $F$  : est définie dans certain ouvert  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , avec les hypothèses suivantes

H1)  $F(0) = 0$ .

H2) le spectre  $\sigma(DF(x))$  est contenu dans l'ensemble  $\{z : \text{Re } z < 0\}$  pour tout  $x \neq 0$  dans un voisinage de 0 pour lequel  $DF(x)$  existe.

H3)  $F$  est continue, localement Lipschitzienne..

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(t)$  la solution de l'équation non linéaire issue de  $x_0$ . A toute application linéaire  $A \in L(\mathbb{R}^n)$ , On associe la solution  $y(t)$  de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t), y(0) = y_0 \quad (1.5)$$

et l'on cherche à minimiser la fonctionnel

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (1.6)$$

le long de cette solution, ce qui donne

$$A = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] \left[ \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \right]^{-1}. \quad (1.7)$$

Plus précisément, la procédure est définie de la manière suivante :

Etant donné  $x_0$ , on choisit une première application linéaire, par exemple, si  $F$  est dérivable en  $x_0$ , on pourra prendre  $A_0 = DF(x_0)$ , ou alors la valeur de la dérivée en un point proche de  $x_0$ , ce qui est toujours possible si  $F$  est seulement localement Lipschitzienne..

Si  $A_0$  est une application asymptotiquement stable, la solution issue de  $x_0$  de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), y(0) = y_0, \quad (1.8)$$

tend vers 0 exponentiellement. On peut évaluer

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (1.9)$$

et on minimise  $G$  sur l'ensemble des matrices  $A$ . Si  $F$  est linéaire, le minimum est atteint pour la valeur  $A = F$ . (on a alors  $A_0 = F$ ). Dans le cas général, on peut toujours minimiser  $G$  et la matrice qui donne le minimum est unique. On appelle  $A_1$  cette matrice, on remplace  $A_0$  par  $A_1$ , on remplace  $y$  par la solution de l'équation associée à  $A_1$ , et on continue. La dérivée optimale (qui dépend en général de  $x_0$ ) est la limite (si elle existe) de la suite  $A_j$  ainsi construite.

**Etude Theorique de deux  
Modèles ratios-dépendants**

# Chapitre 2

## Etude théorique de deux modèles ratios-dépendants:

### 2.1 Introduction:

Dans ce chapitre, le comportement, qualitatif, d'une classe de systèmes ratio dépendants, à l'origine, est étudiée. On montre que l'origine est un point critique d'un ordre supérieur.. Il peut exister de nombreux genres de structures topologiques au voisinage de l'équilibre (Orbites parabolique, elliptique, ...). Ces structures ont des implications importantes pour le comportement global du système, surtout sur le plan biologique.

Concrètement, deux modèles ratio dépendants sont étudiés. Le premier est le modèle d'Arditi Ginzburg. Le second traite de l'effet de prédation d'un parasite sur une population hôte.

## 2.2 Modèle Arditi - Ginzburg:

### 2.2.1 Présentation du modèle

Le modèle proie-prédateur ratio-dépendant général d'Arditi et de Ginzburg. (1989) est le suivant:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN_{\varphi}(N) - g\left(\frac{N}{P}\right) \\ \frac{dP}{dt} = eg\left(\frac{N}{P}\right)P - qp. \end{cases} \quad (2.1)$$

Là où la fonction  $rN_{\varphi}(N)$  caractérise la vitesse de la croissance de la proie en absence de prédateurs.

La fonction linéaire  $qp$  décrit la vitesse de la mort prédatrice en absence de proies.  $g(x) = g\left(\frac{N}{P}\right)$  représente la fonction trophique ou la réponse fonctionnelle, décrit le nombre de proie consommées par prédateur par unité de temps.

$e$  l'efficacité de la conversion prédatrice.

La forme la plus spécifique de ce modèle assume la forme logistique familière pour  $N_{\varphi}(N)$  et la forme hyperbolique de Monod-Holling pour la réponse fonctionnelle (la fonction trophique):

$$g(x) = \frac{\alpha x}{1 + \alpha h x} = \frac{\alpha \frac{N}{p}}{1 + \alpha h \frac{N}{p}} = \frac{\alpha N}{p + \alpha h N} \quad (2.2)$$

$$N_{\varphi}(N) = N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.3)$$

avec

$$\begin{cases} (N, p) \in [0, \infty)^2 \setminus (0,0) \\ G(N > 0, 0) = \frac{1}{h} \\ G(0, P > 0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, nous étudierons le système:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\alpha NP}{P + \alpha h N} \\ \frac{dP}{dt} = \frac{e\alpha NP}{P + \alpha h N} - qp \end{cases} \quad (2.4)$$

Sans compter les densités des populations  $N$  et  $P$ , les paramètres du système sont les valeurs non négatives  $r$ ,  $K$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $e$  et  $q$ .

$r$ : le taux de croissance de la population de proie.

$K$ : la capacité de charge de la population de proies en absence de prédateurs.

$q$ : le taux prédateur de mortalité normale.

$e$ : l'efficacité de la conversion prédatrice.

Les paramètres  $\alpha$  et  $h$  caractérisent la fonction trophique ratio-dépendante:

$h$ : le prédateur du temps.

$\alpha$ : le taux maximum de consommation de proie.

Avec les changements appropriés des variables  $(N, P, t) \longrightarrow (x, y, \tau)$  et des paramètres du système, le modèle peut être simplifié à une forme sans dimensions avec un nombre réduit de paramètres indépendants. Ceci permet une analyse mathématique plus facile tout en préservant les problèmes essentiels. Le choix de la forme et de la combinaison spécifique de  $r, K, \alpha, h, e$  et  $q$  en tant que nouveaux paramètres sont essentiellement définies par le but écologique de l'étude.

Le but actuel est l'étude du système ratio-dépendant, principalement dans le cadre de la dépendance au niveau de la population prédatrice, c'est à dire, pour des changements de paramètres qui caractérisent les relations trophiques. Ceci mène à la réduction suivante du modèle:

$$N = KX, \quad P = K\alpha hy, \quad t = \frac{\tau}{r} \quad \text{avec les paramètres: } v = \frac{\alpha}{r}, \quad \mu = \frac{e}{rh}, \quad \gamma = \frac{q}{r}$$

Alors, les équations dynamiques deviennent:

$$\begin{cases} \frac{d(Kx)}{d\left(\frac{\tau}{r}\right)} = rKx(1-x) - \frac{\alpha Kxy}{x+y} \\ \frac{d(\alpha hKy)}{d\left(\frac{\tau}{r}\right)} = e\alpha K\frac{xy}{x+y} - q\alpha hKy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - \frac{\alpha}{r}\frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{e}{hr}\frac{xy}{x+y} - \frac{q}{r}y \end{cases}$$

Finalement, on aboutit au système d'équations dynamiques cohérent suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - v\frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{d\tau} = -\gamma y + \mu\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (2.5)$$

Les paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$  sont des valeurs strictement positive, ils ont la signification suivante:

$\gamma$ : représente le taux de mortalité de prédateurs.

Les composants trophiques sont caractérisés par les deux paramètres  $\mu$  et  $v$  qui représentent respectivement ce qui suit:

-le taux maximum (asymptotique) de prédateurs, ou bien les capacités croissantes prédatrices.

-le taux de mortalité maximum (asymptotique) de proies dû à la prédation (les capacités de consommation).

Le modèle choisit a été réduit à une forme différente, adapter aux principaux paramètres (proies et les caractères trophiques fixes). Il est significatif que les deux réductions soient équivalentes mathématiquement.

Cette partie est consacrée aux résultats relatifs à l'étude mathématique du modèle d'arditi Ginzburg ainsi qu'à sa dépendance des paramètres positifs  $\mu$ ,  $v$  et  $\gamma$ . Pour cela, nous



allons diviser l'espace des paramètres en huit domaines correspondants. Chaque domaine est associé à un plan de phase d'une telle manière que les domaines correspondent aux bifurcations du système.

En effet, Le modèle de Arditi Ginzburg possède dans le premier quadrant ( $yo x$ ) trois points d'équilibre:  $O(x = 0, y = 0)$ ,  $A(x = 1, y = 0)$  et un autre non trivial  $B(x = x^*, y = y^*)$ .

$$\begin{cases} x(1-x) - v \frac{xy}{x+y} = 0 \\ -\gamma y + \mu \frac{xy}{x+y} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

D'ailleurs, dans beaucoup de modèles ratio-dépendants, l'origine  $O$  est un point d'équilibre compliqué. Comme nous le démontrons ci dessous, les particularités du système sont essentiellement déterminées par les caractéristiques du point  $O$ .

### 2.2.2 Position du problème:

L'espace de paramètres  $(\gamma, \mu, v)$  est subdivisé en huit domaines de différentes phases pour un taux de mortalité de prédateurs  $\gamma$  arbitrairement fixé.

$$\text{MM} : \begin{cases} \mu = \gamma + 1 \\ v < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{Figure (2.2.1)}$$

$$\text{NN} : \begin{cases} v = \gamma + 1 \\ \mu < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{Figure (2.2.1)}$$

$$\alpha : v = \mu = \gamma + 1 \quad \text{Figure (2.2.1)}$$

$$H : \begin{cases} v = \frac{\mu \left( \gamma + \frac{\mu}{\mu - \gamma} \right)}{\mu + \gamma} \\ \gamma < \mu < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{Figure (2.2.1)}$$

$$BA : \mu = v \quad \text{Figure (2.2.1)}$$

$$BO : v = \frac{\mu}{\mu - \gamma} \quad \text{Figure (2.2.1)}$$

Pour MM et NN: Changement de structure topologique au voisinage du point d'équilibre O pour des valeurs de paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$  correspondant à ces surfaces.

H: Bifurcation supercritique d'Andronov-hopf.

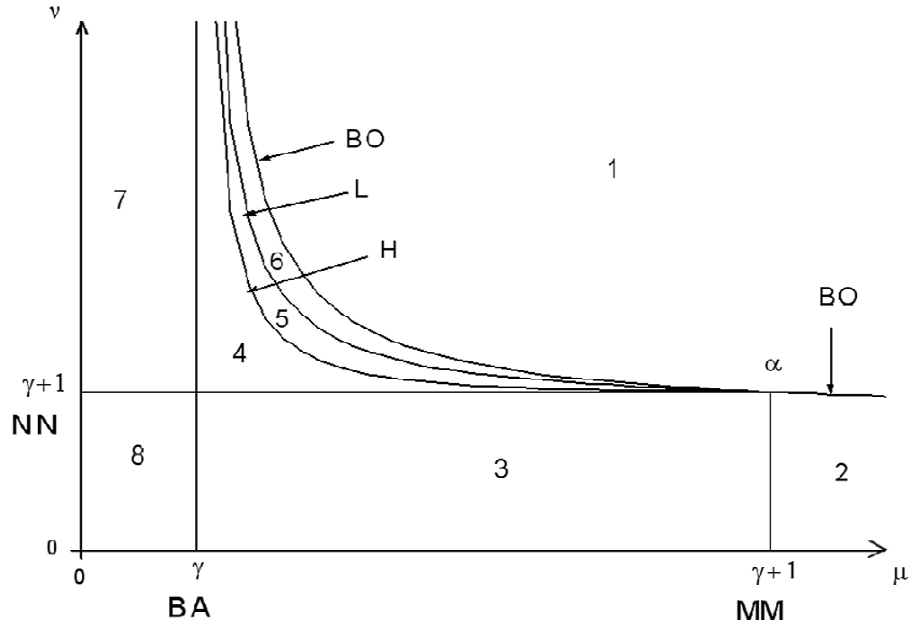
BO et BA: Apparition ou disparition de B.

