

Table des matières

Introduction Générale	4
0.1 Note Historique	4
0.2 Contribution	7
1 Influence du choix de la condition initiale pour l'application de la D.O	12
1.1 Introduction.	12
1.2 Rappels	13
1.3 Problématique	18
1.3.1 Choix des conditions initiales	18
1.3.2 Comparaison	30
1.4 Conclusion	30
2 Application de la D.O. aux problèmes avec Bifurcation	33
2.1 Introduction	33
2.2 Problématique	34
2.3 Détermination des points d'équilibre	35
2.4 Linéarisation autour des points d'équilibre	36
2.4.1 Linéarisation autour de l'origine pour $\gamma \geq 1$	36
2.4.2 Linéarisation autour des nouveaux points d'équilibre pour $0 < \gamma < 1$	40
2.5 Application de la procédure de dérivation optimale	44
2.5.1 Application dans l'intervalle $\gamma \geq 1$	44

2.5.2	Application dans l'intervalle $0 < \gamma < 1$	55
2.6	Comparaison	62
3	Approximation locale, par morceaux et globale	65
3.1	Introduction	65
3.2	Rappels.	66
3.2.1	La méthode d'approximation optimale	66
3.2.2	La méthode de linéarisation par morceaux:	68
3.3	Application	70
3.4	Commentaires	82
3.5	Commentaires	88
4	Etude de la Stabilité d'une E.D.O non linéaire - cas d'un centre -	91
4.1	Introduction	91
4.1.1	Méthode de généralisation de linéarisation optimale	92
4.2	Application	94
4.3	Idée du problème	100
4.4	Etude de la trace de la matrice A^*	100
4.5	Conclusion	102
	Conclusion Générale	105
	Bibliographie	107

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

0.1 Note Historique

La description mathématique de très nombreux systèmes physiques conduit à des équations ou systèmes différentiels pour lesquels il convient de rechercher les solutions stationnaires ou périodiques et d'étudier leurs propriétés de stabilité.

Les équations différentielles ordinaires modélisent une grande famille de phénomènes qui se manifestent dans plusieurs domaines (biologie, électronique, mécanique,..etc). Elles sont devenues incontestablement l'outil mathématique principal pour décrire un processus évoluant continûment dans le temps. L'étude de ces équations est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreux travaux [1],[5],[8],[9],[12] et continue cependant de rester d'actualité. Il convient de souligner que la plupart de ces équations sont globalement de nature non- linéaire. Du fait que la description d'un système, à partir des lois régissant son fonctionnement, conduit souvent à un modèle non linéaire, la manipulation peut se révéler complexe. Les systèmes non linéaires ont la capacité de présenter un comportement complexe, qui se traduit souvent par des morphologies inattendues et fort diversifiées. Depuis la fin des années soixante, il apparut clairement que, dans de tels systèmes, l'écart à l'équilibre peut donner lieu à de nouvelles possibilités de comportement complexe et de brisement de symétrie, résultant essentiellement de phénomènes de bifurcation, conduisant à une grande variété de morphologies, qui suscite de multiples questions. De ce fait il n'existe pas, en l'état actuel des choses, une théorie d'ensemble des équations non- linéaires. Pour ce faire, des calculs approchés

basés sur la méthode des petites perturbations, des méthodes de linéarisation...etc, sont effectués concernant ces phénomènes, sur lesquels on dispose de très peu d'information. A partir de tels calculs, il a été déduit des conjectures que les chercheurs s'efforceront par la suite de démontrer. Cette démarche s'est révélée particulièrement féconde.

Toutefois, dans de nombreux cas, il peut s'avérer que plusieurs systèmes peuvent admettre un domaine de comportement linéaire, la linéarité étant toujours une approximation de la réalité.

Dès lors, les méthodes de linéarisation jouent un rôle important dans l'étude des équations différentielles ordinaires non linéaires, dont on peut dire que tout système linéaire n'est jamais que le modèle simplifié d'un système non- linéaire que l'on veut ignorer. Bien entendu, un certain nombre de questions propres aux problèmes linéaires peuvent se généraliser aux problèmes non linéaires si, d'une part, les perturbations dues aux non-linéarités sont petites et, d'autre part, à la structure des problèmes linéarisés correspondants qui introduit assez de régularité.

C'est pourquoi, on parvient à rester dans le domaine d'application du modèle linéaire qui est séduisant par sa simplicité dans les calculs et, pour lequel la disponibilité d'une théorie relativement complète permet de résoudre totalement les équations linéaires. Cette théorie est en fait une branche de l'algèbre linéaire. Elle est, par ailleurs, utile en première approximation dans la résolution de problèmes non- linéaires et permet, entre autres, d'étudier la stabilité de l'équilibre ainsi que le type topologique des points singuliers des champs de vecteurs dans le cas générique.[11]

Il est alors important de noter que l'étude de la stabilité d'un système non -linéaire est menée sur le système linéarisé, dont le problème de stabilité revêt une importance évidente; en effet, en partant de l'hypothèse selon laquelle la stabilité d'un système constitue en principe une garantie qu'une perturbation ne conduira pas à une catastrophe [14]. Il s'agit donc d'un renseignement important. Mais, généralement, il n'existe pas une définition absolue de la stabilité. Elle a évolué de façon continue pendant le cours d'histoire, et a toujours été ajustée aux exigences spécifiques à des problèmes particuliers. Donc, il

convient de souligner, en premier lieu, que le concept est relatif et dépend du système de référence employé .[6]

De ce fait, il nous a apparu indispensable de passer en revue les caractéristiques et les notions de stabilité, qui sont le plus couramment utilisées.

Afin d'éclaircir cette question générale qui reste complexe, il y a lieu de noter que les premières fondations rigoureuses du problème général de la stabilité datent de la fin du siècle dernier, et sont issues de la mécanique céleste dont les travaux existant de Routh (1884), Thomson (1879), Toukowsky (1882) ne retenaient des équations différentielles que leurs approximations linéaires au premier ordre tout en reconnaissant que le procédé n'était pas rigoureux, et sans en proposer aucune justification.

S'inspirant de ces propositions et du théorème de Lagrange sur la stabilité de l'équilibre dans le cas où il y aurait une fonction de forces, un apport majeur de Lyapunov et simultanément, de Poincaré, a été de donner des conditions de la validité de cette approximation, basée sur les propriétés des solutions du modèle linéarisé. Cette méthode permet de conclure localement sans avoir à donner de renseignements quantitatifs.

En fait, depuis l'apparition du célèbre mémoire de Lyapunov " Problème général de la stabilité du mouvement " en (1892), plusieurs définitions et études ont été menées, certaines lui sont équivalentes, d'autres en diffèrent dans certains cas particuliers. D'autre enfin, sans la contredire, ont pour intérêt de la préciser. On cite parmi eux I. Milkin (1952), Hahn (1963), Lasalle et Lefschetz (1961), etc. Cependant, la détermination d'une fonction de Lyapunov constitue une difficulté majeure.

Plusieurs méthodes de recherche de cette fonction ont été proposées, méthode du gradient variable Schultz et Gibson (1962), Zoubov (1957); à partir des formes quadratiques Aizerman et Gantmacher (1964),...etc, [29].

Malgré tout ces travaux, l'analyse de la stabilité des solutions d'équilibre par les méthodes de linéarisation, connaît actuellement un regain d'intérêt avec l'apparition de nouvelles méthodes de traitement des systèmes non-linéaires. En effet, la linéarisation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet en ces points. Mais, cette

technique ne permet pas de répondre par exemple, au cas où la fonction n'est pas assez régulière et celui où elle est nulle. L'existence d'écueils importants à la bonne utilisation de cette méthode, a suscité plusieurs recherches pour établir d'autres techniques de linéarisation permettant d'approcher mieux les systèmes non linéaires; l'une d'elles, appelée *Linéarisation optimale*, est basée sur le principe de moindres contraintes de Gauss, a été introduite à l'origine par Vujanovic (1973), [13] initialement pour l'étude des vibrations non linéaires. Récemment, elle a été utilisée par Jordan et al., [19][21][22] dans le cas du transfert de chaleur et de la linéarisation des équations d'états non linéaires.[20]

Dans le but d'améliorer la linéarisation par rapport aux techniques existantes, une nouvelle méthode de linéarisation, appelée *dérivée optimale*, a été introduite par Arino-Benouaz [32],[37],[39],[42], basée sur le principe des moindres carrés qui permet d'associer une application linéaire à une équation non linéaire, celle-ci étant conçue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable au cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivable.

0.2 Contribution

Parfois nous sentons le désir ardent pour aller apprendre les mathématiques derrière des images simulées par les moyens informatiques, et voir comment les idées mathématiques peuvent être appliquées aux problèmes de la science (physique, biologie...etc). Ainsi, la science aussi bien que les mathématiques auront besoin d'être expliquées. Mais, ce devrait être important, et il peut être instructif de voir les rapports qui existent entre les mathématiques et les différents champs de la science. En particulier, les liens avec l'analyse numérique qui sont continus, et basées sur l'analyse des équations différentielles ordinaires non linéaires par des techniques d'approximation et de linéarisation capable de remplacer d'une façon satisfaisante les équations non linéaires initiales. Le but étant de construire des algorithmes numériques utilisés de plus en plus systématiquement, en se servant de l'ordinateur comme outil d'investigation. Ceci constitue l'idée générale du

point de départ de cette thèse, qui nous a suggéré de tester et d'appliquer la nouvelle méthode de *dérivation optimale* introduite par (Benouaz-Arino), pour l'analyse de la stabilité de modèles physiques régis par des équations différentielles ordinaires non- linéaires. Il y a lieu de noter que le présent travail ne prétend pas être exhaustif sur le thème de la stabilité, notre objectif est d'utiliser la méthode de dérivation optimale pour l'étude de la stabilité de certaines classes de modèles physiques en vue de tester et montrer la possibilité offerte par cette technique, pour la description du comportement réel de ces modèles, qui fournissent des comportements complexes d'une grande séduction.

En s'inspirant des perspectives proposées par les travaux de Benouaz [39], on s'est intéressé à:

L'étude d'une équation dépendant d'un paramètre, dans le cas où l'équation change de stabilité, c'est-à-dire, l'application de la méthode de dérivation optimale aux modèles physiques qui engendrent le phénomène de bifurcation.

L'approfondissement de la relation entre la stabilité asymptotique et la dérivée optimale. L'utilisation d'une nouvelle approximation appelée "approximation optimale" basée sur la dérivée optimale, pour l'analyse des modèles physiques modélisés par des E.D.O non linéaires.

Nous illustrerons ses possibilités d'être un outil puissant et précis pour approcher les systèmes non linéaires par des systèmes linéaires adéquats et ceci à travers une étude comparative entre une autre technique basée sur la dérivation optimale appelée "approximation optimale" et quelques méthodes de linéarisation les plus couramment utilisées (linéarisation classique, linéarisation par morceaux) .

Le premier chapitre, est consacré à l'application de la méthode de dérivation optimale à un modèle physique présentant le phénomène de bifurcation. L'objectif étant l'influence du choix des conditions initiales sur les résultats de cette technique, et la relation avec la dérivée au sens de Fréchet pour l'étude des propriétés qualitatives des modèles non-linéaires qui présentent un comportement complexe, en particulier l'échange de stabilité entre solutions ainsi que la bifurcation de la solution pour certaines valeurs critiques

appelées points de bifurcation.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons une illustration et confrontation des résultats obtenus dans le premier chapitre. On compare les résultats obtenus à partir d'une analyse numérique par la procédure de dérivation optimale à ceux obtenus à partir d'une analyse théorique par linéarisation classique, pour un autre modèle physique présentant le phénomène propre à la bifurcation. Le but est de montrer les avantages de la technique proposée, pour la détection numérique de ce phénomène, en se basant sur ses propriétés importantes en particulier celles liées à l'ordre (choix de la condition initiale) et la relation avec la linéarisation classique.

Le troisième chapitre a pour but la comparaison entre trois techniques de linéarisation; à savoir:

- L'approximation optimale (locale)
- La dérivation optimale (globale).
- linéarisation par morceaux (entre locale et globale).

Un calcul d'erreur relative est présenté pour les trois cas, suivi d'une comparaison.

La principale méthode dans l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle non linéaire est d'étudier les valeurs propres de sa linéarisée, obtenue par dérivation au sens de Fréchet en ce point. L'équation linéaire obtenue a le même comportement que l'équation non linéaire dans le cas *hyperbolique* (si aucune valeur propre ne rencontre l'axe imaginaire). Quand la situation n'est pas hyperbolique, c'est à dire, lorsque le système linéaire présente un *centre* [28], la détermination de la stabilité devient plus délicate, et le comportement réel du système est déterminé par le terme non linéaire de haut degré négligé. Dans cette optique, le quatrième chapitre est consacré à l'application de la méthode de linéarisation optimale généralisée à une classe particulière d'exemples d'équations différentielles non linéaires qui s'écrit sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0, \quad (0.1)$$

dont la linéarisée classique présente un centre. Ces exemples sont destinés à montrer les possibilités que peut offrir cette méthode pour l'étude de la stabilité.

PREMIER CHAPITRE

**INFLUENCE DU CHOIX DE
LA CONDITION INITIALE
POUR L'APPLICATION DE LA D.O**

Chapitre 1

Influence du choix de la condition initiale pour l'application de la D.O

1.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré aux résultats relatifs aux propriétés de la méthode de dérivation optimale introduite par Benouaz et Arino [32] ,[37] ,[39], [42].

Dans son travail, Lazzouni [41], a présenté une étude comparative des méthodes de linéarisation, y compris celle de la dérivation optimale. L'auteur a abouti à des conclusions limitant les performances de cette procédure.

Après des rappels sur la méthode, nous allons, dans un premier temps, donner un autre point de vue pour le même exemple en tenant compte d'une propriété importante relative à l'ordre de la méthode.

En effet, l'ordre de la méthode de dérivation optimale dépend de la condition initiale et, par conséquent, il est plus judicieux de se placer le plus près du point d'équilibre. Puis, nous ferons une autre étude en tenant compte de cette propriété; ceci nous permettra de comparer les différents résultats.

1.2 Rappels

Afin de mieux situer la problématique, nous allons rappeler la méthode de la dérivée optimale qui est en fait une approximation globale,[32],[37],[39], [42], qui se distingue de celle linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire. L'approche suivie est de type optimisation.

Son utilisation est liée aux cas d'équations comportant des fonctions non régulières et, en général, non dérivables. Elle permet d'associer une matrice optimale \tilde{A} définissant une application linéaire (1.1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

à une équation différentielle ordinaire non linéaire décrite par l'équation suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

dans laquelle F vérifie les hypothèses suivantes

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re}z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe. Cette hypothèse permet le choix de la matrice initiale pour démarrer la procédure de calcul de la méthode; à cette effet les valeurs propres de la matrice initiale choisie doivent être à partie réelle strictement négative.

Dans la pratique, toute matrice initiale stable permet de retrouver le résultat recherché par l'application de cette procédure.

H3) F est Continue, Lipschitzienne. Cette hypothèse assure la régularité presque partout (presque partout différentiable).

La méthode consiste à déterminer une application linéaire de la forme (1.1) qui approche l'équation non linéaire (1.2) dans les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrées de l'écart $\varepsilon(t)$ entre l'équation non linéaire

$F(x(t))$ et l'équation linéaire $Ax(t)$, soit

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - \tilde{A}x(t). \quad (1.3)$$

Pour ce faire, on considère la fonctionnelle suivante

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (1.4)$$

La minimisation de celle-ci le long d'une solution donnée permet de construire une procédure itérative permettant de déterminer, une application linéaire définie comme étant la dérivée optimale de l'équation différentielle ordinaire non linéaire (1.2) qui démarre avec la linéarisation par dérivation au sens de Fréchet $DF(x)$ calculée en x_0 si celle-ci existe en x_0 .

En introduisant la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \quad (1.5)$$

La matrice optimale \tilde{A} s'écrit alors

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.6)$$

où \tilde{A} est définie et unique à condition que $\Gamma(x)$ soit inversible.

Algorithme de la procédure

Considérons le système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

1ère étape:

On calcule $A_0 = DF(x_0)$, $DF(x_0)$ étant la matrice Jacobienne de F en x_0 qui, en

principe, est un point arbitraire pris au voisinage de 0.