L: Apparition ou disparition des contours hétérocliniques. C'est à dire, ceux qui correspondent aux bifurcations hétérocliniques, constitués par les séparateurs des points d'équilibres O et A. Cette frontière est associée à une bifurcation non locale.

$\alpha$ : Le système a une première intégrale de la forme:

$$(\gamma + 1) \ln \left( \frac{x + y}{x} \right) - y \left( 1 + \frac{\gamma}{x} \right) = C \quad (2.7)$$

où  $C$  est une constante arbitraire. La *Figure(2.2.1)* représente le portrait de phase des paramètres du système étudié pour un  $\gamma$  fixe.



**Figure(2.2.1):**Diagramme de bifurcation pour un  $\gamma$  arbitrairement fixés.

L'explication du théorème est fournie par l'analyse et souvent par des méthodes numériques de la théorie de bifurcation. (Par exemple, Arnold, 1983; Khibnik et autres, 1993; Kuznetsov, 1995; Levitin, 1989). Le tableau contient des exemples des valeurs de paramètres  $(\mu, v)$  pour une valeur fixe de  $(\gamma = 1.5)$ , correspondant aux huit domaines de l'espace de paramètres.

domaine	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu$	3	3	2	2	2.1	2.2	1	1
$v$	2	1	1	2.7	2.92	2.92	2.7	1

### 2.2.3 Points d'équilibre du modèle ratio-dépendant:

Pour déterminer les points d'équilibres, il suffit d'annuler les équations dynamiques:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} x(1-x) - v\frac{xy}{x+y} = 0 \\ -\gamma y + \mu\frac{xy}{x+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1-x - v\frac{y}{x+y}\right) = 0 \\ y\left(-\gamma + \mu\frac{x}{x+y}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } 1-x - v\frac{y}{x+y} = 0 \\ y = 0 \text{ ou } -\gamma + \mu\frac{x}{x+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = \frac{x(1-x)}{x+v-1} \\ y = 0 \text{ ou } x = \frac{\gamma y}{\mu-\gamma} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\gamma}{(\mu-\gamma)} \frac{x(1-x)}{(x+v-1)} \Leftrightarrow (\mu-\gamma)(x+v-1) = (1-x)\gamma \text{ avec } x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\gamma - (\mu-\gamma)(v-1)}{\mu} \Leftrightarrow x = x^* = 1 - \frac{v(\mu-\gamma)}{\mu}$$

$$y = \frac{\mu-\gamma}{\gamma} x^* \Leftrightarrow y = \frac{\mu-\gamma}{\gamma} \left(1 - \frac{v(\mu-\gamma)}{\mu}\right) \Leftrightarrow y = y^* = \frac{(\mu-v)(\mu-v(\mu-\gamma))}{\mu\gamma}$$

Alors, nous déduisons que:

$$\begin{cases} \text{si } x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (F n'est pas définie)} \\ \text{si } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (F n'est pas définie)} \\ \text{ou} \\ x = 1 \text{ A}(1, 0) \text{ est un point d'équilibre} \end{cases} \\ \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow \text{B}(x^*, y^*) \text{ est un point d'équilibre} \end{cases} \quad (2.9)$$

### Théorème

On considère une fonction  $F(x, y)$  définie dans un domaine  $\Omega$ , et non définie au point  $N(\alpha_1, \alpha_2)$ .

Si  $\lim_{(x, y) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(x, y) = l$  existe, on dit que  $F(x, y)$  admet un prolongement par continuité en  $N$ .

Soit la fonction  $G(x, y)$  telle que:

$$G(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (\alpha_1, \alpha_2) \\ l & \text{si } (x, y) = (\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$$

Concernant notre exemple, nous avons

$$\Omega = R^2 - \{(x, y) \in R^2 : y \neq -x\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_1(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x(1-x) - v \frac{xy}{x+y} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} -\frac{vxy}{x+y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} -\frac{v}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}. \text{ Or, } (x, y) \rightarrow (0^+, 0^+), \end{aligned}$$

Et donc

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_1(x, y) = -\frac{v}{+\infty} = 0.$$

De même, nous prouvons aussi que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_2(x, y) = 0.$$

Par conséquent, le système possède les points d'équilibre:

$$O(x = 0, y = 0), A(x = 1, y = 0) \text{ et } B(x = x^*, y = y^*).$$

À partir des expressions de  $x^*$  et  $y^*$ , nous obtenons les conditions de paramètres pour en

lesquels le point  $B$  est à l'intérieur du premier quadrant:

$$\begin{cases} \mu > \gamma \\ v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$$

Les égalités  $\mu = \gamma$ ,  $v = \frac{\mu}{\mu - \gamma}$  définissent respectivement les frontières  $BA$  et  $BO$  qui correspondent à la disparition du point  $B$  du plan. Dans le premier cas,  $B$  passe dans la région des domaines 7 ou 8 (*Figure12*) par le fusionnement avec le point  $A$ , tandis que dans le deuxième cas, il fusionne avec le point  $O$  et disparaît. La dernière bifurcation présente une dégénérescence supplémentaire dans le cas où  $v = \mu = \gamma + 1$ .

#### 2.2.4 Le point d'équilibre compliqué ( $O(0.0)$ ):

La particularité mathématique importante du système (2.10), est que l'origine est un point d'équilibre compliqué non-analytique. Les structures au voisinage de l'origine dans le premier quadrant et les asymptotes des trajectoires qui tendent à cet équilibre lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$  dépendent des valeurs de paramètres et peuvent changer d'une manière essentielle lors d'une modification de ces paramètres.

##### Lemme 1

Pour différentes valeurs positives des paramètres  $\gamma, \mu$  et  $v$ , il existe quatre types de structures au voisinage du point  $O$ .

1-Un secteur dont l'origine lié par les droites séparatrices  $x = 0$  et  $y = 0$  pour les valeurs de paramètres:

$$\begin{cases} 0 < v < \gamma + 1 \\ 0 < \mu \leq \gamma + 1 \end{cases}$$

2- Un secteur dont l'origine est un point selle ayant le séparateur  $y = 0$ , et un autre

où l'origine est un noeud attractif contenant les trajectoires qui tendent à  $O$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  pour les valeurs de paramètres:

$$\begin{cases} 0 < \mu < \gamma + 1 \\ \gamma + 1 < v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$$

3-Un secteur dont l'origine est toujours un point selle mais ayant le séparateur  $x = 0$ , et un autre où l'origine  $O$  est un noeud répulsif contenant les trajectoires qui proviennent de  $O$ , c'est à dire, qui tendent à  $O$  lorsque le  $t \rightarrow -\infty$ . Les valeurs de paramètres correspondants sont:

$$\begin{cases} \mu < \gamma + 1 \\ 0 < v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$$

4-Un secteur elliptique composé des trajectoires qui tendent à  $O$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$  pour des valeurs de paramètres qui réalisent:

$$v \geq \frac{\mu}{\mu - \gamma}$$

Cette structure correspond à un éclatement des deux populations.

Les comportements asymptotiques de la trajectoire caractéristique (ayant un asymptote défini pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ) dans le cas non-dégénéré

$$(\mu - \gamma - 1)(\gamma + 1 - v) \left( v - \frac{\mu}{\mu - \gamma} \right) \neq 0$$

sont décrits par Lemme 2. Notons que ces asymptotes ne sont pas nécessairement droites, elles peuvent être curviligne.

**Lemme 2**

Si  $\mu \neq \gamma + 1$ ,  $\nu \neq \gamma + 1$ , alors chaque trajectoire caractéristique du point O a un asymptote qui appartient à un des trois types suivants. (les formes des asymptotes des deux premières types dépendent d'une constante positive arbitraire C).

**Type 1:**

$$y = Cx^{\frac{\gamma}{\nu-1}}(1 + \sigma(1))$$

Ce type existe si  $\nu > \gamma + 1$ , dans ce cas, les trajectoires tendent au point O lorsque  $t \rightarrow +\infty$  :

**Type 2:**

$$y = Cx^{\mu-\gamma}(1 + \sigma(1))$$

Ici  $\mu > \gamma + 1$ , ce domaine couvre toutes les trajectoires qui tendent au point O quand  $t \rightarrow -\infty$

Le système (2.25) a plusieurs trajectoires asymptotiques de troisième type.

**Type 3:**

$$y = kx(1 + \sigma(1)) \text{ avec } k = \frac{\mu - \gamma - 1}{\gamma + 1 - \nu} > 0$$



-Les séparateurs des trajectoires ont les formes suivantes dans le domaine  $v$ :

$$\gamma + 1 < v < \frac{\mu}{\mu - \gamma}$$

Le secteur elliptique est obtenu pour:

$$v > \frac{\mu}{\mu - \gamma}, \quad \gamma + 1 > \mu > \gamma.$$

$$\frac{\mu}{\mu - \gamma} < v < \gamma + 1, \quad \mu < \gamma + 1$$

**Remarque:**

Sur la ligne de l'espace de paramètre  $\alpha : v = \gamma + 1 = \mu$ , le point O est un équilibre dont l'asymptote est un secteur elliptique dans son voisinage positif. Il est identifié par l'expression suivante:

$$y = Cx(1 + \sigma(1))$$

**2.2.5 Les points d'équilibre A et B.**

Le jacobien  $J = (a_{ij})$ , ( $i, j = 1, 2$ ) du système (2.25) a les éléments suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = P_x = \left( (1-x) - \frac{v y}{x+y} + \left( -x + \frac{v x y}{(x+y)^2} \right) \right) \\ a_{12} = P_y = -\frac{v x^2}{(x+y)^2} \\ a_{21} = Q_x = \frac{\mu y^2}{(x+y)^2} \\ a_{22} = Q_y = -\gamma + \frac{\mu x}{(x+y)} - \frac{\mu x y}{(x+y)^2} \end{array} \right.$$

Calculant le déterminant et la trace du jacobien aux points d'équilibre A et B, nous

obtenons les résultats suivants:

### Au point A

$$\begin{cases} \det(J) = -\mu - \gamma \\ \operatorname{tr}(J) = -1 + \mu - \gamma \end{cases}$$

### Proposition

Le point A est un point selle si  $\mu > \gamma$  et un noeud stable si  $0 < \mu < \gamma$ . La plupart des trajectoires prennent la forme suivante:

$$y = k(x - 1)(1 + \sigma(1)), \text{ où } k = \frac{\gamma - 1 - \mu}{v}$$

### Au point B

$$\begin{cases} \det(J) = \frac{\mu v (x^*)^2 y^*}{(x^* + y^*)^2} \\ \operatorname{tr}(J) = -x^* + \frac{(v - \mu)(\mu - \gamma)\gamma}{\mu^2} \end{cases}$$

### Proposition 1

Si  $\det(J) > 0 \Rightarrow B$  se trouve dans le premier quadrant du plan  $(xoy)$ . ( $x^* > 0, y^* > 0$ ). B est un noeud topologique ou un foyer.

$\operatorname{tr}(J) < 0 \Rightarrow$  le point B est stable.

Et si:  $\operatorname{tr}(J) > 0 \Rightarrow$  le point B est instable.

L'intersection de la frontière paramétrique H avec celle de BO correspond en général, à la bifurcation d'Andronov-Hopf à laquelle le point d'équilibre change sa stabilité avec apparition ou disparition d'un cycle de limite.