2ème étape:

Le calcul de A_1 , à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

s'effectue en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt \quad (1.9)$$

où A_1 est déterminée d'une manière unique, par l'équation (1.6).

3ème étape:

Pour calculer A_j , à partir de A_{j-1} , le système suivant doit être résolu au préalable

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{j-1}] y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

où y_j représente la solution de l'équation (1.10).

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t)) - Ay_j(t)\|^2 dt \quad (1.11)$$

conduit à A_j qui s'écrit

$$A_j = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt \right] [\Gamma(y_j)]^{-1}. \quad (1.12)$$

En supposant que $\Gamma(x)$ est inversible, si la suite A_j converge, la limite \tilde{A} est appelée alors la dérivée optimale de F en x_0 .

Procédure de calcul

La mise en oeuvre de la méthode est disponible en langage Fortran¹ et en utilisant le logiciel de calcul Matlab.

L'essentiel des étapes de calcul peut se résumer comme suit

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Entrées: Introduction des éléments $[x_0, A_0]$

Etape 1: Calcul de A_1 à partir de A_0

$$A_1 = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_0 t} x_0)] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_0 t} x_0] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right]^{-1} \quad (1.14)$$

Etape 2: Calcul de $A_{(j)}$ à partir de $A_{(j-1)}$

$$A_{(j)} = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_{(j-1)} t} x_0)] [e^{A_{(j-1)} t} x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_{(j-1)} t} x_0] [e^{A_{(j-1)} t} x_0]^T dt \right]^{-1} \quad (1.15)$$

Etape 3: calcul de

$$\|A_{(j)} - A_{(j-1)}\| \quad (1.16)$$

Etape 4: Si

$$\|A_{(j)} - A_{(j-1)}\| < \varepsilon \quad (1.17)$$

où ε représente le niveau d'approximation désiré, alors $\tilde{A} = A_{(j)}$. \tilde{A} est la dérivée optimale de F en x_0 . Sinon, $A_{(j-1)} = A_{(j)}$ et, dans ces conditions, on retourne à l'**Etape 2**.

Propriétés de la méthode

Deux des principales propriétés [32], [37], [39], [42] (ordre, relation avec la linéarisation classique) vont être rappelées explicitement dans ce chapitre pour permettre au lecteur

¹Les programmes ont été élaborés par Benouaz dans le cadre de sa thèse de doctorat d'Etat.

de mieux saisir le sens de la démarche liée à la comparaison des différents résultats.

Relation entre la dérivée optimale et celle obtenue par dérivation au sens de Fréchet en 0.

Dans le cas vectoriel, il est possible d'écrire l'expression qui donne la matrice optimale \tilde{A} en fonction de la dérivée de F en 0.

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] \left[\left[\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right] \right]^{-1} \quad (1.18)$$

si $DF(0)$ existe, il vient

$$F(x) = DF(0)x + o(|x|) \quad (1.19)$$

En substituant l'équation (1.19) dans l'expression (1.18), on obtient

$$\tilde{A} = DF(0) + \underbrace{\left[\int_0^{+\infty} [o(|x(t)|)] [x(t)]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1}}_{o(1)} \quad (1.20)$$

où $o(1)$ désigne une quantité qui tend vers 0 quand $x_0 \rightarrow 0$, en supposant que $|x(t)|$ reste de l'ordre de $|x_0|$.

Ordre de la méthode

L'ordre de la méthode est obtenu en comparant la solution $x(t)$ de l'équation non linéaire (1.2) et la solution $\tilde{y}(t)$ de la dérivée optimale, en partant de la même condition initiale.

Proposition 1.1 [37], sous les hypothèses $H1), H2), H3)$ sur la fonction F et pour tout temps $T > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que:

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq M (\|x_0\|^2), \quad (1.21)$$

pour $0 \leq t \leq T$, et tout x_0 dans un voisinage de 0, indépendant de T .

Cette proposition, [39], montre que la méthode de la dérivée optimale est au moins d'ordre 2 en fonction de la donnée initiale et dépend, en général de la non-linéarité du problème initial considéré.

1.3 Problématique

Le modèle étudié par Lazzouni [41] dans sa thèse est celui d'un circuit électronique assez particulier, l'amplificateur chaotique. L'auteur présente une étude comparative entre la dérivation optimale et la linéarisation par morceaux en concluant sur les limites de la première méthode .

Notre but est de montrer que, si on utilise la procédure de dérivation optimale en tenant compte de ses propriétés et, en particulier, de l'ordre, on peut améliorer les résultats de l'approximation proposée.

A cet effet, nous présentons une étude axée surtout sur la bonne utilisation de l'approche en question.

1.3.1 Choix des conditions initiales

Pour ce faire, nous considérons le circuit de l'amplificateur chaotique étudié par Lazzouni [41].

L'amplificateur chaotique est un circuit autonome régi par le système d'équations (1.22)

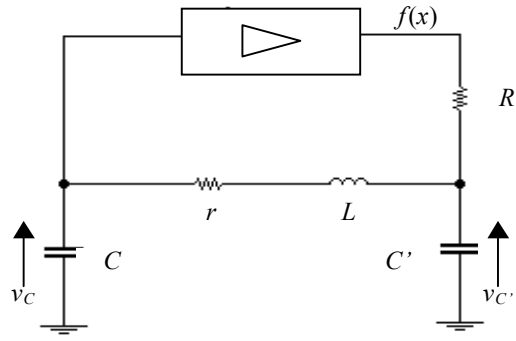


Figure (a)

Circuit de l'amplificateur chaotique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \delta y + z \\ \frac{dz}{dt} = \gamma [\alpha f(x) - z] - \sigma y \end{cases} \quad (1.22)$$

avec:

$$\begin{cases} x = v_C \\ y = \sqrt{\frac{L}{C}} i \\ z = v_{C'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma = \frac{\sqrt{LC}}{RC'} \\ \delta = r \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \sigma = \frac{C}{C'} \end{cases} \quad (1.23)$$

La non linéarité exprimée par $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} -0.528 \text{ si } x \leq -1.2 \\ x(1 - x^2) \text{ si } |x| < 1.2 \\ +0.528 \text{ si } x > 1.2 . \end{cases} \quad (1.24)$$

Les points d'équilibre peuvent être obtenus par la résolution du système $\dot{X} = 0$ qui conduit à

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \Rightarrow x = z \\ \gamma [\alpha f(x) - x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\alpha} x \end{cases} \quad (1.25)$$

Les points d'équilibre sont donc donnés par l'intersection de la caractéristique non linéaire $f(x)$ et la droite de charge de pente $\frac{1}{\alpha}$ (où α représente le gain.)

$$\begin{aligned} x(1-x^2) &= \frac{1}{\alpha}x \\ \Rightarrow x \left(1-x^2 - \frac{1}{\alpha}\right) &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ où } x^2 = 1 - \frac{1}{\alpha} &\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha \leq 1$, on obtient un seul point d'équilibre à l'origine $(0, 0, 0)$. En revanche, si α augmente, deux autres points apparaissent (P_+, P_-) , ayant les coordonnées

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right).$$

Pour l'application numérique, on utilise les valeurs suivantes

$$R = 3380 \Omega \quad C = 343 \text{ nF} \quad r = 347 \Omega \quad C' = 225 \text{ nF} \quad L = 145 \text{ mH} \\ (\gamma = 0.2932, \delta = 0.5337, \sigma = 1.5244).$$

L'application de la dérivée optimale autour de deux cas critiques, à savoir $\alpha = 1$ et $\alpha = 5$, va nous permettre de mieux apprécier la fiabilité et l'efficacité de la méthode pour la détection et le suivi du phénomène de bifurcation.

• **1^{er} Cas:**

$\alpha = 1$ est un point où on passe du point d'équilibre à l'origine qui devient instable lorsque α augmente vers deux nouveaux points d'équilibres (P_+, P_-) (*Bifurcation Pitch-fork*); on choisit $\alpha = 1.1$ et on applique la méthode décrite dans la section (1.2), avec

$$(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-2}, 3.10^{-2}, 4.10^{-2})$$

La matrice initiale pour le système non-linéaire (1.22) s'écrit

$$A_0 = DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.53369 & 1 \\ 0.2459 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.243679678 & -1.523974 & -0.2976634 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.020245 \\ \lambda_2 = -0.40555 + 1.5819i \\ \lambda_3 = -0.40555 - 1.5819i. \end{cases} \quad (1.28)$$

Dans la référence [41], l'utilisation de la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-1}, 3.10^{-1}, 4.10^{-1})$ a donné le résultat suivant

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.2949578 & -1.522138 & -0.3154912 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Les courbes des figures (1.1) et (1.2) représentent les variations de la composante $x(t)$ en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal obtenu comparée à celle du système non linéaire (1.22)

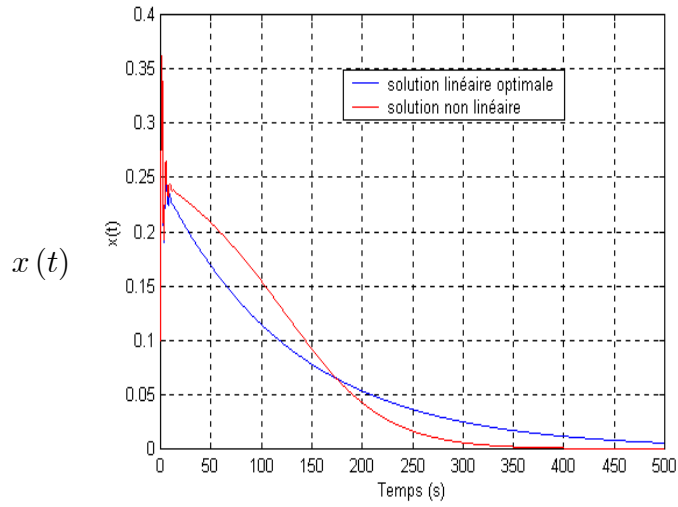


Figure 1.1

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.3, 0.4)$.

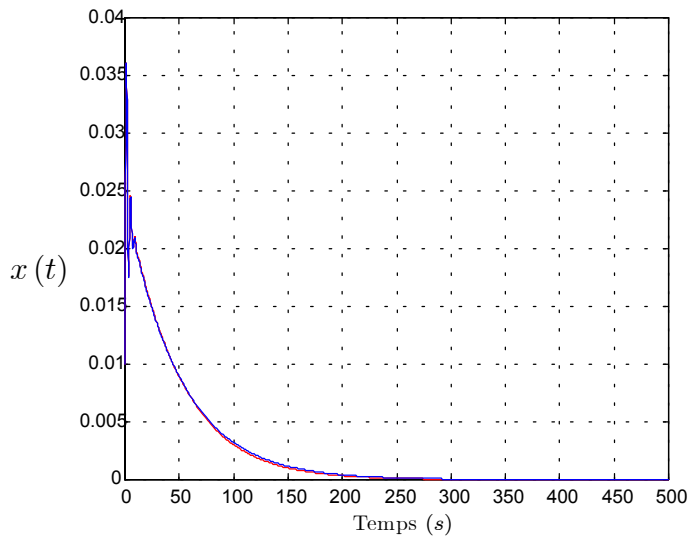


Figure 1.2

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.04)$

La figure (1.2) montre que les deux courbes sont confondues, et confirme la proposition (1), c'est à dire que la qualité de l'approximation dépend du choix de la conditions initiale. Ce qui n'est pas le cas de la figure(1.1) où on observe un écart entres les deux courbes. Afin de justifier et confronter les résultats obtenus dans le cas des conditions initiales très près de l'origine par rapport à celles prises près de l'origine, nous avons comparé l'erreur relative obtenue dans les deux cas. Le tableau (I.1), rapporte l'erreur relative entre la solution non linéaire et celle linéaire optimale, $Er1$ erreur relative pour des conditions près de l'origine, et $Er2$ erreur relative obtenue dans le cas des conditions initiales très près de l'origine.

Le figure (1.3) représente respectivement, la variation de l'erreur relative $Er1$ en fonction du temps dans le cas des conditions initiales près de l'origine, et celle de l'erreur relative $Er2$, dans le cas des conditions initiales très près de l'origine.

Tableau (I.1):

t	Er1	Er2
10	4.31E-002	1.57E-002
40	1.91E-001	1.44E-002
50	2.34E-001	1.76E-002
60	2.72E-001	1.81E-002
70	3.04E-001	1.10E-002
80	3.27E-001	1.03E-002
90	3.41E-001	1.17E-002
100	3.44E-001	1.32E-002
110	3.35E-001	1.49E-002
120	3.14E-001	1.67E-002
130	2.81E-001	1.87E-002
140	2.35E-001	2.08E-002
150	1.80E-001	2.30E-002
160	1.15E-001	2.52E-002
170	4.30E-002	2.74E-002
180	3.38E-002	2.96E-002
190	1.13E-001	3.17E-002
200	2.48E-001	3.29E-002
250	5.41E-001	4.09E-002
300	7.63E-001	4.42E-002
350	8.82E-001	4.55E-002
400	9.42E-001	4.06E-002

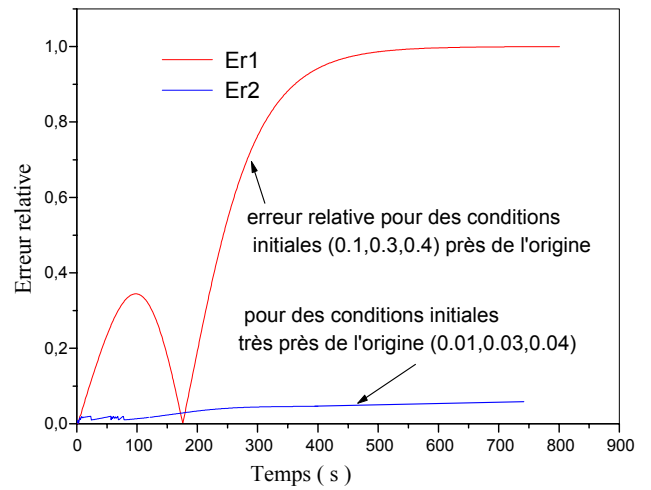


Figure1.3

l'évolution de l'erreur relative $Er1$, $Er2$ en fonction du temps

Tableau (I.1): représente la valeur des erreurs relatives $Er1$, $Er2$ de la solution linéaire optimale par rapport à la solution exacte respectivement pour des conditions initiales près de l'origine et très près de l'origine.

Il est clair qu'un choix judicieux des conditions initiales très près de l'origine (propriétés de l'ordre de la méthode) est clairement établi et s'explique aisément en faisant une comparaison entre les erreurs relatives $Er1$, $Er2$ calculées respectivement avec des conditions près de l'origine et celle très près de l'origine figure(1.3).

• 2^{ème} Cas:

$\alpha_H = 4.7804$: c'est un point critique, à partir duquel le système donne des solutions périodiques avec un changement de la stabilité des points d'équilibres. Le système subit une autre bifurcation appelée (*bifurcation Poincaré-Androw-Hopf*) [27], où il commence à osciller autour de l'un des deux nouveaux points d'équilibre (P_+ ou P_-). On va confirmer que pour la même valeur, par l'application de la dérivation optimale, on obtient la même chose, mais en prenant un $x(0)$ très proche de l'origine.

Avec $(x_0, y_0, z_0) = (0.001, 0.002, 0.003)$ La matrice initiale pour le système non linéaire (1.22) s'écrit

$$A_0 = DF(x(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ -1.9162 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

La procédure de la dérivation optimale donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.9148 & -1.5272 & -0.2880 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -5.18 \cdot 10^{-6} + i 1.637350 \\ \lambda_2 = -5.18 \cdot 10^{-6} - i 1.637350 \\ \lambda_3 = -8.21667 \cdot 10^{-1} \end{cases} \quad (1.32)$$

Dans la référence [41], on a utilisé la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1.10^{-1}, 2.10^{-1}, 3.10^{-1})$ qui nous a permis d'obtenir la matrice optimale suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.1630 & -1.7685 & -0.1665 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.0021 + i 1.636078 \\ \lambda_2 = 0.0021 - i 1.636078 \\ \lambda_3 = -0.3716. \end{cases} \quad (1.34)$$

En se plaçant très près de l'origine, on remarque que la dérivée optimale permet de donner un système linéaire optimale avec deux valeurs propres complexes, dans ce cas, plus la partie réelle des valeurs propres est d'autant plus proche de zéro et plus la décroissance de la partie exponentielle de la solution vers zéro est lente. Ainsi, la présence de ces valeurs propres complexes conjuguées (1.32) provoque un comportement oscillatoire périodique (*bifurcation Hopf*) comme le montrent les figures (1.4) et (1.5) (courbe en rouge solution non linéaire, courbe en bleu solution linéaire optimale), montrent des solutions périodiques (changement de la nature des solutions du système dynamique démontré par la méthode décrite dans (1.2)). Ces changements correspondent à l'apparition d'un cycle limite au niveau de l'espace de phase qui peut être expliqué par le fait que l'origine reste instable et tend à repousser loin de l'origine toutes les trajectoires oscillantes autour de P_{\pm} .

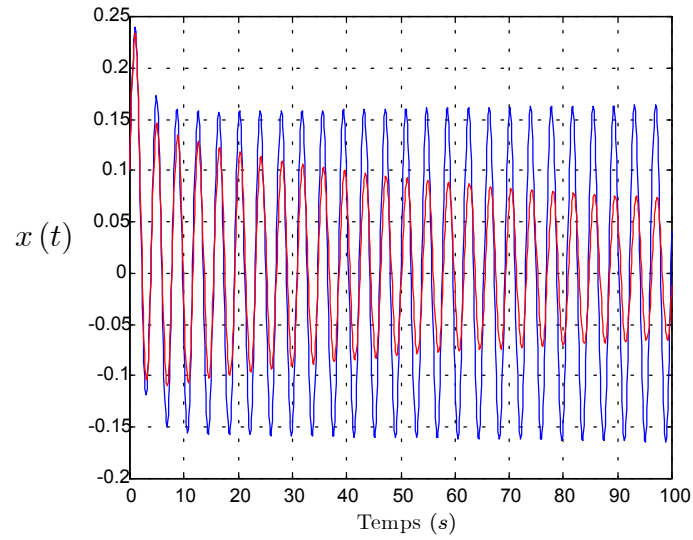


Figure1.4: représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$.

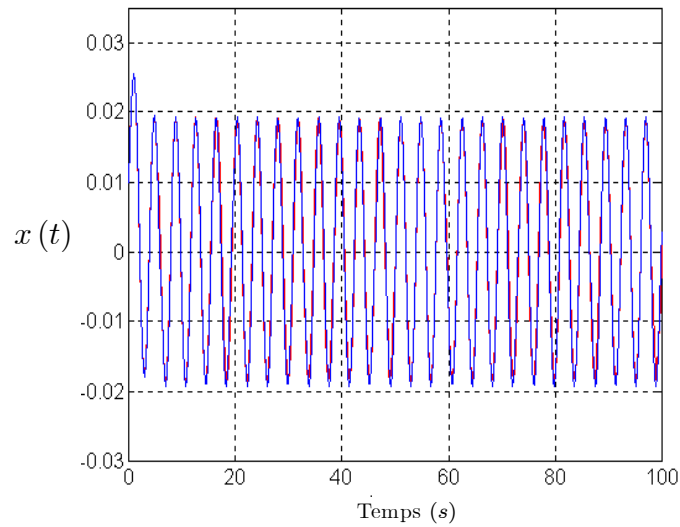


Figure1.5: représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$.

• **3^{ème} Cas:**

$\alpha = 5 > 4.7804$: il s'agit d'un point critique à partir duquel le système donne des solutions périodiques, avec un changement de la stabilité des points d'équilibre ainsi que la stabilité des solutions périodiques. Les deux nouveaux points d'équilibre (P_+ et P_-) deviennent instables tandis que l'origine devient stable. On va confirmer ces résultats par l'application de la méthode de dérivation optimale pour $x(0) = (0.01, 0.02, 0.03)$. la matrice initiale pour le système non linéaire (1.22) s'écrit

$$A_0 = DF(0.01, 0.02, 0.03) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.803814 & -1.5244 & -0.29345 \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

La procédure de la dérivée optimale donne au premier pas

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.533694 & 1 \\ -1.96129 & -1.551841 & -0.239282 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.01937 + i 1.64639 \\ \lambda_2 = 0.01937 - i 1.64639 \\ \lambda_3 = -0.8117234 \end{cases} \quad (1.37)$$

La dérivée optimale détecte l'échange de stabilité qui se traduit par des valeurs propres, complexes à partie réelle positive pour les points (P_+, P_-), pour le système linéaire optimal, qui s'écrivent sous la forme (1.37). Ceci montre que les deux points critiques P_+ et P_- deviennent instables alors que l'origine est stable ($\lambda_3 < 0$). l'analyse des deux figures (1.6), (1.7) (courbe en rouge solution non linéaire, courbe en bleu solution linéaire

optimale), confirment les résultats obtenus en se plaçant très près de l'origine).

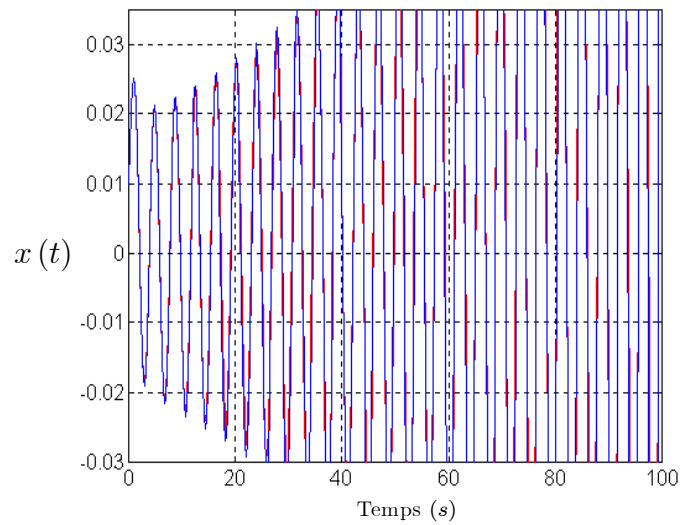


Figure 1.6

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

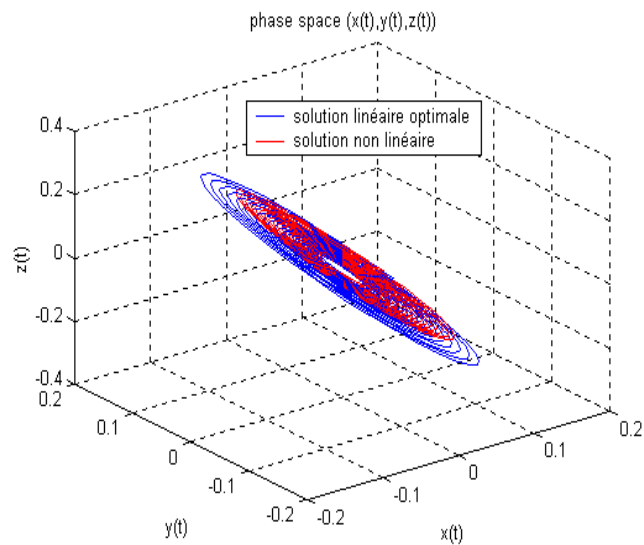


Figure1.7

représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

1.3.2 Comparaison

La comparaison entre les résultats obtenus, pour des conditions initiales près de l'origine, et celles rapportées dans la référence [41], montre une nette amélioration concernant la description du comportement réel, en obéissant à la même dynamique du système non linéaire initial. Ceci est illustré par les figures (1.1) et (1.2) qui représentent la solution optimale comparée à celle non linéaire (numérique) du système (1.22).

En plus, en se basant sur les résultats obtenus par l'application de la méthode aux points critiques, par exemple, (pour $\alpha_H = 4.7804$ et $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$), on constate que la dérivée optimale est capable de détecter le changement de stabilité à partir du changement de signe des parties réelles des valeurs propres données par les expressions (1.28) et (1.37). Le changement de comportement de la solution pour $\alpha = 1.1$ en une solution périodique pour $\alpha = 4.7804$ (apparition de la bifurcation Hopf) est mis en évidence par les figures (1.3) à (1.7).

Enfin, les résultats élaborés en choisissant des conditions initiales très près de l'origine, montrent clairement que la méthode de dérivation optimale suit le comportement du système non linéaire. Elle détecte les grands effets engendrés par les variations du paramètre de bifurcation, qui réside essentiellement dans l'échange de stabilité entre deux points singuliers stable et instable ou le passage d'un point singulier stable à une orbite périodique [27].

1.4 Conclusion

A la lumière des résultats obtenus, il ressort qu'en se basant sur une propriété importante de la méthode, déterminée à partir de l'estimation de l'erreur commise, la méthode de la dérivée optimale permet de détecter les différents échanges de stabilité qui accompagnent le phénomène complexe de bifurcation. Cette méthode décrit bien le changement de comportement des solutions et détecte le changement de stabilité, en obéissant d'une façon satisfaisante à la dynamique du système non-linéaire initial.

Par ailleurs, il apparaît clairement que le choix des conditions initiales pour l'application de la procédure de dérivation optimale est déterminant.

Enfin, pour une bonne utilisation de cette méthode, particulièrement pour l'étude des points critiques, le choix de conditions initiales appropriées s'impose.

DEUXIEME CHAPITRE

**APPLICOATION DE LA D.O.
AUX PROBLEMES
AVEC BIFURCATION**

Chapitre 2

Application de la D.O. aux problèmes avec Bifurcation

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons l'étude d'un modèle non-linéaire du point de vue de la bifurcation.

En utilisant la linéarisation classique, on fait une analyse en recherchant les points d'équilibre et les surfaces de bifurcation en fonction de différentes valeurs du paramètre de bifurcation. Ensuite, on applique la procédure de dérivation optimale au même problème. Notre objectif est de suivre numériquement l'apparition d'un comportement complexe qui repose sur des phénomènes très généraux : l'échange de stabilité entre solutions et le changement de comportement (c'est-à-dire, l'apparition des solutions périodiques), et la bifurcation des solutions en des solutions multiples, expliquée par l'apparition de nouvelles solutions d'équilibres.

Les résultats obtenus montrent un bon accord entre l'étude théorique présentée et l'analyse numérique effectuée à partir de la procédure de la dérivation optimale.

2.2 Problématique

Le modèle, que nous allons étudier, entre dans le cadre des exemples d'illustration de l'application de la dérivée optimale pour l'analyse de la stabilité de modèles physiques. C'est un système oscillatoire avec amortissement linéaire qui présente un phénomène de comportement assez compliqué.

Dans un premier temps, on fait une analyse par linéarisation classique autour de chaque point d'équilibre, afin de montrer les différentes surfaces de bifurcation élémentaire qui correspondent à la variation du paramètre de bifurcation; ensuite, nous procéderons, dans la section suivante, à l'étude numérique du problème par la méthode de dérivation optimale.

Pour ce faire, on se propose d'étudier l'exemple ci-dessous (2.1), qui a été introduit par Holmes et Moon [16],[23]; leur objectif a été de comprendre sous quelle condition les solutions chaotiques et les attracteurs étranges (cascade de bifurcation) peuvent se produire dans un modèle mécanique contrôlé par feed-back. C'est en fait un appareil mécanique du positionnement contrôlé par feed-back. Il est décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta \dot{x} + K(x)x &= -z + F(t) \\ \dot{z} + \alpha z &= \alpha\gamma(x - r), \end{aligned} \tag{2.1}$$

où une force du contrôle $F(t)$ est ajoutée pour déplacer le système d'une position à une autre, x et \dot{x} étant respectivement le déplacement et la vitesse d'un système oscillatoire avec une raideur non linéaire $K(x)$ et un amortissement linéaire $\delta \dot{x}$ (qui fait l'objet d'un contrôle négatif par feed-back z avec une constante de temps $\frac{1}{\alpha}$ et un gain γ).

Nous allons étudier le système (2.1), dans le cas où $K(x) = (x^2 - 1)$, c'est à dire $g(x) = K(x)x$, $r = 0$, et $F(t) = 0$ (régime libre).

Le système (2.1) s'écrit (voir référence [25])

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y - z \\ \dot{z} = \gamma \alpha x - \alpha z \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec les paramètres } \delta, \alpha, \gamma > 0. \quad (2.2)$$

Cette équation représente la description du système non linéaire dans l'espace d'état, les variables x, y, z étant les états du système.

Nous allons faire l'étude de ce système en répondant à un certain nombre de questions. Rappelons que, par linéarisation classique, on entend, la dérivation au sens de Fréchet de la fonction non linéaire.

2.3 Détermination des points d'équilibre

Les points d'équilibre peuvent être obtenus par la résolution du système $\dot{X} = 0$, soit

$$\begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = x - x^3 - z = 0 \\ \dot{z} = \gamma \alpha x - \alpha z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - x^3 = z \\ x - x^3 = \gamma x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 - \gamma \end{cases}. \quad (2.3)$$

Ce qui donne

$$x - x^3 = \gamma x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{1 - \gamma} \\ z = \pm \gamma \sqrt{1 - \gamma} \end{cases}. \quad (2.4)$$

D'après ces résultats, on constate bien que, pour $\gamma > 1$, le système admet un seul point d'équilibre à l'origine. En revanche, si $0 < \gamma < 1$, deux autres points d'équilibre apparaissent (P_+, P_-) ayant pour coordonnées

$$(x, y, z) = \left(\pm \sqrt{1 - \gamma}, 0, \pm \gamma \sqrt{1 - \gamma} \right). \quad (2.5)$$

Pour vérifier la stabilité de ces points d'équilibre, on linéarise le système autour de chaque point; puis, nous déterminons les valeurs propres du système linéarisé, et comparons ensuite les résultats théoriques à ceux obtenus à partir d'une analyse numérique par la procédure de dérivation optimale.

2.4 Linéarisation autour des points d'équilibre

Le système non-linéaire (2.2) possédant un seul point d'équilibre pour $(\gamma \geq 1)$ et deux autres pour $(0 < \gamma < 1)$, la linéarisation s'effectuera comme suit

- linéarisation autour de l'origine pour $\gamma \geq 1$,
- linéarisation autour des nouveaux points d'équilibre pour $0 < \gamma < 1$.

Chaque intervalle contient des valeurs critiques de γ , ces dernières correspondent aux surfaces de bifurcation élémentaire qui apparaissent lors de la variation de γ .

2.4.1 Linéarisation autour de l'origine pour $\gamma \geq 1$

La linéarisation classique est donnée par la dérivée au sens de Fréchet au point d'équilibre 0, soit

$$DF(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0) & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

avec $\frac{\partial g}{\partial x}(x) = 1 - 3x^2$.

Les valeurs propres sont déterminées par la résolution de l'équation caractéristique suivante

$$\det(DF(0) - \lambda I) = \lambda^3 + (\alpha + \delta)\lambda^2 - (1 - \alpha\delta)\lambda - \alpha(1 - \gamma) = 0. \quad (2.7)$$

Dans l' intervalle d'étude, on distingue deux valeurs critiques de γ , soit

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta - 1). \end{cases} \quad (2.8)$$

En utilisant le critère de Routh Hurwitz [15],[6], on peut montrer et vérifier les différentes surfaces de bifurcation élémentaire; ces dernières constituent des limites de la stabilité des points d'équilibre, de telle sorte que lorsque le paramètre de bifurcation γ dépasse ces limites, les solutions d'équilibre changent de stabilité. Dans le cas où $\gamma > 1$, à partir des coefficients du polynôme caractéristique (2.7) de la linéarisée classique (2.6), on obtient la matrice de Hurwitz suivante

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

avec

$$a_0 = 1 \quad a_1 = (\alpha + \delta) \quad a_2 = -(1 - \alpha\delta) \quad a_3 = -\alpha(1 - \gamma). \quad (2.10)$$

Théorème 2.1 [15], (*Critère de Routh-Hurwitz*) soit P un polynôme tel que $a_0 > 0$. Pour que P soit uniformément asymptôtiquement stable (u.a.s), il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positifs.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0, \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (2.11)$$

Si $n = 3$, on retrouve le critère suivant

Proposition 2.1 [15], soit $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$; pour que P soit u.a.s, il faut et il suffit que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_1 a_2 > a_3$.

Compte tenu des coefficients donnés par (2.10), en se basant sur le théorème (2.1) ($a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$), et en vertu de la proposition (2.1) ($a_2 > 0$), on montre que la limite

de stabilité est vérifiée comme suit

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 a_0 &= 0 \\
-(1 - \alpha\delta)(\delta + \alpha) + \alpha(1 - \gamma) &= 0 \\
\delta(\alpha^2 + \alpha\delta - 1) &= \alpha\gamma,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

sachant qu'il faut que $a_2 > 0$.