## Proposition 2

Une bifurcation supercritique d'Andronov-Hopf de la Co-dimension 1 se produit dans le système sur la frontière H. Il découle de cette proposition que ce croisement H de gauche à droite implique une perte de la stabilité du point d'équilibre B.

### 2.2.6 Interprétation des portraits de phase

Afin de donner une interprétation biologique des divers comportements du système proies prédateurs de type ratio dépendants, en réponses aux changements des paramètres biologiques suivants:

$v$  : La capacité de consommation de proies.

$\mu$  : La capacité croissante prédatrice.

$\gamma$  : Le taux de mortalité prédateur.

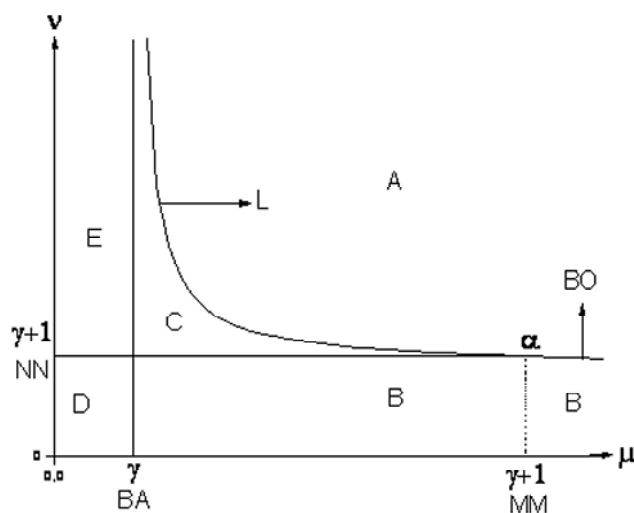
Nous employons essentiellement le diagramme de bifurcation *Figure(2.2.1)*.

Les deux populations atteignent la coexistence si le système appartient aux domaines 2 et 3. La différence dans la dynamique est indiquée seulement pour des petites valeurs de nombre de prédateurs parce que le système est reconstitué plus rapidement dans le domaine 2 que dans le domaine 3. Nous pouvons considérer que la frontière MM qui divise ces deux domaines est "doux" et nous pouvons mettre les domaines 2 et 3 en commun.

Selon les conditions initiales, les populations de prédateurs et de proies peuvent obtenir l'extinction dans les deux domaines 4 et 5. Cette caractéristique importante de la dynamique de système suggère à mettre ces deux domaines en commun dans une région unique spécifiée par la coexistence conditionnelle des populations. La différence étant dans le domaine 4, les populations coexistent dans un régime régulier tandis que dans le domaine 5 coexistent sur un cycle de limite. La frontière H entre les domaines 4 et 5 est aussi "doux" puisque le comportement du système ne change pas d'une manière essentielle.

Les deux populations deviennent éteintes dans les domaines 6 et 1. La frontière entre ces domaines est représentée par la partie supérieure de la courbe BO. Alors, nous pou-

vons mettre les domaines 1 et 6 en commun dans un domaine d'extinction sans aucune condition. Après avoir mis ces domaines en commun du point de vue de la coexistence ou l'extinction des populations, nous obtenons le diagramme le plus simple de la *Figure(2.2.2)*.



*Figure (2.2.2)* : Diagramme de bifurcation simplifié pour un  $\gamma$  arbitrairement fixé.

## 2.3 Modèle Parasites - Population hôte

### 2.3.1 Introduction:

Il est aujourd'hui difficile de croire que les maladies (épidémies) ou parasites sont seules responsables d'un nombre important d'extinction de grandes masse de population (espèces rares, développement de virus...). Comme conséquences, les biologistes ont saisis l'importance des parasites et l'urgence de comprendre le mécanisme de dynamique des populations (McCallum et Dobson 1995).

La théorie des effets des parasites sur une population hôte à connue un réel interet de la part des biologistes, qui s'est focalisé sur les différents scénarios induits par exemples, par:

- Une réduction du taux de fécondité chez la population hôte.
- Le taux de conversion de population de proie.

Ce qui nous intéresse de savoir comment les techniques de modélisations peuvent être appliquées afin de prédire l'évolution de la biodiversité et des espèces en particulier.

### **2.3.2 Position du problème:**

Les parasites sont des êtres microbiologiques qui, en intégrant une population donnée, entament une dépendance directe vis à vis de cette dernière que ce soit, sur le plan nutritif ou reproductif.

L'étude du modèle "parasite-population hôte" représente un exemple concret de dépendance d'un prédateur de sa proie. La relation qui se développe dans ce modèle suit un certain mode de transmission: elle peut être verticale ou horizontale. Quand l'évolution de la population du prédateur dépend de son taux de reproduction, alors la transmission est verticale. Lorsque l'évolution des prédateurs s'effectue au dépend de la densité de population hôte, alors, la transmission est dite verticale.

L'origine, comme point d'équilibre représente l'extinction de la population hôte. Vu que la réponse fonctionnelle n'est pas dérivable en ce point, elle ne peut être linéarisée autour de ce point. Ce qui justifie la recherche d'autres techniques de linéarisation pouvant donner des résultats satisfaisants concernant l'étude de ces modèles non linéaires.

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés aux travaux de Tzy-Wei Hwang et Yang Kuang portant sur l'étude du phénomène d'extinction causé par un parasite sur une population hôte.. Leurs travaux s'appuient sur les recherches initiées par Anderson en 1982, suivies par McCallum et Dobson en 1995.

S'appuyant sur des résultats expérimentaux, Ebert et al.(2000) ont développé un modèle empirique afin de mieux comprendre le phénomène d'extinction induit par le parasite sur la population hôte. Ce modèle repose sur un mode de transmission horizontal:

$$\begin{cases} x'(t) = a(x + \theta y) [1 - c(x + y)] - dx - bxy \\ y'(t) = -(d + \alpha)y + bxy \\ x(0) = x_0 \succ 0 ; y(0) = y_0 \succ 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Ou:

$x(t)$  : Représente la densité des populations hôte susceptible d'être infectées par unité de temps.

$y(t)$  : Représente la densité des populations hôte infectée par unité de temps.

$\theta$  : Représente la fécondité relative de la population non infectée.

$a$  : Représente le ratio maximum des naissances des personnes non infectées de la population hôte..

$b$  : Représente la constante du taux d'infection.

$c$  : Représente le pourcentage des naissances.

$d$  : Représente le taux mortalité des parasites dans la populations hôte..

$\alpha$  : Représente le taux de mortalité induit par le parasite.

En remplaçant  $b/(x + y)$  par  $b \cdot \frac{x}{x + y} \cdot y$  dans (2.7), ils ont obtenus le modèle suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = a(x + \theta y)[1 - c(x + y)] - dx - b \frac{xy}{x + y} \\ y'(t) = -(d + \alpha)y + b \frac{xy}{x + y} \\ x(0) = x_0 \succ 0, y(0) = y_0 \succ 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Cette modification a deux objectifs:

-Le modèle a transmission verticale est réaliste et donne de meilleurs résultats sur le plan biologique que la transmission horizontale.

- Grâce à cette transformation, le phénomène d'extinction est visible. Son étude dépend de la possibilité de linéariser le système. Or, on observe que le modèle n'est pas défini à l'origine. Donc, Toute autre méthode de linéarisation est impossible à appliquer. D'ou l'intérêt de notre travail.

La dynamique d'extinction à était auparavant étudié par Arditi-Ginzburg (1989),

Cosner et al. (1999) Berezovskaya, Karev and Arditi (2001), Xiao and Ruan(2001)). Les variables  $x$ ,  $y$  et  $t$  sont valables que pour les grandes populations. A mesure qu'on traite des petites populations ,la manipulation des données biologiques se complique Ebert et al. (2000), ont effectué un changement de variables tel que:

$$\bar{t} = at, \quad \bar{x} = cx, \quad \bar{y} = cy.$$

Donc notre système devient:

$$\begin{cases} x'(t) = (x + \theta y)[1 - (x + y)] - \delta x - s \frac{xy}{x + y} \equiv F(x, y) \\ y'(t) = -(\delta + r)y + s \frac{xy}{x + y} \equiv G(x, y) \\ x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

### 2.3.3 Points d'équilibre du modèle Parasites-population hôte:

L'annulation des équations dynamiques dans le système (2.7) nous permet de trouver les points d'équilibres de ce système.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x + \theta y)[1 - c(x + y)] - dx - b \frac{xy}{x + y} = 0 \\ -(d + \alpha)y + b \frac{xy}{x + y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x + \theta y)[1 - c(x + y)] - dx - b \frac{xy}{x + y} = 0 \\ -(\delta + r)y + s \frac{xy}{x + y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Alors, on peut déduire que:

$$\begin{cases} \text{si } x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (F n'est pas définie)} \\ \text{si } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (F n'est pas définie)} \\ \text{ou} \\ x = 1 - \delta \text{ est un point d'équilibre} \end{cases} \\ \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow B(x^*, y^*) \text{ est un point d'équilibre} \end{cases}$$

## Le point d'équilibre (O(0.0))

La particularité mathématique importante du système (2.7), est que l'origine est un point d'équilibre.

Concernant le niveau de population initiale, mathématiquement, nous observerons plus tard que toutes les solutions sont positives et font parties du premier quadrant

$$\Delta = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

**Proposition 1** Soit  $(x(t), y(t))$  les solutions de (2.7) débutant la simulation à partir de  $(x_0, y_0) \in R_+^2$ . Donc il y a pour tout  $t_0 > 0$ ,  $(x(t), y(t)) \in \Delta$ .

Le travail réalisé par les deux chercheurs est une analyse complète du modèle asymptotique (2.7). Grâce un changement de variable crucial, ils ont pu transformé le système (2.7) en un modèle proie prédateur de type Gause. De nombreux travaux ont été réalisé sur le modèle parmi lesquels Freedman (1980), Hsu et al. (2001,2001a). Suite à ces travauxces, les deux chercheurs ont obtenus des résultats intéressants sur le comportement asymptotique assez riche du modèle (2.7).

**Theorem 2 Théorème 2.1** Si:

$$s - r < \delta \text{ et } 1 \leq \delta \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) + y(t)) = 0.$$

Nous avons deux cas possibles:

\*  $L = \sup_{t \rightarrow \infty} x(t) > \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq 0$  alors, la fonction est monotone et tend vers  $\infty$  pour tout  $n \geq 1$  c'est à dire:

$$0 = x'(t_n) = F(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow L(1 - \delta - L) < 0.$$



Donc ce cas est impossible.

\*  $L = \sup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \Rightarrow$  pour tout  $t \geq 0$  nous avons:

$$\begin{aligned} x'(t) &\leq x(t)(1 - \delta - x(t)) + \theta y(t) \\ &\leq L(1 - \delta - L/2)/2 + L\theta(L/2 + \delta - 1)/2(\theta + 1) \\ &\leq -L(L/2 + \delta - 1)/2(\theta + 1) < 0 \end{aligned}$$

Alors, le point  $(0,0)$  est un point asymptotiquement stable dans  $\mathbb{R}_+^2$

**Theorem 3** Du 1<sup>er</sup> Lemme nous avons  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)} = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \forall (x(t), y(t))$

**Theorem 4** Donc pour tout  $\epsilon > 0$  existe  $x'(t)$  tel que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(1 - \delta - x) - (1 + \theta)xy + \theta y(1 - y) - sxy/(x + y) \\ &\geq x(1 - \delta - x) - (1 + \theta)\epsilon x^2 - s\epsilon x/(1 + \epsilon) \\ &= x(1 - \delta - x\epsilon/(1 + \epsilon) - (1 + \epsilon + \theta\epsilon)x) \end{aligned}$$

Donc:

Le point d'équilibre  $(1 - \delta, 0)$  est globalement stable

**Theorem 5** Soit la fonction de Lyapunov:

$$V(u, y) = \int_{u'}^u \frac{\Psi(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi + \int_{y^*}^y \frac{\eta - y^*}{\eta} d\eta \text{ Pour tout } (u, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

Notons que  $(u - u^*)(h(u) - h(u^*)) < 0$ , ce qui implique que  $\Psi(u)(h(u) - h(u^*)) \leq 0$ .