Alors, pour que

$$a_2 = -(1 - \alpha\delta) > 0, \quad \text{sachant que } \alpha, \delta > 0, \tag{2.13}$$

il faut que

$$\alpha\delta > 1,$$

ceci implique que, pour $\gamma > 1$ et $\alpha\delta > 1$, la limite de la stabilité peut être déduite à partir du calcul (2.12)

$$\gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta - 1). \tag{2.14}$$

• Cas où $\gamma = 1$

L'équation caractéristique (2.7) devient

$$\lambda^3 + (\alpha + \delta)\lambda^2 - (1 - \alpha\delta)\lambda = 0. \tag{2.15}$$

Les racines de cette équation sont données par

$$\begin{cases}
\lambda_1 = 0 \\
\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\alpha + \delta) + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4} \\
\lambda_3 = -\frac{1}{2}(\alpha + \delta) - \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4}.
\end{cases} \tag{2.16}$$

La quantité $(\alpha - \delta)^2 + 4$ est toujours positive, alors les valeurs propres $\lambda_{2,3}$ sont réelles et λ_1 est nulle. Par conséquent, la linéarisée classique montre qu'il existe une surface de bifurcation caractérisée par une valeur propre nulle.

- **Cas où $\gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$ avec $\alpha\delta > 1$**

L'équation (2.7) devient

$$\lambda^3 + (\alpha + \delta) \lambda^2 - (1 - \alpha\delta) \lambda - \alpha \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta - 1)\right) = 0. \quad (2.17)$$

Les racines de l'équation (2.17) sont données par

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -\alpha - \delta \\ \lambda'_2 = \sqrt{(1 - \alpha\delta)} \\ \lambda'_3 = -\sqrt{(1 - \alpha\delta)}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour $\alpha\delta > 1$, on a

$$(1 - \alpha\delta) < 0, \quad (2.19)$$

d'où

$$\sqrt{-(\alpha\delta - 1)} = \pm \sqrt{(\alpha\delta - 1)} i, \quad (2.20)$$

et par conséquent

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -\alpha - \delta \\ \lambda'_{2,3} = 0.0 \pm \sqrt{(\alpha\delta - 1)} i. \end{cases}$$

Pour $\alpha\delta > 1$ et $\gamma = \gamma_H \geq 1$, les valeurs propres, associées au système linéarisé autour du point d'équilibre du système non linéaire (2.2), ont été calculées au point d'équilibre. Par ailleurs, il existe deux valeurs propres complexes à partie réelle nulle, c'est-à-dire *purement imaginaires* ($Re(\lambda'_{2,3}) = 0$) et une valeur propre réelle strictement négative ($\lambda'_1 < 0$); dans ce cas, le système non linéaire subit une bifurcation élémentaire appelée bifurcation *Hopf*.

2.4.2 Linéarisation autour des nouveaux points d'équilibre pour

$$0 < \gamma < 1$$

Pour $0 < \gamma < 1$, il apparaît deux autres points d'équilibre P_+ et P_- après une bifurcation *Pitchfork* (cette bifurcation est commune dans les problèmes physiques qui présentent une symétrie; dans notre cas, le système est symétrique sous la transformation $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, et $z \rightarrow -z$) [34]. Ces deux nouveaux points ont pour coordonnées $(\pm\sqrt{1-\gamma}, 0, \pm\gamma\sqrt{1-\gamma})$. La linéarisation classique autour de ces points d'équilibre est donnée par

$$DF(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - 3(\pm\sqrt{1-\gamma})^2 & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Les valeurs propres sont déterminées par la résolution de l'équation caractéristique suivante

$$\lambda^3 + (\alpha + \delta)\lambda^2 + (\alpha\delta + 2 - 3\gamma)\lambda + 2\alpha(1 - \gamma) = 0. \quad (2.22)$$

Il existe dans cet intervalle, une valeur critique $\gamma = \gamma_{H_1}$.

On veut vérifier que la linéarisée classique possède des valeurs propres purement imaginaires (c'est-à-dire que le système subit une bifurcation Hopf). On peut vérifier selon le critère de Routh et de la même façon que dans le cas $\gamma > 1$, avec les coefficients de (2.22) donnés par

$$a_0 = 1 \quad a_1 = (\alpha + \delta) \quad a_2 = (\alpha\delta + 2 - 3\gamma) \quad a_3 = 2\alpha(1 - \gamma), \quad (2.23)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 a_0 &= 0 \\ (\alpha + \delta)(\alpha\delta + 2 - 3\gamma) - 2\alpha(1 - \gamma) &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Il en résulte que la valeur de $\gamma = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2) = \gamma_{H_1}$, définit une limite de la stabilité des nouveaux points d'équilibres caractérisant une des trois surfaces de bifurcation

qui survient.

• **Cas où $\gamma = \gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$ avec $\alpha\delta < 1$:** en remplaçant γ par γ_{H_1} dans l'expression (2.21), on obtient

$$DF(P_{\pm}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - 3\left(1 - \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)\right) & -\delta & -1 \\ \alpha \left(\frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)\right) & 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha - \delta \\ \lambda_2 = \frac{1}{-\alpha - 3\delta} \sqrt{2} \sqrt{((\alpha + 3\delta) \alpha (\alpha\delta - 1))} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{-\alpha - 3\delta} \sqrt{2} \sqrt{((\alpha + 3\delta) \alpha (\alpha\delta - 1))}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Pour $\alpha\delta < 1$, il vient

$$((\alpha + 3\delta) \alpha (\alpha\delta - 1)) < 0, \quad (2.27)$$

soit

$$\sqrt{-((\alpha + 3\delta) \alpha (1 - \alpha\delta))} = \pm \sqrt{((\alpha + 3\delta) \alpha (1 - \alpha\delta))} i,$$

et, par conséquent

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha - \delta \\ \lambda_{2,3} = 0.0 \pm \left[\frac{1}{-\alpha - 3\delta} \sqrt{((\alpha + 3\delta) \alpha (1 - \alpha\delta))} \sqrt{2} \right] i. \end{cases} \quad (2.28)$$

Pour $\alpha\delta < 1$, les trois valeurs propres du système linéaire classique s'écrivent sous la forme (2.28), l'une étant réelle strictement négative λ_1 et les deux autres sont complexes *purement imaginaires*; le système subit alors une autre bifurcation Hopf pour la valeur critique γ_{H_1} appartenant à l'intervalle $0 < \gamma < 1$. Dans ce cas, le système commence à osciller autour de l'un des nouveaux points d'équilibre.

Si $\gamma = \gamma_H = \gamma_{H_1} = 1$, on obtient évidemment

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1) = 1 \Rightarrow \alpha\delta = 1 \\ \gamma = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2) = 1 \Rightarrow \alpha\delta = 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Ceci signifie que les trois surfaces de bifurcation se rencontrent sur la courbe $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$ (une hyperbole dans le plan (α, δ)), ceci est vérifié à travers une représentation

par le logiciel Maple figures(2.1) à trois dimensions (du paramètre γ en fonction de α, δ) de l'intersection des trois surfaces de bifurcation décrites dans la problématique.

Notons que, la figure(2.1) montre la représentation générale dans tout l'espace des paramètres (α, δ, γ) .

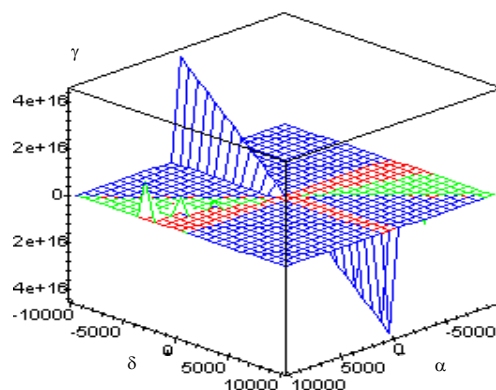


Figure 2.1

la représentation générale des trois surfaces de bifurcation $\gamma = 1$,

$$\gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1), \quad \gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2), \quad \text{dans l'espace des paramètres } (\alpha, \delta, \gamma)$$

Mais, en réalité, il faut tenir compte du fait que les paramètres α, δ, γ prennent des valeurs positives. Pour mieux visualiser et vérifier l'intersection de ces surfaces de bifurcation, il faut loper la représentation générale donnée par la figure(2.1) dans le demi-espace droit positif $(\alpha, \delta, \gamma > 0)$, on retrouve, alors les figures (2.2) et (2.3) suivantes

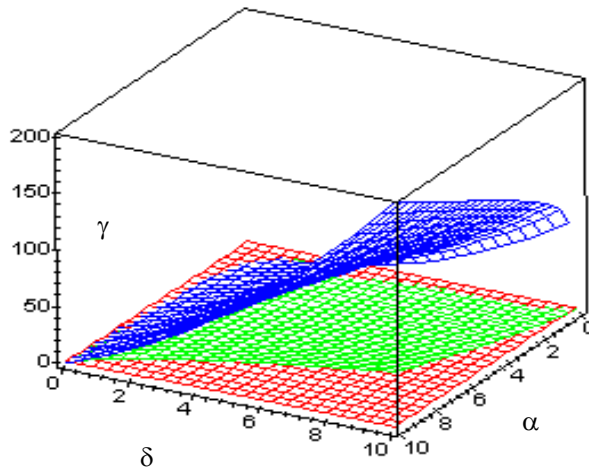


Figure2.2:

représente une loupe de la représentation générale figure(2.1) dans le demi-espace droit positif ($\alpha, \delta, \gamma > 0$)

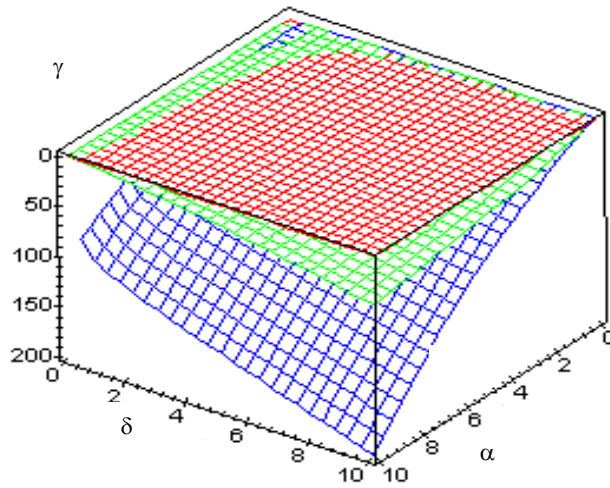


Figure 2.3: représente la figure 2.2 inversée

La surface, $\gamma = 1$, est représentée en rouge, celle $\gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$, en vert, et la surface $\gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$ en bleu.

Les figures(2.2) et (2.3) montrent que les trois surfaces se rencontrent réellement sur la courbe désignée par l'équation $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$, c'est à dire, $\alpha\delta = 1$. A partir de cette représentation, on peut justifier les choix suivants:

- $\gamma > 1$, pour montrer que le système considéré possède la surface de bifurcation caractérisée par γ_H , pour le point d'équilibre à l'origine, il faut choisir les paramètres (α, δ) de telle sorte que $\alpha\delta > 1$ (c'est à dire, au dessus de la courbe $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$).
- $0 < \gamma < 1$, pour montrer que le système considéré possède la surface de bifurcation caractérisée par γ_{H_1} , pour les nouveaux points d'équilibres (P_{\pm}) , il faut choisir les paramètres α, δ de telle sorte que $\alpha\delta < 1$ (c'est à dire, au dessous de la courbe $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$).

La question qui se pose: la dérivée optimale permet-elle de détecter numériquement l'existence de telles surfaces de bifurcation élémentaire ainsi que l'échange de la stabilité qui se manifeste lors de la variation du paramètre de bifurcation γ ?

C'est l'objet de la section suivante.

2.5 Application de la procédure de dérivation optimale

2.5.1 Application dans l'intervalle $\gamma \geq 1$

L'analyse par linéarisation classique, pour $\gamma \geq 1$, montre qu'il existe deux surfaces de bifurcation élémentaire définies par les deux cas suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \gamma = 1 \text{ (le point d'équilibre est non hyperbolique(} \textit{une valeur propre nulle} \text{))} \\ \bullet \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1) \text{ (} \textit{valeurs propres purement imaginaires} \text{) .} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Dans cet intervalle, le système non linéaire (2.2) possède un seul point d'équilibre. L'étude de la stabilité de ce point s'effectuera suivant la valeur critique $\gamma_H = \frac{\delta}{\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$. A partir de cette valeur de γ , on distingue deux intervalles de variation du paramètre de bifurcation qui sont séparés par la valeur critique γ_H comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 < \gamma < \gamma_H \text{ (le point d'équilibre est asymptotiquement stable)} \\ \gamma = \gamma_H \text{ (bifurcation Hopf: valeurs propres purement imaginaires)} \\ \gamma > \gamma_H > 1 \text{ (le point d'équilibre devient instable).} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Ainsi, lorsque γ dépasse la valeur critique γ_H , il se produit un changement qualitatif de la nature et du comportement de la solution du système non linéaire (2.2).

Pour l'application de la procédure de la dérivation optimale, les valeurs numériques des paramètres $\alpha, \delta > 0$ seront choisis comme suit

$$\alpha = 3; \delta = 2 \text{ avec } \alpha\delta > 1. \quad (2.32)$$

L'analyse numérique, par la technique de dérivation optimale, du comportement du système non linéaire (2.2)(surfaces de bifurcation définies par l'expression(2.30)), de la stabilité de ses solutions d'équilibre (voir les cas donnés par l'expression (2.31)), s'effectue comme suit:

• **1^{er} Cas:** $\gamma = 1$, le système linéaire classique donné par l'équation (2.6), possède des valeurs propres qui s'écrivent sous la forme (2.16), l'une d'elles étant nulle.

En prenant $\gamma = 1$, avec la condition initiale $X(0) = (0.001, 0.02, 0.04)$, et en appliquant la méthode de dérivation optimale, on retrouve les résultats suivants

Prenons, à titre d'exemple

$$X(0) = (0.001, 0.02, 0.04), \quad (2.33)$$

on retrouve alors les résultats suivants

La matrice optimale \tilde{A} est donnée par ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1.000 & -1.9999 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

ses valeurs propres s'écrivent

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.537 \cdot 10^{-6} \\ \lambda_2 = -1.3819 \\ \lambda_3 = -3.6180 . \end{cases} \quad (2.35)$$

Les courbes des figures (2.4) et (2.5) représentent les variations de la composante $x(t)$ de la solution du système linéaire optimal obtenu (2.34) en fonction du temps, comparées à celle du système non linéaire (2.2).

$x(t)$

Figure 2.4

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps
pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.001, 0.02, 0.04)$

Figure 2.5

représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions
initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.001, 0.02, 0.04)$

Pour $\gamma = 1$, pour le même choix des valeurs numériques données en (2.32), le système linéaire, obtenu par linéarisation classique autour de l'origine, s'écrit

$$DF(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

dont les valeurs propres sont données par

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1.382 \\ \lambda_3 = -3.618. \end{cases} \quad (2.37)$$

Ce résultat nous permet de vérifier numériquement que le système linéaire classique possède une surface de bifurcation caractérisée par une valeur propre nulle .

Il apparaît clairement que le système linéaire optimal, déterminé pour des conditions initiales très près de l'origine, présente une surface de bifurcation correspondant à $\gamma = 1$. Ceci peut être expliqué par le fait que le seul point fixe, qui est l'origine, est non hyperbolique (c'est-à-dire, l'existence d'une valeur propre nulle $\text{Re}(\lambda_1) = 1.5 \cdot 10^{-6} \approx 0$ et deux autres strictement négatives $\text{Re}(\lambda_{2,3}) < 0$ (voir l'expression(2.35)). Ces résultats sont conformes à ceux obtenus par la linéarisation classique données auparavant ((2.16) et (2.36)).

Ainsi, on remarque bien que, si on se place très près de l'origine, la dérivée optimale décrit fidèlement la dynamique et le comportement réel du système non linéaire (2.2). Les figures (2.4) et (2.5) montrent que les solutions optimale et exacte (non linéaire) déterminées très près de l'origine sont confondues.