Donc la dérivée de  $V(u, v)$  est de la forme:

$$\begin{aligned}\dot{V}(u, v) &= (g(u) - \varphi(u)y)\Psi(u)/\varphi(u) + \Psi(u)y - h(u^*)\Psi(u) \\ &= \Psi(u)(h(u) - h(u^*)) \leq 0\end{aligned}$$

Donc

Pour l'intervalle  $\delta < s - r \leq 1$  Le point d'équilibre  $E^*$  est un attracteur globale dans  $\mathbb{R}_+^2$

### 2.3.4 Résumé des résultats:

A la suite de notre étude sur l'ensemble de l'intervalle du système (2.7), on peut résumer les résultats comme suit:

/	Conditions	Résultats
1	$\delta > 1, \delta = s - r, \delta = 1$	$(0,0)$ est globalement asymptotiquement stable
2	$\delta = s - r, \delta < 1$	$(1 - \delta, 0)$ est globalement asymptotiquement stable
3	$1 = s - r > \delta$	$(x^*, y^*)$ est globalement asymptotiquement stable
4	$s - r > 1, s\mu_0/(1 + \mu_0) = r + \delta$	$(0,0)$ est globalement stable
5	$s - r > 1, s\mu_0/(1 + \mu_0) > r + \delta$	$(x^*, y^*)$ est globalement stable

### 2.3.5 Interprétation des résultats:

Donnons une interprétation biologique des divers comportements du système ratio-dépendant de proies prédateurs, en réponse aux changements de paramètres suivants:  $s$ ,  $r$  et  $\delta$ . Le fondement de l'écologie théorique est que tout les systèmes proies-prédateurs peuvent ex-

ister seulement avec des valeurs de paramètres fournissant des oscillations stables ou des régimes stables comme les états d'équilibre. Les changements des valeurs de paramètres provoqués par les changements des conditions d'environnement ou d'autres raisons, peuvent mener le système dans des domaines paramétrables où une ou les deux populations vont à l'extinction de différentes manières. Notre analyse permet de décrire des domaines paramétrables de la coexistence stable et prévoir ce qui pourrait se produire si le système sort de ces domaines. Là, existent trois intervalles principaux de la capacité croissante prédatrice  $\delta > 1$ ,  $s - r > \delta$  et  $s\mu_0/(1 + \mu_0) = r + \delta$  qui correspondent aux différents comportements du système.

\* 1er cas :  $\delta = d/a > 1$ :

Le taux de mortalité est plus petit que celui de la natalité, il ne peut y avoir aucune évolution positive et donc, aucune croissance de la population hôte. Cependant, l'action de la population des prédateurs sur la population de proies c'est à dire l'infection, réduit le taux de natalité et augmente le taux de mortalité du groupe infecté. Ceci force toute la population hôte à diminuer sans interruption et la conduit à l'extinction.

Ce qui engendre l'extinction des proies suivie de l'extinction des prédateurs. C'est le scénario classique: Baisse de la nourriture, stabilisation de la population de prédateurs suivie de son extinction: C'est le schéma d'évolution type de Gause représenté par le modèle Didinium Paramecium.

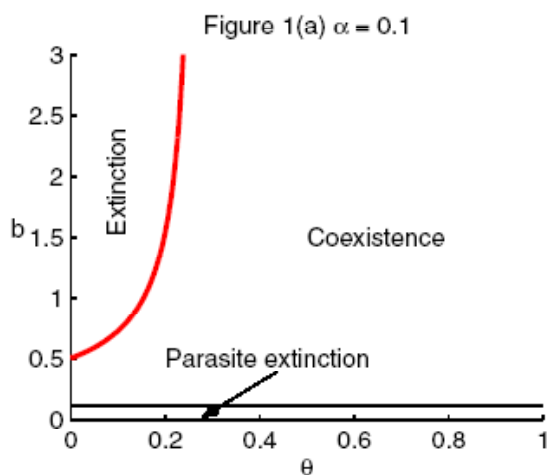
\* 2ème cas:  $\delta = s - r, \delta < 1$ :

L'action des parasites sur la population hôte influence le taux de natalité de la population de proies infectées représenté par le paramètre  $\theta$ . Notons qu'il en résulte que l'effet d'extinction augmente quand le terme  $(1 - \theta)$  représentant le taux de natalité de la population des parasites augmente. Cette évolution nous permet d'observer l'évolution de notre système qui passe par différents états. A savoir, Extinction des proies, coexistence des deux populations proies et prédateurs et enfin extinction des prédateurs à cause de

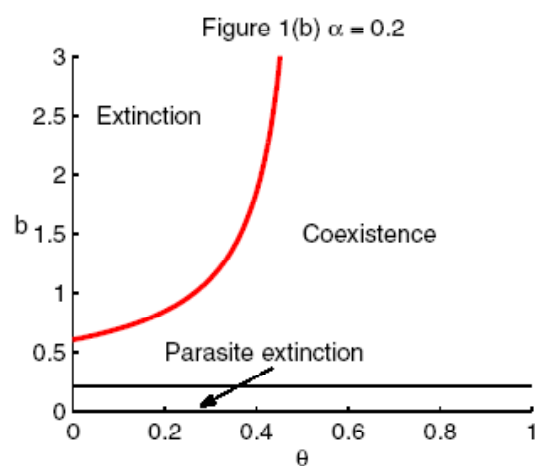
la baisse de son taux de natalité suivie de l'extinction de la population de proies causée par la diminution de la nourriture.

\* 3ème cas: quand  $\alpha$  augmente:

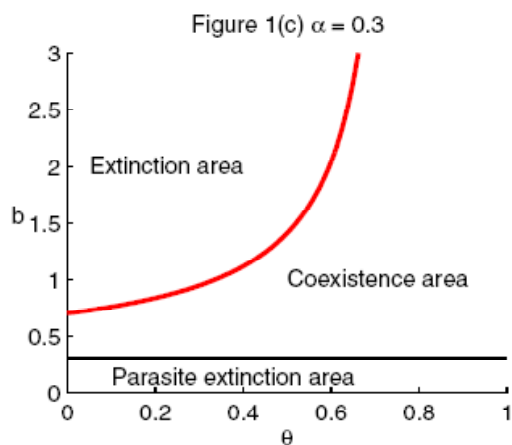
Ce paramètre qui représente le taux de mortalité excessif induit par le parasite à une grande influence sur l'évolution du système.



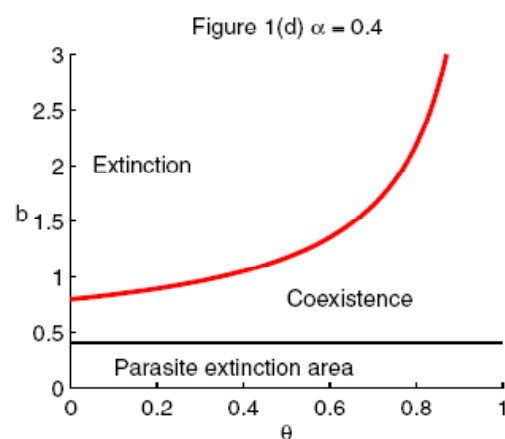
Figure(2.3.1)



Figure(2.3.2)



Figure(2.3.3)



Figure(2.3.4)

**Figure (2.3.1 , 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4):** Dans ces figures, les différentes régions représentant l'extinction, la dualité d'extinction et la coexistence sont déterminées par

$k, a$  et  $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ .

Comme le montre les figures (8), (9), (10), (11), il y a présence des trois cas possibles et le paramètre: coexistence, extinction et dualité d'extinction. L'influence de paramètre dans le contrôle de l'évolution du modèle et surtout et différents scénarios d'extinction démontre l'importance du choix des paramètres fondamentaux, a savoir: Le taux de natalité, le taux de mortalité, taux d'infection...La variation de ces conditions initiales nous permet de contrôler l'extinction des deux populations.

## **Chapitre III**

### **Application numérique**

# Chapitre 3

## Application numérique:

### 3.1 Modèle ratio dépendant d'Arditi-Ginzburg

#### 3.1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'aspect numérique. Dans un premier lieu, nous présentons une modélisation analytique (approchée) par la méthode de dérivation optimale. Puis, nous nous proposons d'étudier la stabilité à l'origine pour différentes valeurs de paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$ [3], [4].

A cet effet, il faut d'abord réaliser toutes les solutions possibles données par Ardit et Ginzburg au voisinage de l'équilibre  $O(x = 0, y = 0)$  de ce type d'équations dynamiques qui décrivent l'interaction proie prédateur. On a présenté également:

- Une étude comparative entre les comportements des solutions du système ratio-dépendant et ceux obtenus par le procédure de dérivation optimale.
- Des différentes configurations des lignes intégrales au voisinage de l'origine d'un champs de vecteur plan.

En effet, les méthodes de linéarisation jouent un rôle très important dans l'étude des équations différentielles ordinaires non linéaire, dont on peut dire que tout système linéaire n'est que le modèle simplifié de notre système non linéaire exacte que l'on veut

choisir comme repère. C'est pourquoi, il est souvent indispensable d'évaluer l'erreur quadratique afin de juger la qualité de l'approximation et vérifier si les incertitudes modifie la qualité du modèle.

Le calcul de l'erreur quadratique s'effectue en utilisant la relation suivante:

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \|x_i(t) - \tilde{y}_i(t)\|^2 \quad (3.1)$$

où

$x(t)$  représente la solution du système non linéaire.

$\tilde{y}_i(t)$  représente la solution du système linéaire.

Avant d'entamer les exemples et les commentaires, je tiens à rappeler une deuxième fois que, dans les modèles proies-prédateurs, la proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$  si les capacités croissantes prédatrices  $\mu$  sont inférieures ou égales aux capacités de consommation des proies  $v$ . ( $\mu \leq v$ ). Sauf si les valeurs de paramètres appartiennent au domaine 2:

$$\begin{cases} \mu > \gamma + 1 \\ v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Cas ou l'équilibre $O(x=0, y=0)$ est un col (point-selle):

Dans ce cas, les trajectoires seront liées par la droite séparatrice  $x = 0$ ,  $y = 0$  ou les deux en même temps.

Les valeurs de paramètre  $(\gamma, \mu, v) = (3.21, 4.15, 0.75)$  appartiennent au surface de bifurcation MM.

Le système se décline ainsi:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 0.75 \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -3.21y + 4.15 \frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (3.3)$$



La procédure de calcul de la dérivation optimale pour des conditions initiales  $(x_0, y_0) = (3e - 9, 0.99)$  conduit à la matrice:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.214 & 0 \\ 3.813 & -2.85 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

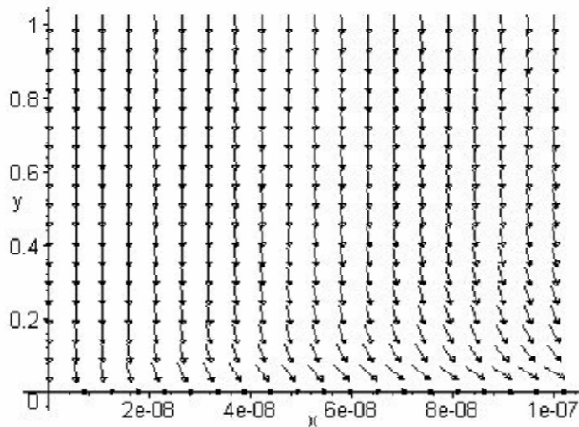
Dont les valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = 0.244$$

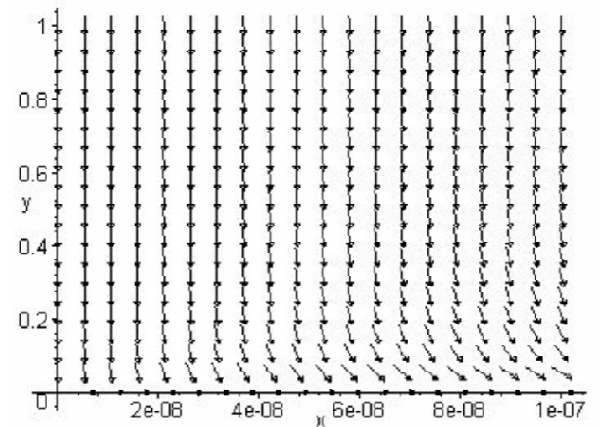
$$\lambda_2 = -2.83$$

La matrice optimale présente des valeurs propres de signe différents  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , ce qui implique que le système linéarisé par la dérivée optimale est instable et fait apparaître l'origine comme un point selle. Alors, il est aussi instable.

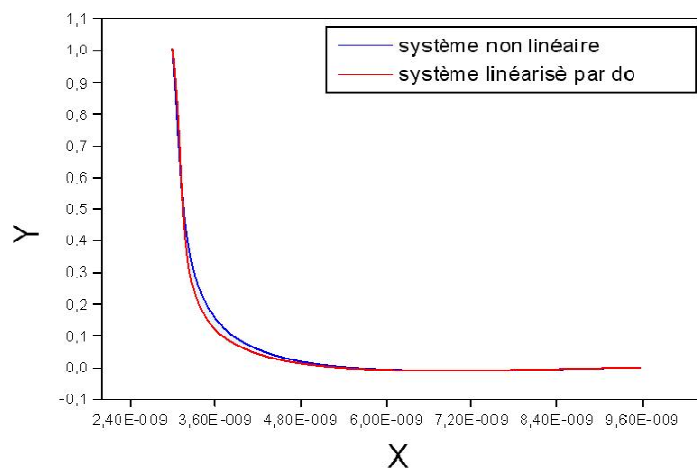
Les figures (3.1.a), (3.1.b), (3.1.c) montrent respectivement les champs de vecteurs du système ratio dépendant et celui de système linéaire par la dérivée optimale.



**Figure(3.1):** Champ de vecteur du système non linéaire du système (3.10).



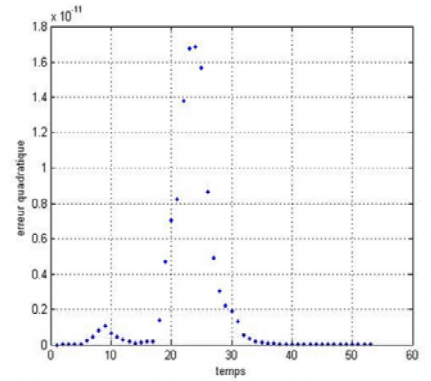
**Figure(3.2) :** Champ de vecteur linéarisé par la dérivé optimale (3.11).



**Figure(3.3):** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (3.21e - 9, 0.99)$ . Les valeurs des paramètres associés sont:  $(\gamma, \mu, \nu) = (3.21, 4.15, 0.75)$

<i>Temps</i>	<i>Erreur Quadratique</i>
1.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e-000
2.0000000000000000e+000	2.755011827653980e-015
3.0000000000000000e+000	9.710248147834367e-015
4.0000000000000000e+000	1.915634037051087e-014
5.0000000000000000e+000	2.971396996524665e-014
6.0000000000000000e+000	2.336702299351554e-013
7.0000000000000000e+000	4.555551037284031e-013
2.2000000000000000e+001	1.373952325705879e-011
2.3000000000000000e+001	1.668749445490428e-011
2.4000000000000000e+001	1.682087905996385e-011
2.5000000000000000e+001	1.566693779821597e-011
5.1000000000000000e+001	1.582885425362593e-016
5.2000000000000000e+001	8.837280654596549e-017
5.3000000000000000e+001	4.857154473824610e-017

Tableau récapitulatif des valeurs  
de l'erreure quadratiques



**Figure(3.4):** Erreur quadratique due  
au système linéaire au sens de  
la dérivée optimal.

### 3.1.3 Commentaire

Les valeurs des paramètres appartiennent aux surfaces de bifurcation MM. Alors, on doit s'attendre à ce que les deux populations de proies  $x$  et de prédateurs  $y$  coexistent pour toute conditions initiale, puisque la surface de bifurcation MM divise les domaines 2 et 3 spécifiés par la coexistence de proies  $x$  et de prédateurs  $y$ . Dans ces conditions on peut affirmer que:

-La quantité de nourriture est suffisante: Ceci à pour conséquence la coexistence des deux populations (Contradiction).

-La quantité de nourriture est insuffisante: Les deux populations atteignent la coextinction, les prédateurs consomment toute les proies et s'exteignent à leurs tour (Contradiction).

-Les deux populations ne résulte pas de la dynamique équilibrée des deux capacités. Pour ce faire, il faut que:

$$\begin{cases} v < \gamma + 1 \\ \gamma < \mu < \gamma + 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

-Une exception peut se produire dans le domaine B si les valeurs de paramètres appartiennent au surface de bifurcation MM. Ce résultat coïncide avec le théorème, énonçant que pour des valeurs de  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$  correspondant à l'une des surfaces de bifurcation MM ou NN, se produit un changement de structure topologique au voisinage de l'origine O.

-La population de proies  $x$  survie toujours. Ceci revient aux prédateurs  $y$  qui ne peuvent pas manger toute la proie  $x$  puisqu'on a déjà montré que cette dernière est la seule nourriture de prédateurs  $y$ . C'est pourquoi nos espèces régressent continuellement sans aller vers l'extinction.

Des interprétation peuvent se faire en raison:

- Des prédateurs eux-même, qui sont la nourriture d'autre espèces. Il s'agit dans cette situation d'un troisième niveau trophique appelé Super-prédateur.

- De la non disponibilité des proies  $x$ : C'est le cas de la difficulté de la chasse, l'immigration de proies...

### 3.1.4 Cas ou l'équilibre $O(x=0,y=0)$ est un noeud stable

Pour les valeurs des paramètres  $(\gamma, \mu, v) = (0.44, 1.21, 1.54)$  et avec des conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.03, 0.9)$ , nous avons les équations d'états suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1.21 - x) - 1.54 \frac{xy}{x + y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.44y + \frac{xy}{x + y} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$A_0 = DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -0.8644 & -0.0103 \\ 0.7226 & -0.384 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La matrice optimale donne après 5 itérations ( $\varepsilon = 1.31e - 5$ )

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.6231 & 0.0422 \\ 0.7613 & -0.5221 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Dont les valeurs propres correspondent à:

$$\lambda_1 = -0.6472$$

$$\lambda_2 = -0.5210$$

La matrice optimale prévoit un noeud stable à l'origine, puisque les valeurs propres sont réelles et négatives. Les solutions des systèmes (3.13) et (3.15) ses linéarisées au sens de la dérivation optimale sont représentées dans le plan de phase de la figure . Elle montre l'ordre de l'erreur quadratique due à l'approximation. Tandis que, les dernières représentent les champs de vecteurs.

### 3.1.5 Commentaire

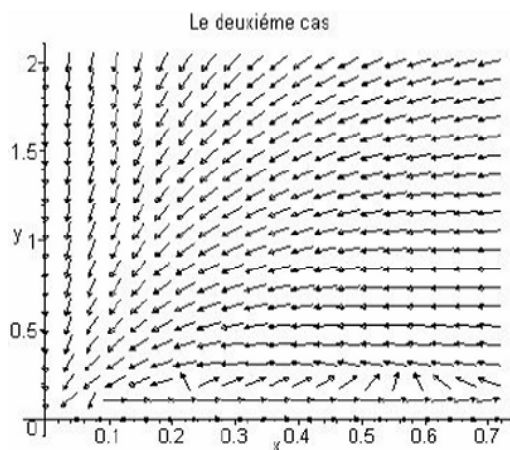
Les valeurs de paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $\nu$  correspondent au domaine 4. L'asymptotes d'extinction est de type (1).

$$y = Cx^{\frac{5}{6}}(1 + \sigma(1)) \quad C \in \mathfrak{R} \quad (3.9)$$

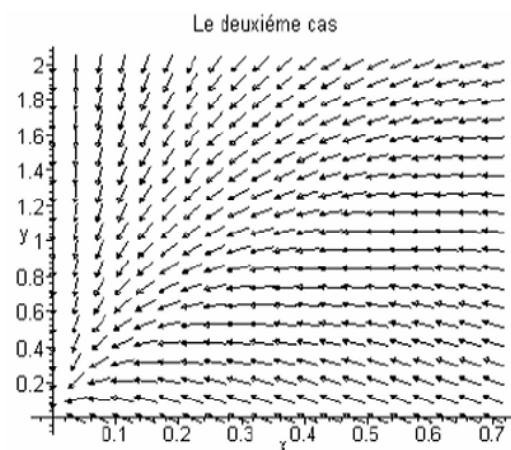
La proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$ . Les conditions initiales  $(x_0, y_0)$  cette fois ci permettent de prédire que les deux populations de proies  $x$  et de prédateurs  $y$  atteignent la coextinction. Elle est causée par la grande capacité de consommation de proies  $\nu$ . ( $\nu > \gamma + 1$ ). Les prédateurs consomment toute la proie et puis deviennent eux même éteints. Donc, la dynamique de solutions suggère à dire que:

-La quantité de la nourriture n'est pas suffisante.

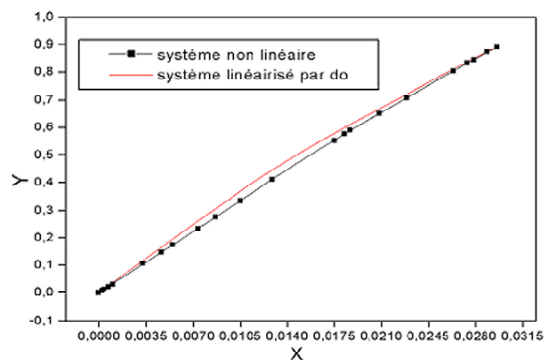
-Si les prédateurs sont les reproducteurs et les consommateurs de proies  $x$ , la population initiale de proies  $x_0$  ayant pour toujours comme origine les prédateurs  $y$ . Il consomment ce qui produisent avec un taux de reproduction inférieur au taux de consommation de proies.