— **2^{ème} Cas** : $1 < \gamma \leq \gamma_H$

Il existe toujours une seule solution d'équilibre correspondant à l'origine qui est le seul point fixe.

Nous allons appliquer la méthode de dérivation optimale en prenant, par exemple, le cas où $\gamma = 2$, avec la condition initiale $(0.1, 0.2, 0.4)$ et les valeurs numériques des paramètres $(\alpha, \delta > 0)$ données par (2.32).

La matrice initiale du système non-linéaire(2.2) s'écrit

$$A_0 = DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.97 & -2 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

la matrice optimale \tilde{A} est obtenue après 3 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$) par

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.96 & -2.000 & -1.000 \\ 6.000 & 0 & -3.000 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

ses valeurs propres sont données par

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.545999 + i 0.695054 \\ \lambda_2 = -0.545999 - i 0.695054 \\ \lambda_3 = -3.913299 . \end{cases} \quad (2.40)$$

Les courbes des figures (2.6) et (2.7) représentent les variations de la composante $x(t)$ en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal obtenu (2.39) en la comparant à celles de la composante du système non linéaire (2.2), pour $\gamma = 2$ et la condition initiale $X(0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

Figure 2.6

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$

Figure 2.7

représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$

Ainsi, on conclut que, pour $1 < \gamma < \gamma_H$, le système possède un seul point d'équilibre qui est l'origine. Les valeurs propres obtenues pour le système linéaire optimal ont la forme (2.40); deux d'entre elles sont complexes à parties réelles strictement négatives $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, la troisième valeur propre est réelle négative $\lambda_3 < 0$. Ceci explique la stabilité asymptotique de l'origine. Les figures (2.6) et (2.7) montrent que les solutions optimales et exactes sont confondues, ce qui montre que la dérivée optimale décrit bien le comportement et la dynamique du système non-linéaire (2.2). Les valeurs propres complexes conjuguées à partie réelle négative, données sous la forme (2.40), expliquent le comportement oscillant amorti Figure (2.6), sachant que la partie imaginaire explique un comportement oscillatoire, tandis que la stabilité dépend du signe de la partie réelle. L'analyse qualitative, basée sur la représentation des trajectoires dans l'espace de phase, montre que ces dernières convergent asymptotiquement vers le point d'équilibre stable à l'origine, confirmant ainsi les résultats obtenus.

• **3^{ème} Cas** $\gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$ avec $\alpha\delta > 1$

Pour $\gamma = \gamma_H$ et pour le même choix des valeurs numériques données par (2.32), le système linéaire classique (2.6), obtenu par linéarisation autour de l'origine, possède deux valeurs propres purement imaginaires, en d'autres termes, que le système non linéaire subit une autre bifurcation *Hopf*. Pour la même valeur de γ avec celles des paramètres donnés comme suit

$$\alpha = 3, \delta = 2, \gamma_H = 9.3333 \text{ et } \alpha\delta > 1,$$

on applique la procédure de dérivation optimale.

$A_0 = DF(X_0)$, $X_0 = (0.01, 0.02, 0.04)$, est donnée par

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.99987 & -2 & -1 \\ 28 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

La matrice optimale donne après 2 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.99988 & -2 & -1 \\ 28 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2.08 \cdot 10^{-5} + 2.2360i \\ \lambda_2 = -2.08 \cdot 10^{-5} - 2.2360i \\ \lambda_3 = -4.9999 . \end{cases} \quad (2.43)$$

Les courbes des figures (2.8) et (2.9) représentent les variations de la composante $x(t)$ en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal (2.42) et du système non linéaire (2.2), pour $\gamma = \gamma_H = 9.3333$ et la condition initiale $X(0) = (0.01, 0.02, 0.04)$

Figure 2.8

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.04)$

Figure 2.9

représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.04)$

Ainsi, pour $\gamma = \gamma_H$, le système linéaire optimal possède deux valeurs propres purement imaginaires (2.43). Dans ce cas, plus la partie réelle des valeurs propres est d'autant plus proche de zéro et plus la décroissance de la partie exponentielle de la solution vers zéro est lente. Ainsi, la présence de valeurs propres complexes conjuguées purement imaginaires (2.43) provoque un comportement oscillatoire périodique (*bifurcation Hopf (changement de comportement)*). Ce dernier se traduit par l'apparition des solutions périodiques représentées sur les figures (2.8) et (2.9), correspondant à un cycle limite au niveau de l'espace de phase. Le système commence alors à osciller autour du point d'équilibre unique qui est l'origine.

• 4^{ème} Cas: $\gamma > \gamma_H$

La valeur critique γ_H est définie comme étant la frontière d'une région de stabilité asymptotique. Si cette région de stabilité est limitée, sa frontière est formée par un cycle limite [40] (ce qui est le cas de notre exemple voir la figure (2.10) représenté pour $\gamma = \gamma_H$). Lorsque γ dépasse γ_H , le seul point d'équilibre devient instable.

Pour conforter ce résultat, prenons à titre d'exemple $\gamma = 10 > \gamma_H$, et appliquons la procédure de dérivation optimale.

Cette dernière conduit à la matrice

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1.02 & -2.01 & -1.005 \\ -30 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

dont les valeurs propres sont données comme suit

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.032468 + i 2.309864 \\ \lambda_2 = 0.032468 - i 2.309864 \\ \lambda_3 = -5.075825. \end{cases} \quad (2.45)$$

Les résultats obtenus montrent qu'il existe deux valeurs propres à parties réelles positives et une troisième strictement négative(2.45). Ceci explique l'instabilité de l'origine, résul-

tant d'une détection numérique du changement de la stabilité. Toutes les trajectoires, dans l'espace de phase, sont éloignées de ce point qui tend à les repousser créant ainsi un cycle limite.

2.5.2 Application dans l'intervalle $0 < \gamma < 1$

Dans cet intervalle, il y a apparition de deux autres points d'équilibres P_+ , P_- , dont leurs coordonnées sont respectivement $(\pm\sqrt{1-\gamma}, 0, \pm\gamma\sqrt{1-\gamma})$.

Pour appliquer la méthode de la dérivée optimale, on effectue un changement de variable ou un recalage à l'origine, afin que l'hypothèse $(H1)F(0) = 0$ soit vérifiée. Ce changement s'effectue comme suit

$$\begin{aligned}(X, Y, Z) &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \\ (x_1, y_1, z_1) &= (\pm\sqrt{1-\gamma}, 0, \pm\gamma\sqrt{1-\gamma}).\end{aligned}$$

Le système non-linéaire obtenu dans la nouvelle représentation (X, Y, Z) est donné par

$$\begin{cases} \dot{X} = (Y + y_1) \\ \dot{Y} = (X + x_1) - (X + x_1)^3 - \delta(Y + y_1) - (Z + z_1) \\ \dot{Z} = \gamma\alpha(X + x_1) - \alpha(Z + z_1). \end{cases} \quad (2.46)$$

La linéarisation classique, autour des nouveaux points d'équilibre, montre que le système possède une surface de bifurcation pour $\gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta} (\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$: le système linéaire classique ayant deux valeurs propres purement imaginaires pour les points d'équilibre P_{\pm} . L'étude de la stabilité et de la bifurcation des nouveaux points d'équilibre P_+ ou P_- se fait suivant la valeur critique γ_{H_1} . Cette valeur est une frontière séparant deux intervalles de variation du paramètre γ , qui représentent un changement qualitatif de la nature et du comportement de la solution ainsi que la stabilité des points d'équilibre. Ces deux

plages de variation se présentent comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma < \gamma_{H_1} < 1 \text{ (les nouveaux points d'équilibres sont asymptotiquement stables)} \\ \gamma = \gamma_{H_1} \text{ (bifurcation Hopf (valeurs propres purement imaginaires))} \\ 1 > \gamma > \gamma_{H_1} \text{ (les nouveaux points d'équilibre sont instables).} \end{array} \right.$$

Dès lors, l'analyse par la procédure de dérivation optimale s'effectuera dans les cas suivants

• Cas où $\gamma < \gamma_{H_1} < 1$

Dans cet intervalle, les deux nouveaux points d'équilibre P_+, P_- sont asymptotiquement stables. Pour vérifier ce résultat, on prend $\gamma = 0.3 < \gamma_{H_1}$, et on choisit les valeurs numériques de α , et de δ de telle sorte que la condition $\alpha\delta < 1$ soit remplie, garantissant ainsi l'existence de la surface de bifurcation caractérisée par γ_{H_1} , et permettant sa vérification à travers une analyse numérique par la méthode proposée

$$\alpha = 0.9, \delta = 0.2, \text{ avec } \alpha\delta < 1, \text{ et } 0 < \gamma < 1, \quad (2.47)$$

en appliquant la procédure de la dérivation optimale. Pour $X(0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, la matrice initiale A_0 du système non-linéaire (2.46) s'écrit

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.62803 & -0.2 & -1 \\ 0.27 & 0 & -0.9 \end{bmatrix},$$

après 7 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$), la matrice \tilde{A} s'écrit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1.1990 & -0.16834 & -0.78085 \\ 0.27 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.032716 + i 1.134068 \\ \lambda_2 = -0.032716 - i 1.134068 \\ \lambda_3 = -1.00565. \end{cases} \quad (2.49)$$

Les courbes des figures (2.10) et (2.11) représentent la variation en fonction du temps de la composante $x(t)$ de la solution du système linéaire optimal (2.48) comparées à celles du système non-linéaire (2.46), pour $\gamma = 0.3$ et $X(0) = (0.1, 0.2, 0.4)$.

Figure 2.10

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$

Figure 2.11

représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$

• Cas où $\gamma = \gamma_{H_1}$

Il s'agit d'un point critique qui correspond à un système linéaire classique possédant deux valeurs propres purement imaginaires (bifurcation Hopf). En appliquant la méthode de dérivation optimale pour les valeurs suivantes

$$\alpha = 0.9, \delta = 0.2, \text{ alors } \gamma = \gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2) = 0.3987 \text{ et } \alpha\delta < 1. \quad (2.50)$$

la matrice initiale A_0 s'écrit

$$A_0 = DF(X_0) = DF(0.01, 0.02, 0.04) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.6280 & -0.2 & -0.1 \\ 0.27 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Le calcul de la matrice optimale, après 3 itérations, ($\varepsilon = 10^{-6}$) donne

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.80793 & -0.1963 & -0.98185 \\ 0.35879 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 6.7886 \cdot 10^{-5} + i 0.99251 \\ \lambda_2 = 6.7886 \cdot 10^{-5} - i 0.99251 \\ \lambda_3 = -1.0963 . \end{cases} \quad (2.53)$$

Les courbes des figures (2.12) et (2.13) représentent la variation en fonction du temps de la composante $x(t)$ de la solution du système linéaire optimal (2.52), comparée à celle de la solution non-linéaire (2.2), pour $\gamma = \gamma_{H_1} = 0.3987$ pour $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.04)$

Figure 2.12

représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.04)$

Figure 2.13

représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.04)$

• Cas où $\gamma > \gamma_{H_1}$

Lorsque γ dépasse la valeurs critique γ_{H_1} , les deux nouveaux points d'équilibres deviennent instables. Choissant comme exemple $\gamma = 0.6 > \gamma_{H_1}$, et appliquons la procédure de dérivation optimale, la matrice optimale du système non-linéaire (2.46) est donnée, après 2 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$) par

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.29003 & -0.1966 & -0.82834 \\ 0.54 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.0626195 + i \ 0.7682067 \\ \lambda_2 = 0.0626195 - i \ 0.7682067 \\ \lambda_3 = -1.1949047. \end{cases} \quad (2.55)$$

Interprétation des résultats pour l'intervalle $0 < \gamma < 1$

• Cas où $\gamma < \gamma_{H_1}$

Les valeurs propres du système linéaire obtenu sont à partie réelle strictement négative (2.49). Ceci implique que le nouveau point fixe (P_+ ou P_-) est hyperbolique stable et les trajectoires convergent asymptotiquement vers l'un de ces points, tandis que l'origine devient instable. Les figures (2.10) et (2.11), représentant les solutions du système pour $\gamma = 0.3$ (linéaire optimale courbe en pointillée et numérique courbe en trait plein) montrent que la dérivée optimale suit le comportement et la dynamique du système non-linéaire initial, et détecte l'échange de stabilité entre les différents points d'équilibre.

• Cas où $\gamma = \gamma_{H_1}$

La dérivée optimale permet de mieux détecter cette bifurcation. En se plaçant près de l'origine, par exemple pour $\gamma = \gamma_{H_1} = 0.3987$ et $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.01, 0.04)$, le système linéaire optimale possède une paire de valeurs dont la partie réel est proche de zéros (2.53). Ceci explique l'apparition du phénomène de bifurcation de type *Hopf* (chan-

gement de la nature des solutions en des solutions périodiques et l'apparition d'un cycle limite au niveau de l'espace de phase). L'origine, qui devient ainsi instable, repousse toutes les trajectoires et le système commence à osciller autour de l'un des nouveaux points d'équilibre (P_+, P_-) . Les figures (2.12) et (2.13) montrent que les solutions numérique (non linéaire) et optimale sont confondues.

• Cas où $\gamma > \gamma_{H_1}$

La méthode de dérivation optimale permet de détecter numériquement, et d'une façon satisfaisante, le changement de la stabilité des points d'équilibre (P_+, P_-) qui accompagne le phénomène de bifurcation. Ceci est traduit par les valeurs propres du système linéaire optimal (2.55), dont deux sont à partie réelle strictement positive, tandis que la troisième est négative.

2.6 Comparaison

En comparant les résultats obtenus, pour les valeurs critiques de γ , à partir de l'analyse théorique par linéarisation classique et ceux obtenus à partir de la mise en oeuvre numérique de la procédure de la dérivation optimale, on peut conclure que cette technique suit numériquement l'évolution des solutions en fonction du paramètre γ . En général, les solutions linéaires optimales se déforment de manière continue en fonction du paramètre de bifurcation γ , sans pour autant changer de nature. Par contre, ces solutions changent qualitativement aux valeurs critiques données comme suit

- $\gamma = 1$: le système linéaire classique possède une valeur propre nulle à l'origine. Ceci est vérifié par la procédure de la dérivation optimale dont les valeurs propres sont données sous la forme (2.35).

- $\gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$ et $\alpha\delta > 1$: le système linéaire classique a des valeurs propres purement imaginaires à l'origine. Ceci est montré par la procédure de la dérivation optimale, dont la partie réels des valeurs propres complexes très proche de zéros (apparition des solution périodiques(bifurcation Hopf), s'écrivent suivant le système

(2.43).

• $\gamma = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$ et $\alpha\delta < 1$: le système linéaire classique possède des valeurs propres purement imaginaires pour les nouveaux points d'équilibres (P_+ et P_-). Ce résultat est vérifié par la procédure de la dérivation optimale, dont les valeurs propres complexes à partie réel très proche de zéros sont données sous la forme (2.53). Ceci explique l'apparition du le Phénomène de (bifurcation Hopf (comportement oscillatoire périodique))

Dans les deux cas

$$\begin{cases} \gamma > \gamma_H \text{ dans l'intervalle } (\gamma \geq 1) \\ \gamma > \gamma_{H_1} \text{ dans l'intervalle } (0 < \gamma < 1) , \end{cases} \quad (2.56)$$

les résultats obtenus, à partir d'une analyse numérique du modèle physique (2.2), montrent que l'évolution des solutions au court du temps est plus rapide lorsque le gain γ (paramètre de bifurcation) augmente, et peuvent devenir oscillatoires. Pour des valeurs élevées du gain γ , le comportement pourra même être instable (apparition du phénomène complètement instable du chaos). Cette instabilité des points d'équilibre est à l'origine de la présence du mécanisme d'étirement et de repliement, qui donne naissance à ce qu'on appelle " les attracteurs étranges ".

Dès lors, il apparaît clairement qu'une bonne utilisation de la méthode de dérivation optimale (choix des conditions initiales et des paramètres adéquats) permet de détecter numériquement les différentes surfaces de bifurcation élémentaire, et de donner une meilleure description qualitative du comportement complexe propre au phénomène de bifurcation, en l'occurrence, l'échange de stabilité, l'apparition des solutions périodiques, etc... Autrement dit, cette méthode peut être utilisée comme un outil numérique essentiel et puissant pour l'analyse de la stabilité de certains problèmes qui engendrent des comportements particuliers (bifurcation).

TROISIEME CHAPITRE

**APPROXIMATION LOCALE,
PAR MORCEAUX ET GLOBALE**

Chapitre 3

Approximation locale, par morceaux et globale

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de faire une comparaison entre trois techniques de linéarisation: locale (approximation optimale), par morceaux (linéarisation par morceaux), et globale (dérivation optimale).

Cette étude est motivée par la confrontation des méthodes élaborées par Benouaz et Arino [42], [39] à la linéarisation par morceaux.

Dans une première partie, nous allons rappeler la méthode de l'approximation optimale[42], [39], ainsi que la méthode de linéarisation par morceaux..

Dans la deuxième partie, nous proposons un certain nombre d'exemples pour lesquels on applique les méthodes introduites, suivi d'une comparaison entre ces techniques à partir d'un calcul d'erreur relative.

3.2 Rappels.

Dans un premier temps, il nous a semblé utile de rappeler respectivement la méthode de l'approximation optimale et la méthode de linéarisation par morceaux.

3.2.1 La méthode d'approximation optimale

considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour $t \in [0, T]$, $x \in R^n$, F est définie dans un certain ouvert de R^n valeur dans R^n .

Considérons une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$, et on pose $\tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i$.

Le principe de cette méthode est de remplacer la fonction F non linéaire par une application linéaire dans le sens de la dérivée optimale en chaque intervalle de la subdivision, ce qui permet de calculer une approximation \tilde{x}_i de la solution en tout point t_i de la subdivision. Une approximation de la solution est déduite par interpolation linéaire entre t_i et t_{i+1} . Cette approximation n'est pas la valeur de la solution en t_i de l'équation non linéaire, mais celle de la dérivée optimale [39],[42].

Algorithme

Nous allons donner maintenant l'algorithme de l'approximation optimale [39],[42] sur l'ensemble de l'intervalle $[0, T]$. En se basant sur la procédure de la dérivée optimale construite dans un intervalle quelconque de temps $[\alpha, \beta]$ constituant $[0, T]$. Nous allons utiliser cette technique dans chacun des sous intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ avec $\tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i$.

Premier pas: La solution du problème de la dérivée optimale sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ à partir de $\tilde{x}_0 = \bar{x}_0$, et en démarrant avec $A_0 = DF(x_0)$, permet de calculer $\tilde{A}_1(\tilde{x}_0, \tau_1)$.

La solution du système linéaire correspondant sur l'intervalle $[t_0, t_1]$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(\tilde{A}_1(\tilde{x}_0, \tau_1) \right) u + b_0 \\ u(0) = 0, \quad b_0 = F(\tilde{x}_0) \end{cases} \quad (3.2)$$

donne une approximation $\tilde{y}_1 = u(t_1)$, de $\tilde{y}(t_1)$ au point t_1 est donné par

$$\tilde{x}_1 = \tilde{y}_1 + \tilde{x}_0 \quad (3.3)$$

Deuxième pas: la procédure de la dérivée optimale sur $[t_1, t_2]$ à partir de $\tilde{x}_1 = \bar{x}_1$, et en démarrant avec $\tilde{A}_1(\tilde{x}_0, \tau_1)$, permet de calculer $\tilde{A}_2(\tilde{x}_1, \tau_2)$. La solution du système linéaire correspondant sur l'intervalle $[t_1, t_2]$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(\tilde{A}_2(\tilde{x}_1, \tau_2) \right) u + b_1 \\ u(0) = 0, \quad b_1 = F(\tilde{x}_1) \end{cases} \quad (3.4)$$

donne une approximation $\tilde{y}_2 = u(t_2)$, de $\tilde{y}(t_2)$ au point t_2 est

$$\tilde{x}_2 = \tilde{y}_2 + \tilde{x}_1. \quad (3.5)$$

Troisième pas: d'une façon générale, si en supposant que $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i$, ont été calculés, alors pour calculer \tilde{x}_{i+1} à partir de \tilde{x}_i , nous devons résoudre le problème de la dérivée optimale sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Ce qui permet de calculer $\tilde{A}_{i+1}(\tilde{x}_i, \tau_{i+1})$ qui définit le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(\tilde{A}_{i+1}(\tilde{x}_i, \tau_{i+1}) \right) u + b_i \\ u(0) = 0, \quad b_i = F(\tilde{x}_i) \end{cases} \quad (3.6)$$

La solution sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ considéré s'écrit

$$u(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp \left[(t_{i+1} - s) \left(\tilde{A}_{i+1}(\tilde{x}_i, \tau_{i+1}) \right) \right] (b_i) ds. \quad (3.7)$$

dans ce cas, une approximation $\tilde{y}_{i+1} = u(t_{i+1})$, de $\bar{y}(t_{i+1})$ au point t_{i+1} est calculée et par conséquent le schéma général de l'approximation optimale peut s'écrire

$$\begin{cases} \tilde{x}_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} + \tilde{x}_i \\ \tilde{x}_0 = \bar{x}_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Finalement, la procédure d'approximation optimale permet de construire une fonction $\tilde{x}(t)$ en recollant bout à bout les approximations trouvées sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. $\tilde{x}(t)$ est définie par

$$\tilde{x}(t) = u_{i+1}(t) + \tilde{x}_i, \text{ pour } t_i \leq t \leq t_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1, \quad (3.9)$$

où u est solution de l'équation (3.6), \tilde{x} est l'approximation optimale de la solution x sur $[0, T]$.

3.2.2 La méthode de linéarisation par morceaux:

Cette méthode consiste à approcher les fonctions non linéaires par des segments linéaires, ce qui simplifie considérablement les calculs. D'une façon plus générale on donne la définition suivante:

Définition 3.1 [18], Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée linéaire par morceaux si l'espace de \mathbb{R}^n peut être divisé en domaines appelés domaines linéaires de f tels que dans chaque domaine f soit une fonction affine. Une fonction est affine si elle est de la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i a_i x_i + b \quad (3.10)$$

Les coefficients a_i, b qui définissent la fonction affine varient de domaine en domaine.

Les domaines linéaires d'une fonction linéaire par morceaux sont par définition divisées par un nombre fini d'hyperplan. Un hyperplan est un plan dans \mathbb{R}^n qui est défini par une

équation

$$\sum_i c_i x_i + d = 0 \quad (3.11)$$

Pour cela on donne l'exemple d'une bobine avec un noyau ferroamgnétique qui peut être modélisée par une inductance non linéaire dont la caractéristique est représentée sur la figure(3-1). Elle est parfois approximée par une relation constitutive de la forme

$$i = a\varphi + b\varphi^3 \quad (3.12)$$

où: a et b sont des constantes propres à la bobine, et φ le flux.

Figure(3-1)

caractéristique non linéaire d'une inductance non linéaire

Alors, si on utilise l'approche de la linéarisation par morceaux, pour approcher la caractéristique non linéaire donnée par l'expression (3.12), une approximation plus grossière est fournie par la fonction linéaire par morceaux

$$i = \begin{cases} \varphi/L_0 & \text{pour } |\varphi| \leq \varphi_0 \\ \frac{\varphi}{L_1} - \varphi_0 \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_0} \right) & \text{pour } \varphi > \varphi_0 \\ \frac{\varphi}{L_1} + \varphi_0 \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_0} \right) & \text{pour } \varphi < -\varphi_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Cette caractéristique linéaire par morceaux est représentée sur la figure(3-2)

Figure(3-2)
caractéristique linéaire par morceaux

Remarque: Les fonctions linéaires par morceaux causent des problèmes aux frontières des domaines linéaires, où leurs dérivées sont discontinues.

3.3 Application

Cette section est consacrée à l'application des méthodes présentées. Le premier exemple est un système représentant l'amplificateur chaotique pour lequel on applique les trois techniques.

Le second modélise un système physique oscillant avec amortissement linéaire.

Dans les deux cas, un calcul d'erreur relative est présenté, à savoir

$$E_r = \frac{\|x(t) - \tilde{y}(t)\|}{\|x(t)\|} \quad (3.14)$$

où: $x(t)$ est la solution non-linéaire et $\tilde{y}(t)$ la solution linéaire optimale.

Exemple 1 *Considérons le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires de l'amplificateur chaotique cité dans [41]*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \delta y + z \\ \frac{dz}{dt} = \gamma [\alpha f(x) - z] - \sigma y \end{cases} \quad (3.15)$$

La non linéarité exprimée par $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} -0.528 \text{ si } x \leq -1.2 \\ x(1 - x^2) \text{ si } |x| < 1.2 \\ +0.528 \text{ si } x > 1.2. \end{cases} \quad (3.16)$$

On utilise l'approche de la linéarisation par morceaux, pour approcher la non linéarité $f(x)$ par une fonction linéaire par morceaux telle que représentée sur la figure(3.3)

Figure 3.3

fonction linéaire par morceaux de la fonction non linéaire $f(x)$

On va prendre $\alpha = 1.1$ et on applique la méthode de la dérivée optimale. La linéarisation de F en $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$ donne

$$A_0 = DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.2832 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Après 6 itérations, la procédure de calcul de la dérivation optimale donne ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.2887 & -1.5198 & -0.3115 \end{bmatrix}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3). \quad (3.18)$$

Les résultats obtenus sont donnés par le tableau (I), pour $\alpha = 1.1$ en utilisant les données suivantes

$$(t_0 = 0; T = 150; step = 1.10^{-1}; \varepsilon = 10^{-5}),$$

où $(Xnl(t), Ynl(t), Znl(t))$ représentent les composantes de la solution du système non linéaire (3.15). $(Xlina(t), Ylina(t), Zlina(t))$ représentent les composantes de la solution obtenue par la procédure de l'approximation optimale à l'aide d'un programme en fortran, $(Xlm(t), Ylm(t), Zlm(t))$ représentent les composantes de la solution obtenue par linéarisation par morceaux à l'aide d'un programme Matlab.

$(Xlino(t), Ylino(t), Zlino(t))$ représentent les composantes de la solution obtenue par la procédure de dérivation optimale. Le tableau (III.4), représente les valeurs de l'erreur relative où $Er1$, représente l'erreur relative entre la solution non linéaire et celle obtenue par l'approximation optimale, $Er2$ erreur relative calculée entre la solution non linéaire et la solution linéaire optimale, $Er3$ erreur relative entre la solution non linéaire (numérique) et la solution linéaire par morceaux.

Les figures (3.5), (3.6), et (3.7), représentent le graphe des composantes respectivement $(x(t), y(t), z(t))$ de la solution du système non linéaire (3.15), comparée avec son ap-

proximation au sens de l'approximation optimale. Les figures (3.8),(3.10), et (3.12) représentent le graphe des composantes respectivement $(x(t), y(t), z(t))$ de la solution du système non linéaire (3.15), comparée avec son approximation au sens de la dérivée optimale (2.39) pour des conditions initiales près de l'origine. Les figures (3.9),(3.11), et (3.13) représentent le graphe des composantes respectivement $(x(t), y(t), z(t))$ de la solution du système non linéaire (3.15), comparée avec son approximation au sens de la dérivée optimale pour des conditions initiales très près de l'origine. Les figures (3.14),(3.15), et (3-16) représentent le graphe des composantes respectivement $(x(t), y(t), z(t))$ de la solution du système non linéaire (3.15), comparée avec son approximation donnée par la linéarisation par morceaux.

Tableau (III.1)

t	Xnl(t)	Xlina(t)	Xlino(t)	Xlm(t)
0	0.1000000E+00	0.1000000E+00	0.1000000E+00	0.1000000E+00
10	1.8874430E-01	1.8826349E-01	0.1806393E+00	1.4446060E-001
40	1.5243390E-01	1.5346496E-01	0.1331380E+00	5.7614940E-002
50	1.3997100E-01	1.4102732E-01	0.1305613E+00	4.2472748E-002
60	1.2731320E-01	1.2837815E-01	0.1091726E+00	3.1633992E-002
70	1.1465240E-01	1.1570780E-01	0.9885981E-01	2.3059952E-002
80	1.0219490E-01	1.0322417E-01	0.8952116E-01	1.7115736E-002
90	9.0147740E-02	9.1136088E-02	0.8106467E-01	1.2653243E-002
100	7.8703450E-02	7.8633336E-02	0.7840701E-01	9.2808547E-003
110	6.8025200E-02	6.8884121E-02	0.6647273E-01	6.8664037E-003
120	5.8235860E-02	5.9015895E-02	0.6019348E-01	5.0457427E-003
140	4.1584040E-02	4.2196972E-02	0.4935843E-01	2.7506868E-003
150	3.4740050E-02	3.5271835E-02	0.4469585E-01	2.0379380E-003
160	2.8834680E-02	2.9290459E-02	0.4047372E-01	1.4834050E-003
170	2.3798270E-02	2.4184707E-02	0.3665043E-01	1.1003716E-003
180	1.9546390E-02	1.9870966E-002	0.3318830E-01	8.1684432E-004
190	1.5988080E-02	1.6258518E-002	0.3005322E-01	6.0146713E-004
200	1.3032250E-02	1.3256069E-002	0.2721428E-01	4.4222161E-004
250	0.4520700E-02	4.6115177E-003	0.3568930E-03	9.7236104E-005
300	0.1526507E-02	1.5576452E-003	0.5926507E-04	2.1894188E-005
350	0.5102643E-03	5.2072563E-004	0.5452475E-04	4.9027879E-006
400	0.1699826E-03	1.7347344E-004	0.1604359E-04	8.9449583E-007

Tableau (III.1): représente les valeurs de la solution $x(t)$ du système non linéaire, de l'approximation optimale, du système linéaire optimal et du système linéaire par morceaux.

Tableau (III.2)

t	Ynl(t)	Ylina(t)	Ylino(t)	Ylm(t)
0	0.2000000E+00	0.2000000E+00	0.2000000E+00	0.2000000E+00
10	-4.2844790E-03	-4.352224E-003	-.5021833E-02	-8.2967829E-003
40	-1.2307570E-03	-1.227500E-003	-.1321112E-02	-1.7567989E-003
50	-1.2590470E-03	-1.257416E-003	-.1196303E-02	-1.2940309E-003
60	-1.2692850E-03	-1.269138E-003	-.1083296E-02	-9.6120552E-004
70	-1.2594150E-03	-1.260973E-003	-.9809637E-03	-7.0022122E-004
80	-1.2286150E-03	-1.231833E-003	-.8882983E-03	-5.2671990E-004
90	-0.1176972E-02	-1.182503E-003	-.8043865E-03	-3.8621958E-004
100	-.1107770E-02	-1.114920E-003	-.7284013E-03	-2.8339821E-004
110	-.1024159E-02	-1.032704E-003	-.6595939E-03	-2.0915339E-004
120	-.9305676E-03	-9.398133E-004	-.5972863E-03	-1.5037664E-004
140	-.7321084E-03	-7.413222E-004	-.4897726E-03	-8.2837642E-005
150	-.6355357E-03	-6.443521E-004	-.4435069E-03	-6.1992921E-005
160	-.5449055E-03	-5.530947E-004	-.4016117E-03	-4.5205773E-005
170	-.4621439E-03	-4.695161E-004	-.3636740E-03	-3.4361273E-005
180	-.3882808E-03	-3.947670E-004	-.3293201E-03	-2.5783366E-005
190	-.3236114E-03	-3.292319E-004	-.2982113E-03	-1.9128301E-005
200	-.2678874E-03	-2.727014E-004	-.2700412E-03	-1.4545635E-005
250	-.9728603E-04	-9.920155E-005	-1.2502456E-03	-3.9332027E-006
300	-0.3335408E-04	-3.402938E-005	-0.3595408E-05	-6.0251655E-007
350	-0.112066E-04	-1.143581E-005	-0.1088187E-05	5.0794819E-007
400	-.3739642E-05	-3.816381E-006	-0.7316027E-05	8.6101829E-007

Tableau (III.2): représente les valeurs de la solution $y(t)$ respectivement du système non linéaire, de l'approximation optimale, du système linéaire optimal et du système linéaire par morceaux.