**Figure(3.5):** Champ de vecteur du système non linéaire du système (3.10).



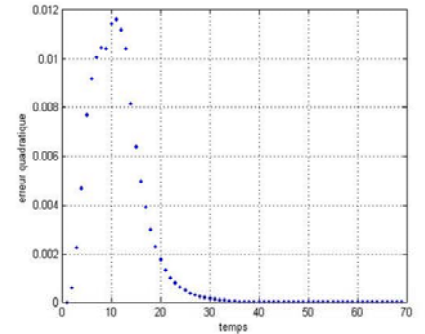
**Figure(3.6):** Champ de vecteur du système optimal (3.10).



**Figure(3.7):** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.034, 0.9)$ . Les valeurs des paramètres associés sont  $(\gamma, \mu, \nu) = (0.44, 1.21, 1.54)$ .

<i>Temps</i>	<i>Erreur Quadratique</i>
1.0000000000000000e+000	0.0000000000000000e-000
2.0000000000000000e+000	6.087598980349726e-004
3.0000000000000000e+000	2.247555804316819e-003
4.0000000000000000e+000	4.670629342690611e-003
3.5000000000000000e+001	4.420279093905623e-005
3.6000000000000000e+001	3.487329856055401e-005
3.7000000000000000e+001	2.753567259299453e-005
4.2000000000000000e+001	8.220612990032161e-006
4.3000000000000000e+001	6.418839781151280e-006
5.3000000000000000e+001	5.354325178996309e-007
6.6000000000000000e+001	4.489642924467321e-009
6.7000000000000000e+001	2.474709065698432e-009
6.8000000000000000e+001	1.237252531294287e-009
6.9000000000000000e+001	5.246442007758131e-010

Tableau récapitulatif des valeurs  
de l'erreur quadratiques



**Figure(3.8):** Erreur quadratique due  
au système linéaire au sens de la  
dérivée optimale.

### 3.1.6 Cas ou l'équilibre $O(x=0,y=0)$ est un noeud instable

On va prendre  $(\gamma, \mu, \nu) = (0.12, 1.52, 0.22)$  ce qui nous permet d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 0.22 \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.12y + 1.52 \frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (3.10)$$

On applique la méthode de la dérivée optimale. La linéarisation de F en  $(x_0, y_0) =$

$(1.6e - 7, 4e - 8)$  donne:

$$A_0 = DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1.2667 & -0.1070 \\ 0.5284 & -0.4234 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.9411 & -0.0217 \\ 0.423 & 0.0617 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

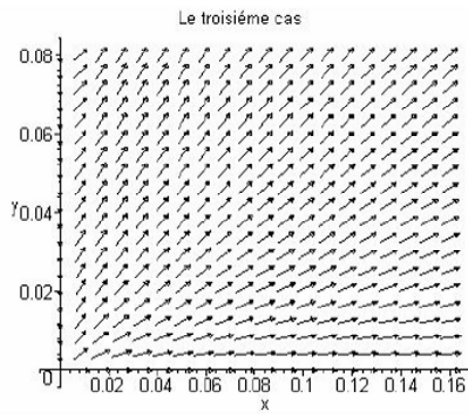
$$\lambda_1 = 0.921$$

$$\lambda_2 = 0.0732$$

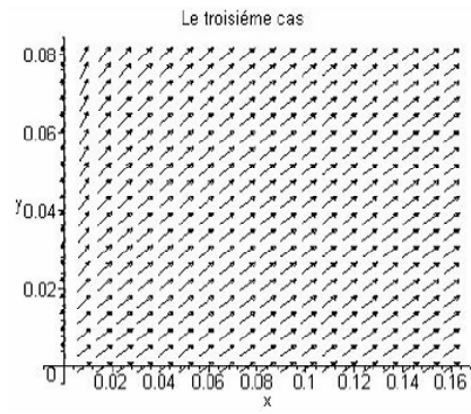
Ces valeurs prévoient que l'équilibre  $O$  est un noeud instable puisqu'elles sont réelles et positives.

Les figures (3.11) et (3.12) présentent respectivement les portraits de phase des systèmes (3.17) et (3.18) ainsi que l'évolution temporelle de l'erreur quadratique. Les champs de vecteurs non linéaires et linéarisés par la dérivée optimale sont tracés sur les figures (3.9) et (3.10).

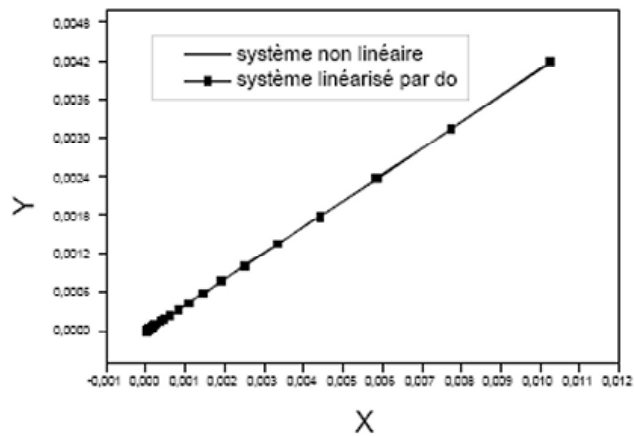




**Figure(3.9):** Champ de vecteur du système non linéaire du système (3.10).



**Figure(3.10):** Champ de vecteur du système non linéaire du système (3.10).



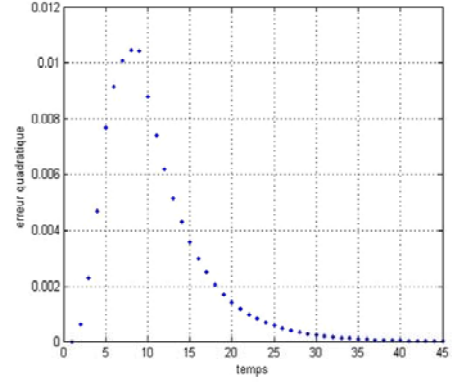
**Figure(3.11)**Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.034, 0.9)$ .

Les valeurs des paramètres associés sont:

$$(\gamma, \mu, \nu) = (0.44, 1.21, 1.54).$$

<i>Temps</i>	<i>Erreur Quadratique</i>
1.0000000000000000e+000	0
2.0000000000000000e+000	6.087598980349726e-004
3.0000000000000000e+000	2.247555804316819e-003
4.0000000000000000e+000	4.670629342690611e-003
1.5000000000000000e+001	3.566312460805108e-003
1.6000000000000000e+001	2.964484188294844e-003
1.8000000000000000e+001	2.046834571050356e-003
2.5000000000000000e+001	5.661432045590733e-004
2.4000000000000000e+001	6.789876142992752e-004
2.8000000000000000e+001	5.661432045590733e-004
2.9000000000000000e+001	2.754799399838938e-004
4.3000000000000000e+001	1.967976428717478e-005
4.4000000000000000e+001	1.506430689266873e-005
4.5000000000000000e+001	1.149097977946528e-005

Tableau récapitulatif des valeurs  
de l'erreur quadratiques



**Figure(3.12):** Erreur quadratique due  
au système linéaire au sens de  
la dérivée optimale.

### 3.1.7 Commentaires:

Cette situation est réalisée pour une capacité croissante prédatrice élevée ( $\mu > \gamma + 1$ ) et une autre de consommation de proies  $v < \frac{\mu}{\mu - \gamma}$  (domaine 2, lemme 2.2). La trajectoire est de type (2):

$$y = Cx^{1.4}(1 + \sigma(1)) \quad C \in \mathfrak{R}$$

On remarque que la capacité croissante prédatrice  $\mu$  est nettement supérieure à celle de consommation de proies  $v$ , avec la condition ( $\mu \geq v$ ). Ces conditions provoquent

une évolution plus rapide de la population prédatrice très rapide devant celle des proies. Alors, on a affaire automatiquement à une insuffisance du nombre de proies disponible, même si la consommation n'est pas importante ( $v < \gamma + 1$ ). Malgré celle-ci, on obtient la coexistence des deux populations.

Cependant, toujours pas de problème concernant la similitude des champs de vecteurs, comparaison des solutions, type et nature de l'équilibre (noeud instable) et l'évolution temporelle de l'erreur quadratique.

## 3.2 Parasites / Population hôte:

### 3.2.1 Introduction

Nous nous intéressons à l'étude de la stabilité autour du point d'équilibre qu'est origine qui présente un comportement riche et complexe, surtout la dynamique d'extinction du modèle. Vu que la fonction n'est pas définie en ce point, le système ne peut être linéarisé par les méthodes de linéarisation classique.

De ce fait, on propose d'utiliser une alternative qu'est la méthode de la dérivée optimale dans le but de surmonter ce problème.

Le modèle ratio dépendant proposé par **W. Hwang et Y. Kuang** est un modèle qui décrit l'évolution d'un parasite dans une population hôte. Nous l'appliquons dans notre travail au modèle Didinium-Paramecium[5], [6].

En se référant aux données biologiques, les deux chercheurs ont développé un modèle défini par les équations suivantes:

$$\begin{cases} x'(t) = (x + \theta y)[1 - (x + y)] - \delta x - s \frac{xy}{x + y} \\ y'(t) = -(\delta + r)y + s \frac{xy}{x + y} \\ x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

Cette partie est consacrée à l'aspect numérique. Nous exposons une modélisation ap-

prochée par la méthode de dérivation optimale. Puis, on se propose d'étudier la stabilité à l'origine pour différentes valeurs de paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $\nu$ .

En premier, on étudie toutes les solutions possibles données par **W. Hwang et Y. Kuang** au voisinage de l'équilibre  $O(x = 0, y = 0)$  de ce type d'équations dynamiques qui décrivent l'interaction parasites population hôte. On a présenté également:

-Une étude comparative entre les comportements des solutions du modèle ratio-dépendant et ceux obtenus par la dérivée optimale.

Il est important d'estimer l'erreur quadratique afin d'évaluer la qualité de l'approximation.

### 3.2.2 1er scénario:

C'est un scénario trivial puisque le pourcentage de décès est plus petit que le taux de naissance. Ceci est vérifié grâce à un choix judicieux des paramètres suivants:

$$a = 0.4 ; c = 1; d = 83; b = 20; b = 2; \theta = 0.2. \quad (3.13)$$

Avec

$$\delta = \frac{d}{a} > 1.$$

En vérifiant les conditions

$$\delta > 1.$$

Le point  $(0,0)$  est globalement asymptotiquement stable. Nous appliquons la méthode de dérivation optimale en prenant les conditions initiales:

$$(x_0, y_0) = (2.10^{-5}, 6.10^{-4})$$

La matrice optimale nous donne après 4 itérations ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 11.2615 & 1.9516 \\ 1.2634 & 20.353 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Les valeurs propres sont données par:

$$\lambda_1 = -10.9979$$

$$\lambda_2 = -20.6166$$

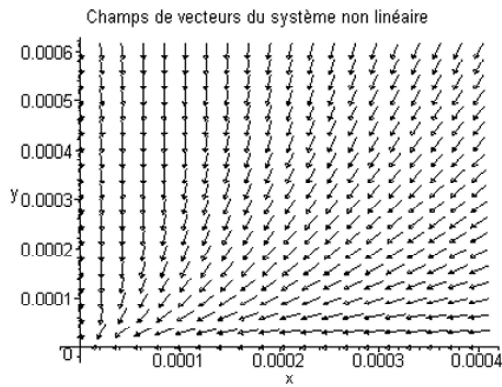
Le système linéaire optimale possède deux valeurs propres de signe négatif. Donc le système est asymptotiquement stable. Ceci nous montre que l'origine est un noeud stable.