Tableau (III.3)

t	Znl(t)	Zlina(t)	Zlino(t)	Zlm(t)
0	0.3000000E+00	0.3000000E+00	0.300000E+00	0.3000000E+00
10	0.1853345E+00	1.8640781E-001	1.771121E-01	1.4207014E-001
40	1.6389710E-001	1.5280595E-001	1.324460E-01	5.6740506E-002
50	1.3929700E-001	1.4035484E-001	1.199347E-01	4.1825386E-002
60	1.2663580E-001	1.2770052E-001	1.086052E-01	3.1152032E-002
70	1.1398230E-001	1.1503671E-001	.9834600E-01	2.2710310E-002
80	1.0154330E-001	1.0257063E-001	.8905589E-01	1.6856534E-002
90	8.9525320E-002	9.0510964E-002	.8064335E-01	1.2458984E-002
100	7.8119520E-002	7.9045915E-002	.7302549E-01	9.1362933E-003
110	6.7487060E-002	6.8341919E-002	.7302549E-01	6.7608712E-003
120	5.7748390E-002	5.8523826E-002	.5988063E-01	4.9666339E-003
140	4.1202660E-002	4.1811196E-002	.4910189E-01	2.7104330E-003
150	3.4409770E-002	3.4937437E-002	4.446355E-02	2.0117233E-003
160	2.8552100E-002	2.9004031E-002	4.026337E-02	1.4633493E-003
170	2.3559050E-002	2.3942016E-002	3.645995E-02	1.0852751E-003
180	1.9230430E-002	1.9667268E-002	3.301581E-02	8.0457279E-004
190	1.6258519E-002	1.6088899E-002	2.989702E-02	5.9240255E-004
200	1.3256069E-002	1.3115755E-002	2.707284E-02	4.3597023E-004
250	0.4470824E-002	4.5606806E-003	0.688231E-03	9.4688101E-005
300	0.1509429E-002	1.5402214E-003	0.591332E-04	1.9481852E-005
350	0.5045288E-003	5.1487279E-004	0.610554E-04	3.8972249E-006
400	0.1680690E-003	1.7152053E-004	0.161376E-04	9.5022092E-007

Tableau (III.3): représente les valeurs de la solution $z(t)$ respectivement du système non linéaire, de l'approximation optimale, du système linéaire optimal et du système linéaire par morceaux.

Tableau (III.4)

t	Er1	Er2	Er3
0	0.000000	0.000000	0.000000
10	6.19E-003	4.26E-002	2.34E-001
40	6.78E-003	1.22E-001	6.22E-001
50	7.57E-003	1.37E-001	6.96E-001
60	8.38E-003	1.41E-001	7.51E-001
70	9.22E-003	1.35E-001	7.98E-001
80	1.00E-002	1.20E-001	8.31E-001
90	1.09E-002	9.64E-002	8.58E-001
100	1.18E-002	6.09E-002	8.80E-001
110	1.26E-002	1.87E-002	8.97E-001
120	1.34E-002	4.40E-002	9.12E-001
140	1.47E-002	1.90E-001	9.32E-001
150	1.53E-002	3.00E-001	9.40E-001
160	1.58E-002	4.17E-001	9.47E-001
170	1.62E-002	5.43E-001	9.52E-001
180	2.27E-002	7.08E-001	9.57E-001
190	1.69E-002	8.66E-001	9.61E-001
200	1.71E-002	8.99E-001	9.64E-001
250	2.00E-002	9.03E-001	9.77E-001
300	2.03E-002	8.83E-001	9.85E-001
350	2.05E-002	8.91E-001	9.90E-001
400	2.06E-002	9.04E-001	9.99E-001

Figure 3.4
représente l'évolution de l'erreur relative Er1,
Er2,Er3 en fonction du temps

Tableau (III.4): représente la valeur des erreurs relatives Er1,Er2,Er3 respectivement de l'approximation optimale, du système linéaire optimal et du système linéaire par morceaux, calculée par rapport à la solution non linéaire.

Figure 3.5: la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps
pour les conditions initiales $X_0 = (0.1, 0.2, 0.3)$

Figure 3.6: la variation de la solution $y(t)$ en fonction du temps
pour les conditions initiales $X_0 = (0.1, 0.2, 0.3)$

Figure 3.7: la variation de la solution $z(t)$ en fonction du temps
pour les conditions initiales $X_0 = (0.1, 0.2, 0.3)$

Figure 3.8: la variation de la solution $x(t)$
en fonction du temps pour les conditions initiales près de l'origine
 $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$

Figure 3.9: la variation de la solution $x(t)$
en fonction du temps pour les conditions initiales très près de l'origine
 $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

Figure 3.10

la variation de la solution $y(t)$ en fonction
du temps pour les conditions initiales

$$X(0) = (0.1, 0.2, 0.3)$$

Figure 3.11

la variation de la solution $y(t)$ en fonction
du temps pour les conditions initiales

$$X(0) = (0.01, 0.02, 0.03)$$

Figure 3.12

la variation de la solution $z(t)$ en fonction
du temps pour les conditions initiales

$$X(0) = (0.1, 0.2, 0.3)$$

Figure 3.13

la variation de la solution $z(t)$ en fonction
du temps pour les conditions initiales

$$X(0) = (0.01, 0.02, 0.03)$$

Figure 3.14: la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps
pour les conditions initiales $X0 = (0.1, 0.2, 0.3)$

Figure 3.15: la variation de la solution $y(t)$ en fonction du temps
pour les conditions initiales $X0 = (0.1, 0.2, 0.3)$

Figure 3.16: la variation de la solution $z(t)$ en fonction du temps
pour les conditions initiales $X0 = (0.1, 0.2, 0.3)$

3.4 Commentaires

En faisant une comparaison entre les erreurs relatives Er_1 , Er_2 , Er_3 (voir tableau (III.4)), par le biais d'une représentation graphique de l'erreur relative en fonction du temps, on remarque que la précision au sens de l'erreur relative de l'approximation optimale par rapport à la dérivation optimale et la linéarisation par morceaux est nettement meilleure. Ceci peut être traduit par le fait que l'approximation optimale est une approximation locale dans le sens où on calcule une approximation de la solution à chaque pas en remplaçant le système non-linéaire par la dérivée optimale, qui est une approche globale, qui peut être améliorée par un choix judicieux des conditions initiale très près de l'origine comme le montrent clairement les figures (3.9), (3.11), et (3.13), et la comparaison entre les courbes d'erreur relative notées respectivement sur la figure(3.4), courbe (1) pour des conditions près de l'origine et courbe (2) pour des conditions très près de l'origine. Tandis que la linéarisation par morceaux est une approximation grossière dépendant du nombre de segments approximatifs de la fonction non linéaire.

Exemple 2 considérons le système d'équations différentielles ordinaires modélisant un système oscillatoire avec amortissement linéaire, avec un rappel fonction de la vitesse \dot{x} [14].

$$\ddot{x} + 0.5 \dot{x} + (\dot{x})^3 = 0, \quad (3.19)$$

nous écrivons les équations du système (3.19) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 0.5 y - y^3. \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$, les résultats obtenus en appliquant les méthodes présentées sont donnés dans le tableau (V) et (VI), en utilisant les données suivantes: $(t_0 = 0; T = 50; step = 1.10^{-1}; \varepsilon = 10^{-5})$ où: $(Xnl(t), Ynl(t))$ représentent les composantes de la solution du système non-linéaire, $(Xlina(t), Ylina(t))$ les composantes de la solution obtenue par la procédure de l'approximation optimale et $(Xlm(t), Ylm(t))$ les composantes de la solution obtenue par linéarisation par morceaux. Dans le tableau (VII), nous donnons pour la comparaison: l'erreur relative $Er11$ entre la solution non-linéaire supposée exacte (solution numérique) et la solution obtenue par l'approximation optimale. $Er22$ l'erreur relative, entre la solution non-linéaire, et la solution du système linéaire par morceaux.

Sur les figures (3-18) et (3-19) la courbe (1) représente la solution du système linéaire par morceaux, la courbe (2) représente la solution donnée par l'approximation optimale et la courbe (3) représente la solution non-linéaire (3.20).

Tableau (III.5)

t	Xnl(t)	Xlina(t)	Xlm(t)
0	0.0000000E+00	0.000000E+00	0.0000000E+00
1	.6606793E-01	6.566777E-002	5.512792E-002
5	-.2915375E-01	-2.877496E-002	-9.052019E-003
6	-.1044950E-01	-1.030298E-002	-4.864121E-003
7	.8452390E-02	8.340783E-003	-5.792108E-004
8	.1379808E-01	1.360601E-002	1.5103066E-003
9	.7054219E-02	6.951966E-003	1.3140787E-003
10	-.2141375E-02	-2.114335E-003	4.7915740E-004
11	-.6168994E-02	-6.082599E-003	-1.3066468E-004
12	-.4147160E-02	-4.087153E-003	-2.7902493E-004
13	.8070657E-04	8.140352E-005	-1.5742611E-004
14	.2586743E-02	2.551003E-003	-1.5412950E-005
15	.2234649E-02	2.053638E-003	4.1048302E-005
16	.4037443E-03	3.970961E-004	3.9558819E-005
17	-.9990303E-03	-9.854099E-004	2.1806434E-005
18	-.1127372E-02	-1.110739E-003	-1.1592931E-006
19	-.3897115E-03	-3.828393E-004	-8.3351611E-006
20	.3400207E-03	3.357423E-004	-6.1456140E-006

Tableau (III.5): représente les valeurs de la solution $x(t)$ respectivement du système non linéaire, de l'approximation optimale et du système linéaire par morceaux.

Tableau (III.6)

t	Ynl(t)	Ylina(t)	Ylm(t)
0	0.1000000E+00	0.100000E+00	0.1000000E+00
1	0.2738499E-01	2.699873E-002	-0.2827197E-01
5	0.1094218E-01	1.082017E-002	0.5273830E-02
6	0.2233195E-01	2.203813E-002	0.5273830E-02
7	0.1307835E-01	1.289215E-002	0.7656078E-03
8	-0.1995533E-02	-1.973407E-003	-0.7892561E-03
9	-0.9693938E-02	-9.559980E-003	-0.8291756E-03
10	-0.7347276E-02	-7.241865E-003	-0.3688999E-03
11	-0.6067152E-03	-5.955791E-004	0.5596121E-04
12	0.3920910E-02	3.866708E-003	0.1576832E-03
13	0.3829401E-02	3.774800E-003	0.1030200E-03
14	0.1002385E-02	9.868647E-004	0.3291164E-04
15	-0.1437856E-02	-1.418441E-003	-0.2311575E-04
16	-0.1877366E-02	-1.850727E-003	-0.2676720E-04
17	-0.7852072E-03	-7.734238E-004	-0.1406457E-04
18	0.4453595E-03	4.397826E-004	.559670260E-07
19	0.8702023E-03	8.573308E-004	.424427280E-05
20	0.4985794E-03	4.900794E-004	.286699990E-05

Tableau (III.6): représente les valeurs de la solution $y(t)$ respectivement du système non linéaire, de l'approximation optimale et du système linéaire par morceaux.

Tableau (III.7)

t	Er11	Er22
0	0.00E+0	0.00E+0
1	7.77E-03	2.68E-01
5	1.27E-02	6.97E-01
6	1.33E-02	7.28E-01
7	1.39E-02	8.68E-01
8	1.38E-02	9.12E-01
9	1.40E-02	8.84E-01
10	1.41E-02	9.25E-01
11	1.42E-02	9.79E-01
12	1.40E-02	9.58E-01
13	6.85E-02	9.62E-01
14	1.42E-02	9.94E-01
15	1.41E-02	9.93E-01
16	1.44E-02	9.84E-01
17	1.53E-02	1.00E+00
18	1.44E-002	1.00E+00
19	1.53E-002	9.96E-01
20	1.57E-002	1.00E+00

Figure3.17
représente l'évolution de l'erreur relative Er11, Er22
en fonction du temps

Tableau (III.7): représente la valeur des erreurs relatives Er11, Er22 calculée par rapport à la solution non linéaire respectivement de l'approximation optimale et du système linéaire par morceaux.

Figure 3.18: la variation de la solution $x(t)$
en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$

Figure 3.19: la variation de la solution $y(t)$
en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$

3.5 Commentaires

Afin de tester l'efficacité de l'approximation optimale, nous avons fait une comparaison par un calcul d'erreur relative (voir tableau (III.7)) d'abord par rapport à la solution exacte, ensuite par rapport à la solution du système linéaire par morceaux. Il apparaît sur les courbes des figures (3-18) et (3-19) une parfaite conformité entre la courbe(2) représentant la solution non-linéaire et la courbe(3) de la solution donnée par l'approximation optimale. On constate que le comportement ainsi que la dynamique du modèle physique donné par (2.35) est bien respectée. Ceci peut être traduit par l'erreur relative $Er11$ qui reste petit de l'ordre ($t = 20s$, $Er11 = 0.15 \cdot 10^{-1}$), comme le montre la figure (3.17) représentant l'évolution de l'erreur relative en fonction du temps, ceci due est essentiellement à ce que cette approximation est locale, dans chaque subdivision formant l'intervalle $[0, T]$.

Tandis qu'il existe une différence qualitative perceptible sur les figures (3-18) , (3-19), entre la courbe(1) et la courbe(3) (solution linéaire par morceaux). Ceci est confirmé par la figure(3.17) représentant l'évolution de l'erreur relative en fonction du temps, et qui montre que le calcul de l'erreur relative $Er22$, qui augmente avec l'écart qualitative entre les deux solutions (à $t = 5s$, $Er22 = 0.12E - 01$), (à $t = 10s$, $Er22 = 0.92$), les figures(3-18), (3-19) donnent l'impression que pour un temps grand la solution non linéaire est son approximation par linéarisation par morceaux sont identiques.

Ce qui n'est pas le cas, l'écart est remarquable en se plaçant à des échelles du même ordre de grandeur des solutions (voir agrandissement dans les figures(3-18), (3-19)). Par exemple à $t \in [40, 50]$, l'ordre de grandeur de la solution est 10^{-6} près, on remarque que l'approximation optimale décrit bien le comportement du système non linéaire, tandis qu'il existe un écart important par rapport à la linéarisation par morceaux. Ceci traduit l'erreur relative qui reste de l'ordre de 100 %, ($t = 20s$, $Er22 = 1.00$), comme le montre la figure(3.17).

On constate que l'approximation optimale est meilleure, au sens de l'erreur relative, ceci est due essentiellement au fait que cette approche est basée sur une approximation locale

du système non-linéaire sur chaque subdivision de l'intervalle considéré. Cet avantage montre l'efficacité de cette approche, et la possibilité d'être un outil appréciable pour associer aux systèmes non-linéaires des systèmes linéaires adéquats. L'approche donnée par linéarisation par morceaux reste une approximation grossière, avec comme inconvénient les problèmes de discontinuité aux frontières des domaines.

QUATRIEME CHAPITRE

ETUDE DE LA STABILITE

D'UNE E.D.O NON LINEAIRE

- CAS D'UN CENTRE -

Chapitre 4

Etude de la Stabilité d'une E.D.O non linéaire - cas d'un centre -

4.1 Introduction

Les propos de ce chapitre sont consacrés à l'utilisation de la méthode de la linéarisation optimale généralisée, [43], en particulier, à l'étude de la stabilité d'une équation différentielle ordinaire non linéaire, dont la linéarisation classique obtenue par dérivation au sens de Fréchet, présente un centre, c'est-à-dire, des valeurs propres imaginaires. La question qui se pose est de savoir si les orbites nées dans un voisinage suffisamment petit d'un point d'équilibre resteront à proximité de ce point et si les courbes intégrales du champ de vecteurs d'un système non linéaire ressemblent toujours à celles du système linéaire qui lui associé [11].

En premier lieu, nous l'appliquons à un exemple de la forme [32], [30]

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), x(0) = x_0 \quad (4.1)$$

où M est une matrice dont les valeurs propres sont égales à $\pm i$.

$F = (f_1, f_2)$ est une fonction définie sur un certain ouvert Ω de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$, avec

les hypothèses suivantes:

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re}z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe.

H3) F est localement Lipschitzienne.

Cette application est destinée à montrer les possibilités que peut offrir cette méthode, pour l'étude de la stabilité d'une équation différentielle non linéaire.

en second lieu, nous développons une étude justifiant cette application. Une représentation des champs de vecteurs au voisinage du point d'équilibre du système non linéaire et du système linéaire qui lui a associé sera présentée.