Afin d'illustrer les résultats graphiquement, nous avons tracé le plan de phase des solutions  $(x(t), y(t))$  de notre système. Comparé aux solutions de notre système optimale pour les conditions initiales:

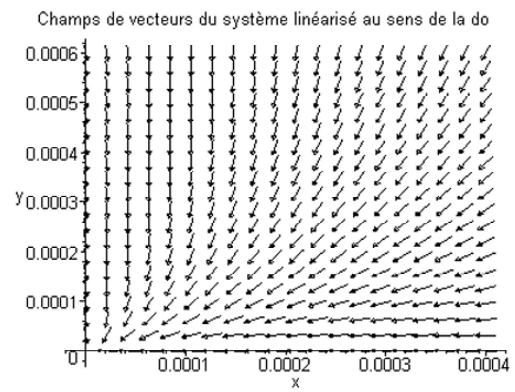
$$(x_0, y_0) = (2.10^{-5}, 6.10^{-4}).$$

La comparaison entre les deux systèmes nous permet de tracer les figures (13), (14), (15)

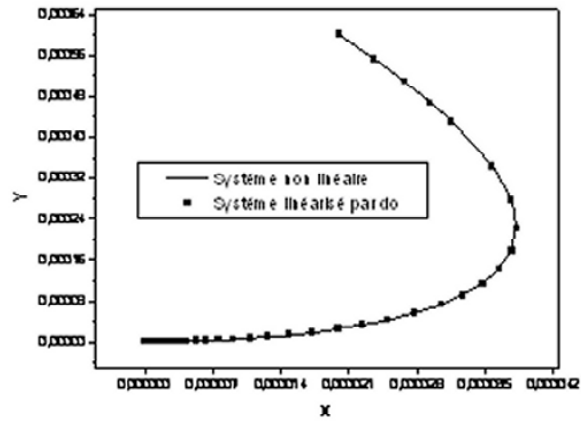
suivantes:



**Figure(3.13)** : Champs de vecteur du système non linéaire



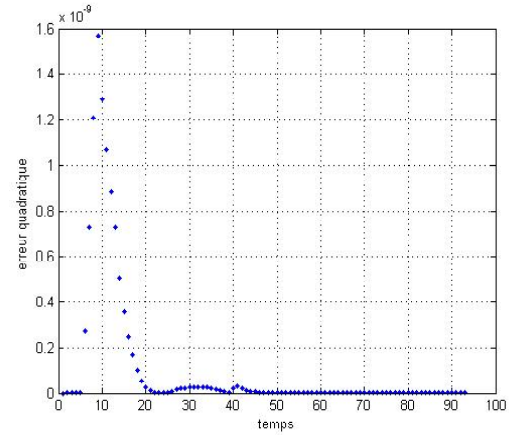
**Figure(3.14)**: Champs de vecteur du système optimal.



**Figure(3.15)**: Plan de phase des solutions  $(x(t), y(t))$  pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (2.10^{-5}, 6.10^{-4})$ .

<i>Temps</i>	<i>Erreur Quadratique</i>
1.0000000000000000e+000	0
2.0000000000000000e+000	5.087598980349727e-005
3.0000000000000000e+000	4.247555804216819e-004
4.0000000000000000e+000	4.670629342690611e-004
1.5000000000000000e+001	3.566312460805108e-004
1.6000000000000000e+001	3.964484177294844e-003
1.8000000000000000e+001	3.046834571050356e-003
2.5000000000000000e+001	6.661432045590733e-004
2.4000000000000000e+001	6.789876142992752e-004
2.8000000000000000e+001	5.661432675590733e-004
2.9000000000000000e+001	1.754799399838938e-005
5.3000000000000000e+001	2.967976428717478e-006
5.4000000000000000e+001	2.506430689266873e-006
5.5000000000000000e+001	2.149097977946528e-006

Tableau récapitulatif des valeurs  
de l'erreur quadratiques



**Figure(3.16):** Erreur quadratique due  
au système linéaire au sens de  
la dérivée optimale.

### 3.2.3 Commentaire

Ce cas décrit et confirme le premier scénario d'extinction déduit par Tzy-Wei Hwang et Yang Kuang (2001).

### 3.2.4 2eme scénario

Le 2ème scénario déduit par Tzy et all. est intéressant, il décrit la situation où: Le taux d'infection ( $\delta > r + 1$ ) est élevé et l'infection impose une réduction du taux de natalité

du groupe infecté (Petite valeur de  $\theta$ ). Il est nécessaire de noter que l'effet d'extinction augmente quand le terme  $(1 - \theta)$  représente la diminution du pourcentage de naissance induit par l'augmentation de la population de parasite.

Le but de cette seconde application de la dérivée optimale est de confirmer et de montrer l'existence du scénario d'extinction en utilisant une approche numérique.

Nous avons choisis les paramètres suivants:

$$a = 10 ; c = 5; d = 6; b = 14; \alpha = 0.4; \theta = 0.2. \quad (3.15)$$

Sans oublier la condition:

$$\delta > 1$$

L'origine est globalement asymptotiquement stable. Ceci est illustré par l'étude de deux cas:  $\theta = 0.02$  et  $\theta = 0.01$  afin d'observer le comportement du terme  $(1 - \theta)$ .

**1er Cas:**  $\theta = 0.2$  :

Nous appliquons la méthode de la dérivée optimale en prenant les conditions initiales:

$$(x_0, y_0) = (2.10^{-5}, 9.10^{-3}).$$

La méthode de dérivation optimale nous donne après 6 itérations ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ):

$$A = \begin{bmatrix} 21.9316 & 1.9421 \\ 11.9827 & -20.3543 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de notre modèle sont:

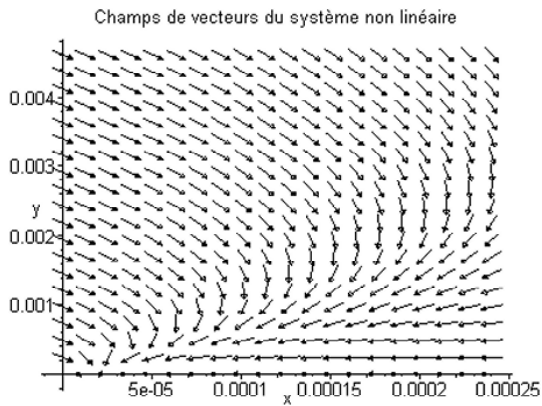
$$\lambda_1 = -26.031$$

$$\lambda_2 = -16.2549$$

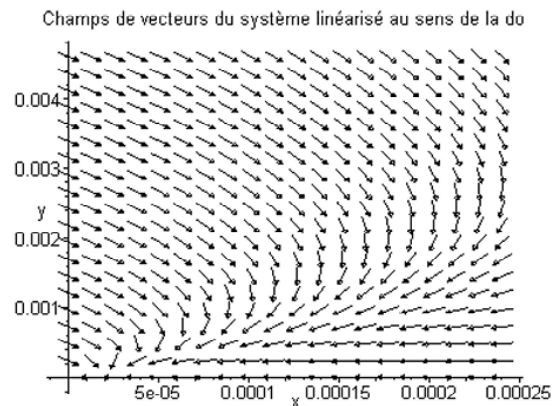
Notre système optimale possède deux valeurs propres négatives. Donc notre modèle est



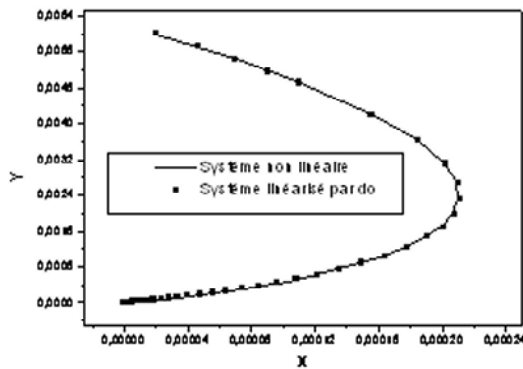
globalement asymptotiquement stable. Nous pouvons dire que l'origine est un noeud stable.



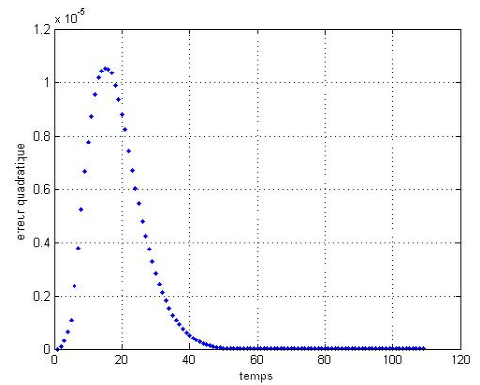
**Figure(3.17)** : Champs de vecteur du système non linéaire,



**Figure(3.18)**: Champs de vecteur du système optimal.



**Figure(3.19)**:Plan de phase pour les deux solutions  $(x(t), y(t)) = (2.10^{-5}, 6.10^{-4})$



**Figure(3.20)**: Erreur quadratique due au système linéaire au sens de la dérivée optimale.

**2eme Cas:**  $\theta = 0.01$  :

Afin de diminuer le terme  $(1 - \theta)$  qui représente la réduction du taux de naissance induit par les parasites en prenant en compte les paramètres suivants:

$$a = 10 ; c = 5; d = 6; b = 14; \alpha = 0.4; \theta = 0.01. \quad (3.16)$$

La procédure de calcul de la dérivée optimale pour les conditions initiales:

$$(x_0, y_0) = (2.10^{-5}, 9.10^{-3}).$$

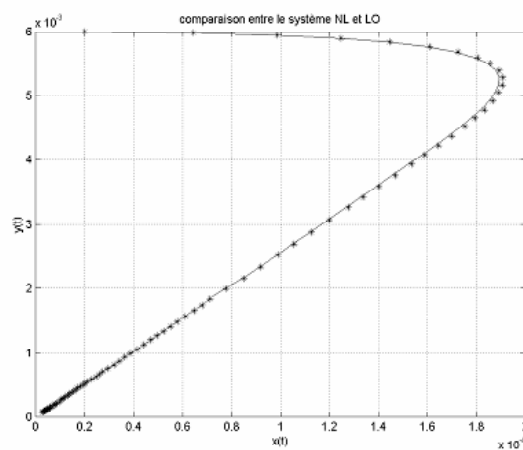
nous donne:

$$A = \begin{bmatrix} -10.9054 & +0.3974 \\ -19.2699 & +0.0013 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de notre modèle sont:

$$\lambda_1 = -10.1508$$

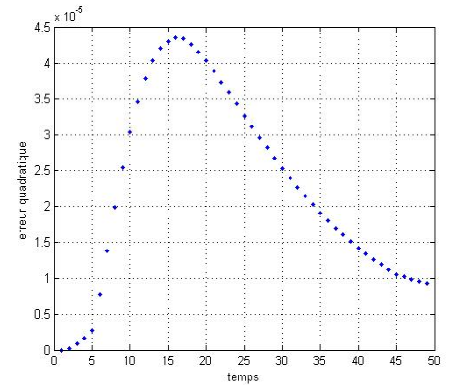
$$\lambda_2 = -0.7530$$



**Figure(3.21):**Plan de phase pour les deux solutions  $(x(t), y(t)) = (2.10^{-5}, 9.10^{-3})$

<i>Temps</i>	<i>Erreur Quadratique</i>
1.0000000000000000e+000	0
2.0000000000000000e+000	2.087598980349727e-007
3.0000000000000000e+000	4.247555804216819e-007
4.0000000000000000e+000	3.670629342690611e-007
1.5000000000000000e+001	7.566312460805108e-003
1.6000000000000000e+001	5.964484177294844e-004
1.8000000000000000e+001	8.046834571050356e-004
2.5000000000000000e+001	6.661432045590733e-005
2.4000000000000000e+001	6.789876142992752e-005
2.8000000000000000e+001	4.661432675590733e-005
2.9000000000000000e+001	2.754799399838938e-006
5.3000000000000000e+001	3.967976428717478e-007
5.4000000000000000e+001	3.506430689266873e-007
5.5000000000000000e+001	3.149097977946528e-007

Tableau récapitulatif des valeurs  
de l'erreur quadratiques



**Figure(3.22):** Erreur quadratique due  
au système linéaire au sens de  
la dérivée optimale.

### 3.2.5 Commentaire

De l'application de la méthode de la dérivée optimale, on peut noter que cette technique numérique nous permet de prédire la stabilité asymptotique de l'origine qui est de même nature que le cas précédent.

La figure qui suit montre que les deux solutions évoluent et convergent ensemble vers l'origine de manière monotone.

Le deuxième scénario est très intéressant, il décrit la situation où: Le taux d'infection est élevé ( $r \geq r + 1$ ) et l'infection implique une diminution du taux de naissance du

groupe infecter ( $\theta$  très petit).

Il est nécessaire de noter que le phénomène d'extinction s'accroît quand le terme représentant la réduction du taux de naissance induit par l'augmentation des parasites diminue. Ceci est illustré par les exemples  $\theta = 0.2$  et  $\theta = 0.01$ .

Les résultats obtenus par la dérivée optimale nous ont permis de déterminer la nature du point d'équilibre  $O(0,0)$  et de décrire le mécanisme d'extinction schématisé par les solutions qui convergent asymptotiquement vers l'origine comme point d'équilibre qui représente l'extinction des deux populations.

**Conclusion générale.**

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons abordé les équations différentielles ordinaires non linéaires par l'analyse numérique.

Nous avons étudié deux modèles de biologies mathématiques et plus particulièrement la dynamique des populations. Le premier est le modèle d'Arditi Ginzburg et le second modèle concerne le système parasites populations hôte.

Nous avons utilisé une procédure d'approximation d'une E.D.O. non linéaire appelé méthode de dérivation optimale.

Les principaux résultats de notre travail sont les suivants:

- *Modèle d'Arditi Ginzburg*: Pour chaque jeux de paramètres  $(\gamma, \mu, v)$  on a une évolution différente:

-Une efficacité faible signifie grossièrement un faible rendement à la digestion des proies, et il est logique de penser que si ce rendement est trop faible, les prédateurs vont finir par mourir de faim. (domaines C et A).

-Par ailleurs, l'activité de notre système dépend totalement du choix des conditions initiales. C'est à dire que l'on peut décrire le développement des populations en connaissant seulement la quantité de proie consommée, la capacité croissante prédatrice, le taux de mortalité des prédateurs  $\gamma$  et la condition initiale  $(x_0, y_0)$ .

\* Quand l'équilibre est un point selle (col), on a une quantité de nourriture insuffisante. Les deux populations coexistent avant de tendrent vers l'extinction.

\*\* Quand l'origine est un noeud stable, la proies choisit aux début de l'expérience est la seule nourriture du prédateurs. Les conditions initiales  $(x_0, y_0)$  permettent de prédire que les deux populations atteignent la coextinction suite à la grande consommation de proies  $v$  ( $v > \gamma + 1$ ).

- *Modèle Parasites populations hôte*: Vu que le modèle n'est pas dérivables en 0. La méthode de linéarisation classique ne nous permet pas d'étudier sa stabilité à l'origine.

Il y a deux scénarios types:

\*  $\delta \geq 1$  : On obtient un scénarios trivial à savoir, une augmentation du taux de

conversion et donc diminution de la populations de proies. On a convergence de la populations de proies vers l'extinction.

\*\*  $s\mu_0/(1+\mu_0) \leq r+\delta$ : Dans ce cas de figure, le taux de natalité influence l'évolution de notre système. C'est à dire qu'on passe de l'extinction de proies à la coexistence. D'un coté, nous avons la population de proies qui augmente et simultanément le taux de conversion qui diminue.

-La dérivée optimale constitue à l'heure actuelle un outil puissant et performant parce qu'elle nous permet d'avoir plus de précisions concernant le type des bifurcations et la nature du point d'équilibre. Ceci est justifié par l'étude comparative basée sur le calcul de l'erreur quadratique.

Enfin, le travail entrepris dans le cadre de cette thèse fait partie d'un axe de recherche qui mérite, à notre avis, d'être approfondie. En particulier:

- L'utilisation de cette méthode pour étudier la stabilité d'autre modèles biologiques.
- Nous souhaitons enfin, que ce travail puisse évoluer vers une étude plus détaillée des phénomènes de bifurcations et ceci grâce à l'utilisation du logiciel AUTO2000.

# Bibliographie

- [1] **F. Berezovskaya, G. Karev, R. Arditi**, (1989). Parametric analysis of the Ratio-Dependent Predator-Prey model, Institut national agronomique Paris-Grignon, Ecologie des populations et communautés, Accepted for publication in The Journal of Mathematical Biology November 2000.
- [2] **H.R.Akçakaya, R.Arditi, L.R Ginzburg**. (1995). Ratio-dependent predation: an abstraction that works, Ecology, 76, 995-1004.
- [3] **R.Arditi, L.R.Ginzburg**. (1989). Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence, J.Theor. Biol. 139, 311-326.
- [4] **C.Jost, O.Arino, R.Arditi**. (1999). About deterministic extinction in ratio-dependent predatorprey models. Bull. Math. Biol., 61, 19-32.
- [5] **Y.Kuang, A.Beretta**. (1998). Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey systems. J. Math. Biol.,35, 389-406.
- [6] **G.D.Ruxton, W.S.C.Gurney**. (1992). The interpretation of tests for ratio-dependence. Oikos, 65, 334-335.
- [7] **J.O.Irisson**. L'analyse de bifurcations et son application à l'évolution des systèmes biologiques à deux espèces.
- [8] **Y.A.Kuznetsov**, (1998). Elements of Applied Bifurcation Theory (Second Edition),Ed. Springer Volume 112 in Applied Mathematical Sciences.



- [9] **P.Glendinging**, (1994). Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of non linear differential equations, Ed. Cambridge Text In Applied Mathematics.
- [10] **U. Dieckmann, U. Marrow and R.Law**, (1995). Evolutionary cycling in predator prey interactions: Populations Dynamics and the Red Queen, Journal of Theoretical Biology vol. 176, pp. 91-102.
- [11] **S.M.A.Bekkouche, M.F.Bendahmane, T.Benouaz**. (10 – 12 *mai* 2003). Analyse Paramétrique de la Stabilité à l'Origine d'un Modèle Ratio-Dépendant par la Dérivée Optimale. Première Conférence Internationale sur les Modèles et Méthodes Mathématiques et Informatiques en Dynamique de Population.
- [12] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995). Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N<sub>0</sub>.95/10.
- [13] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995). Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [14] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995). Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure, Appl. Math. and Comp sci., N<sup>o</sup> 1, Vol. 5, pp 33-48.
- [15] **T. Benouaz**, (16 – 20 *June* 1995). Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by an Optimal Procedure, Proceeding of the 2nd International Conference on Differential Equations in Marrakech, Maroc.
- [16] **T. Benouaz**, (13 – 17 *August* 1995). Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation : The Scalar Case, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp. 19-22 , Plovdiv, Bulgaria.

- [17] **T. Benouaz**, (3–5 *December* 1996). Lyapunov Function Generated by Least Square approximation, Deuxième Conférence Maghrébine sur l'Automatique Vol.1 pp.73-75, Tlemcen.
- [18] **T. Benouaz**, (1996). Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire, Thèse de Doctorat d'état, Tlemcen.
- [19] **T. Benouaz and O. Arino**, (1996). Least Square Approximation of a Non-linear Ordinary Differential Equation, Computers Math. Applic., Vol. 31, N° 8, pp 69-84.
- [20] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998). Optimal Approximation of the Initial Value Problem, Computers Math. Applic. vol. 36, N°1, pp.21-32.
- [21] **T. Benouaz, F. Bendahmane, A. Chikhaoui**, (1999). Generalisation of the Optimal Linearization of Nonlinear Ordinary Differential Equation, Submitted for Publication in Mathematics and Computer in simulation journal.
- [22] **T. Benouaz**, (2000). Optimal Derivative of a Nonlinear Ordinary Differential Equation, Equadiff 99, International Conference on Differential Equations, Vol. 2, pp 1404-1407, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [23] **A. Chikhaoui**, (2000). Contribution à l'Etude de la Stabilité des Systèmes Non Linéaires, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.
- [24] **T. Benouaz et F. Belkhouche**, (7 – 8 *mai* 2001). Etude Numérique des Bifurcations Elementaires par la Méthode de Dérivation Optimale – Linéarisation à la Valeur de Bifurcation, Deuxièmes Journées de Mathématiques, Tlemcen.
- [25] **T. Benouaz et F. Belkhouche** (4 – 6 *juin* 2001). Etude de la Bifurcation Engendrée par une Transition de Phase, Application à un Condensateur Non Linéaire, Congrès Euro-Méditerranéen de la Matière Condensée, Tlemcen.

- [26] **F. Belkhouche**, (2001). Contribution à l'Etude de la Stabilité asymptotique Dérivée Optimale, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.
- [27] **G.F. Gause**, (1934). The Struggle for Existence. Williams and Wilkins, Baltimor.
- [28] **L.S. Luckinbill**, (1973). Coexistence in Laboratory Populations of Paramecium aurelia and its Predator Dininium nasutum. Ecology 54: 1320-1327.
- [29] **B.G. Veilleux**, (1979). An Analysis of Predatory Interaction Between Paramecium and Dininium. Journal of Animal Ecology. 48: 787-803.
- [30] **T. Sari**, (26 avril – 8 mai 2003). Ecole CIMPA. UNESCO TLEMEN ALGERIE. Contrôle non linéaire et applications.
- [31] **J.P. Demailly**. (1991). Analyse numérique et équations différentielles.
- [32] **R. Arditi and J. Michalski**, (1995). Nonlinear food web models and their response to increased basal productivity. In : Food Webs: Integration of Patterns and Dynamics (Polis and Winemiller eds) Chapman and Hall.
- [33] **J.D. Lebreton et C. Millier**, (1982). Modèles dynamiques déterministes en biologie.
- [34] **J.A. Leon and D.B. Tumpson**, (1975). Competition between two species for two complementary or substituable ressources.
- [35] **J.D. Murray, Springer**. (1990) Mathematical biology.
- [36] **J. Guckenheimer, P. Holmes**, (1983). Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector elds, Springer, New York.
- [37] **Nicolas Vandenberghe** (2002). Bifurcations d'orbites quasi-homoclines spatialement étendues et de systèmes quasi-réversibles et applications, thèse: Institut de Nice.

- [38] **E. A. Coddington and Levinson** (1955), Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill.
- [39] **J. Hale**, (1969) , Ordinary differential equations, Springer Verlag.
- [40] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), Equations différentielles ordinaires, Tome II, Stabilité et solutions périodiques, Masson et Cie.