4.1.1 Méthode de généralisation de linéarisation optimale

Dans la généralisation de la linéarisation optimale développée dans la référence [43], Benouaz et al. ont cerné les inconvénients liés à l'utilisation de cette méthode en insistant en particulier:

1. Si $DF(0)$ n'existe pas: Cas où la fonction non linéaire, définissant l'équation comporte des fonctions de type valeur absolue ($|\cdot|$), et donc non différentiable en 0.
2. Si $DF(0) = 0$.
3. Si $DF(0)$ est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

Ce qui a permis de mettre en valeur certains aspects théoriques de cette linéarisation et par conséquent une bonne utilisation.

Rappelons toutefois la procédure suivie pour obtenir la matrice définissant la linéarisation optimale.

Procédure de calcul

La procédure de calcul se fait en deux étapes. La matrice initiale est la matrice Jacobienne de F en x_0 qui, en principe, est un point arbitraire pris dans un voisinage de 0 et tel que

F soit différentiable en x_0 .

Considérons le système (4.2)

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), x(0) = x_0. \quad (4.2)$$

Première étape:

Calcul de $A_0 = DF(x_0)$

Deuxième étape:

Pour calculer A^* à partir de A_0 , on doit d'abord résoudre

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), y(0) = x_0. \quad (4.3)$$

On notera la solution $y_0(t)$ du système (4.3) s'écrit

$$y_0(t) = e^{A_0 t} x_0. \quad (4.4)$$

La minimisation de la fonctionnelle au sens des moindres carrées

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_0(t)) - A y_0(t)\|^2 dt \quad (4.5)$$

nous conduit à A^*

$$A^* = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_0 t} x_0)] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_0 t} x_0] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right]^{-1}. \quad (4.6)$$

En introduisant la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_0 t} x_0] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right], \quad (4.7)$$

la matrice linéaire optimale A^* s'écrit

$$A^* = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_0 t} x_0)] [e^{A_0 t} x_0]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}. \quad (4.8)$$

Où A^* est définie et unique à condition que Γ soit inversible.

A^* est par définition la linéarisation optimale de l'application non linéaire F en x_0 .

4.2 Application

Dans cet exemple, nous considérons le cas où

$$\begin{cases} G(X) = a\Phi(\|X\|)X, & X = (x, y) \\ \text{avec } \Phi(\|X\|) = o(\|X\|^2) \\ a = \pm 1. \end{cases}, \quad (4.9)$$

La fonction non linéaire définissant l'équation différentielle s'écrit donc

$$F(X) = M \cdot X + a [o(\|X\|^2)] X, \quad (4.10)$$

et le système obtenu s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + ay(x^2 + y^2). \end{cases}. \quad (4.11)$$

Dans ce cas, l'étude la stabilité du point d'équilibre pose un problème; en effet la linéarisation classique ne permet pas de conclure car le système possède des valeurs propres purement imaginaires.

1^{er} Cas : $a = -1$, le système (4.11) s'écrit, avec $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0.1) \quad (4.12)$$

la linéarisation classique de F au point d'équilibre $(0, 0)$ donne

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

dont les valeurs propres sont: $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Avec $DF(x_0, y_0)$, calculée en $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$,

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -10^{-2} & 1 \\ -1 & -3.10^{-2} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

le calcul de la linéarisée optimale donne

$$A^* = \begin{bmatrix} -5.0822.10^{-3} & 1 \\ -1 & -5.0942.10^{-3} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

ou encore

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5.0822.10^{-3} & 0 \\ 0 & -5.0942.10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$A^* = M + r(x_0),$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1^* = -5.0882.10^{-3} + i \\ \lambda_2^* = -5.0882.10^{-3} - i. \end{cases} \quad (4.17)$$

$\text{Re}(\lambda_1^*) < 0$ et $\text{Re}(\lambda_2^*) < 0$. La linéarisée optimale est asymptotiquement stable et fait apparaître l'origine comme un foyer. Alors, l'origine est asymptotiquement stable. Pour

le vérifier sur l'équation non linéaire, prenons comme fonction de Liapounov

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2 \text{ qui est positive (définie positive)}. \quad (4.18)$$

Calculer la dérivée de cette fonction le long de la trajectoire, équivaut à prendre la dérivée $\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt}$, soit

$$\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 . \quad (4.19)$$

En remplaçant \dot{x}_1 et \dot{x}_2 par les équations du système de départ (4.12), on obtient

$$\dot{V}(X) = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0. \quad (4.20)$$

$\dot{V}(X)$ est donc définie négative; d'autre part, $V(X)$ est décroissante; ($|X| \rightarrow 0, V(X) \rightarrow 0$) et radialement illimitée car $|X| \rightarrow \infty \rightarrow V(X) \rightarrow \infty$, l'équilibre est donc asymptotiquement stable globalement.

Les figures (4.1), (4.2), et (4.3) montrent respectivement la représentation des champs de vecteurs du système linéaire classique, du système linéaire (4.15) et du système non linéaire (4.12). On voit bien que la linéarisation classique présente un centre. Le champ de vecteurs du système non linéaire et celui du système linéaire optimale sont identiques et conduisent à la même conclusion, en faisant apparaître l'origine comme un foyer, l'origine étant donc asymptotiquement stable.

Figure 4.1: représente le champ de vecteurs du système linéaire classique

Figure 4-2 : représente le champ de vecteurs du système linéaire optimale

Figure 4.3 : représente le champ de vecteurs du système non linéaire

2^{ème} Cas: $a = 1$, le système (4.11) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases}, (0, 0.1) \quad (4.21)$$

Dans ce cas, on savait au départ, l'existence du problème posé par la convergence de l'intégrale définie par

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (4.22)$$

Dans le cas présent de dimension 2, on calcule l'intégrale entre 0 et $-\infty$, c'est à dire

$$G(A) = \int_0^{-\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (4.23)$$

La procédure de linéarisation optimale donne le résultat suivant

$$A^* = \begin{bmatrix} 5.08221 \cdot 10^{-3} & 1 \\ -1 & 5.094196 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.0822 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 5.09416 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$A^* = M + r(x_0),$$

et dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1^* = 5.088205 \cdot 10^{-3} + i \\ \lambda_2^* = 5.088205 \cdot 10^{-3} - i \end{cases} \quad (4.26)$$

$\text{Re}(\lambda_1^*) > 0$ et $\text{Re}(\lambda_2^*) > 0$. La linéarisation optimale est instable en faisant apparaître l'origine comme un foyer. L'origine alors est asymptotiquement instable.

Les figures (4.4) et (4.5) montrent respectivement la représentation des champs de vecteurs du système linéaire(4.24) et du système non linéaire (4.21)

Figure 4.4

représente le champ de vecteurs du système linéaire optimale

Figure 4.5

représente le champ de vecteurs du système non linéaire

4.3 Idée du problème

Dans les deux exemples que nous venons de voir, il y a lieu de noter que le système non linéaire s'écrit après application de la linéarisation optimale généralisée comme suit

$$\begin{cases} A^* = M + r(X_0) \\ X_0 = X(0) \end{cases} \quad (4.27)$$

ou encore

$$A^* = DF(0) + r(X_0),$$

avec

$$r(X_0) = \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA} X_0) [e^{tA} X_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{tA} X_0] [e^{tA} X_0]^T dt \right]^{-1}. \quad (4.28)$$

Le premier terme étant linéaire, le deuxième terme, qui est en fait la linéarisation optimale de la fonction non linéaire $G(X)$, devient dépendant de la donnée initiale X_0 .

Tout se passe comme si on avait perturbé $DF(0)$, en écrivant la matrice optimale de la forme

$$A^* = DF(0) + o(\|X_0\|). \quad (4.29)$$

Dans ce qui suit, nous donnerons la signification de $o(\|X_0\|)$ et son influence sur l'étude de la stabilité du système (4.1).

4.4 Etude de la trace de la matrice A^*

On fixe $X_0 \neq 0$ et on définit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $\varphi : A \longrightarrow \varphi(A)$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \left[\int_0^{+\infty} F(e^{tA} X_0) [e^{tA} X_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1} \\ &= M + \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA} X_0) [e^{tA} X_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

On pose

$$r(A) = \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA} X_0) [e^{tA} X_0]^T dt \right] [\Gamma(A)]^{-1} \quad (4.31)$$

avec

$$\Gamma(A) = \int_0^{+\infty} [e^{tA} X_0] [e^{tA} X_0]^T dt. \quad (4.32)$$

Maintenant, on construit $A^* = \varphi(A_0)$, avec

$$A^* = \varphi(A_0) = M + r(A_0) \quad (4.33)$$

La matrice initiale A_0 étant $A_0 = DF(X_0)$, on suppose que G à été choisi tel que $\sigma(A_0)$ soit très proche de celui de M . On choisit x_0 voisin de 0 pour que $r(A_0)$ soit très petit dans un voisinage de x_0 . $e^{tA_0} x_0$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, et $\Gamma(A_0)$ est définie positive.

Le calcul de la trace de A^* donne

$$tr(A^*) = tr \left(M + \left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA_0} X_0) (e^{tA_0} X_0)^T dt \right] [\Gamma(A_0)]^{-1} \right) \quad (4.34)$$

$$= tr(M) + tr \left(\left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA_0} X_0) (e^{tA_0} X_0)^T dt \right] [\Gamma(A_0)]^{-1} \right), \quad (4.35)$$

or $tr(M) = 0$, il s'ensuit que

$$tr(A^*) = tr \left(\left[\int_0^{+\infty} G(e^{tA_0} X_0) (e^{tA_0} X_0)^T dt \right] [\Gamma(A_0)]^{-1} \right). \quad (4.36)$$

En vertu de la propriété $tr(AB) = tr(BA)$, il vient

$$\begin{aligned} tr(A^*) &= \int_0^{+\infty} tr \left([\Gamma(A_0)]^{-1} \left[G(e^{tA_0} X_0) (e^{tA_0} X_0)^T \right] \right) dt. \\ &= \int_0^{+\infty} tr \left(([\Gamma(A_0)]^{-1} G(e^{tA_0} X_0)) (e^{tA_0} X_0)^T \right) dt. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Sachant que $([\Gamma(A_0)]^{-1} G(e^{tA_0} x_0)) = C$ est un vecteur colonne et $((e^{tA_0} x_0)^T) = L$ est un vecteur ligne, et en tenant compte de $tr(CL) = tr(LC) = LC$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} tr(A^*) &= \int_0^{+\infty} (e^{tA_0} X_0)^T [\Gamma(A_0)]^{-1} G(e^{tA_0} X_0) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{tA_0} X_0)^T [\Gamma(A_0)]^{-1} (a\Phi(\|e^{tA_0} X_0\|) (e^{tA_0} X_0)) dt \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$= a \int_0^{+\infty} \Phi(\|e^{tA_0} X_0\|) (e^{tA_0} X_0)^T [\Gamma(A_0)]^{-1} (e^{tA_0} X_0) dt. \quad (4.39)$$

Les termes à l'intérieur de l'intégrale étant positifs, $tr(A^*)$ dépend alors du signe de a , et par conséquent on a

$$\text{sgn}(\text{trace}(A^*)) = \text{sgn}(a), \quad (4.40)$$

le signe de la trace est donc lié à celui de la perturbation $G(X)$.

De plus, par un calcul déjà fait par Benouaz et Arino [35], on a

$$\begin{aligned} \text{trace}(r(A^*)) &\leq aC [O(\|X_0\|)] \\ &\leq a [O(\|X_0\|)]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ceci montre l'influence des conditions initiales sur l'étude de la stabilité de l'équilibre envisagé.

Ce résultat est important dans le sens où il suggère qu'il est possible de retrouver un résultat de stabilité (cas d'un centre) en étudiant la trace de la matrice optimale. De plus dans les exemples présentés les courbes intégrales du système non linéaire et du système optimal étudiés dans la section (4.2) ont la même allure.

4.5 Conclusion

A la lumière de cette étude, nous avons voulu montrer les possibilités offertes par cette méthode, quant à l'étude de la stabilité d'une équation différentielle ordinaire non linéaire présentant un centre si on utilise la linéarisation classique. De plus, c'est une étude de

longue haleine à laquelle on essaie d'associer des mathématiciens qui pourraient consolider la technique numérique par la théorie. Ce thème fait l'objet d'un projet de recherche en cours, intitulé " Relation entre la stabilité asymptotique et la dérivée optimale".

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous avons présenté une contribution à l'étude de la stabilité de certains modèles physiques en utilisant une nouvelle procédure d'approximation d'une E.D.O non linéaire, définie comme la "dérivée optimale".

Les principaux résultats de notre travail sont les suivants

1- L'application de la technique proposée à un modèle physique présentant le phénomène propre à la bifurcation, par un choix judicieux des conditions initiales.

2- Une analyse théorique par la méthode de linéarisation classique (dérivée au sens de Fréchet), d'un autre modèle physique présentant le phénomène de bifurcation, comparée à une analyse numérique, par la procédure de dérivation optimale. L'application numérique de la technique proposée nous a donné des résultats satisfaisants pour la détection numérique des surfaces de bifurcation prouvées par l'analyse théorique. Ce qui nous a permis de montrer: l'apport important de cette méthode surtout sur le plan numérique.

3- On a présenté une comparaison entre trois méthodes de linéarisation (locale, par morceaux, globale).

4- l'application de la méthode de linéarisation optimale généralisée dans l'étude de la stabilité d'une E.D.O non linéaire présentant un centre (valeurs propres purement imaginaires) par la linéarisation classique.

Enfin, le travail entrepris dans le cadre de cette thèse a ouvert une direction de recherche qui mérite à notre avis, d'être approfondie, en particulier:

1) Généralisation de l'application de méthode de dérivation optimale aux problèmes de bifurcation, illustrée par une confrontation aux méthodes avancées dans l'étude de

la bifurcation dans les systèmes dynamiques (méthodes de réduction des systèmes dynamiques: ” variété centre et la forme normale ”, la méthode des petites perturbations,.....).

- 2) La généralisation de l'utilisation de cette technique, pour l'analyse de la stabilité d'un grand nombre de modèles dans différents champ de la science (physique, biologie, mécanique,.... etc.).

Bibliographie

- [1] **E. A. Coddington and N. Levinson**, (1955), *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill.
- [2] **J. Cuningham**, (1958), *Introduction to Non-linear Analysis*, Mc-Graw.Hill, New-York.
- [3] **W. Ralston & Wilf**, (1960), *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, New York, pp.110-120 .
- [4] **R. E. Kalman, E. J. E. Bertran**, (1960), *Control System Analysis and Design via Second Method of Liapunov*, journal of basic engeneering,371-393.
- [5] **J. Hale**, (1969), *Ordinary Differential Equations*, Springer Verlag.
- [6] **H. Leipholtz** (1970), *Stability Theory*. Academic Press New York and London.
- [7] **A. Fossard**, (1972), *Commande des Systèmes Multidimensionnels*, Dunod.
- [8] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations Différentielles Ordinaires, Tome I, Théorie Générale*, Masson et C^{ie}.
- [9] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations Différentielles Ordinaires, Tome II, Stabilité et Solutions Périodiques*, Masson et C^{ie}.
- [10] **B. Vujanovic**, (1973), *Application of the Optimal Linearization Method to the Heat Transfer problem*, International, Int. Heat. Mass Transfer, Vol.16, pp. 1111-1117.

- [11] **V. Arnold**, (1974), *Equations Différentielles Ordinaires*, Editions Mir. Moscou.
- [12] **L. Pontriaguine**: (1975) *Equation Différentielles Ordinaires*, Collection Mir, Moscou.
- [13] **B. Vujanovic, B. Baclic**, (1975), *Application of Gauss Principale of Least Constraint to the Non-linear Heat Transfer Problem*, Int. Heat. Mass Transfer, vol.13, pp. 721-730. Pergamon Press, Oxford.
- [14] **J. Ch. Gill; P. Decaulne; M. Pelegrin**, (1975), *Système Asservis Non linéaires*, Tome 3 (Méthodes topologiques, stabilité), Dunod Automatique.
- [15] **H. Reinhart** (1982), *Equations Différentielles, Fondements et Applications*. Gauthier-Villars.
- [16] **P.J.Holmes, F.C.Moon** (1983), *Strange Attractors and Chaos in Nonlinear Mechanics*. Trans. ASME J. Appl. Mech. Vol. 50, 1021-1032.
- [17] **E. Freire, L.G. Franquelo, and j. Aracil**, (1984), *Periodicity and Chaos in an Autonomous Electronic System*, IEEE Transaction on Circuit and Systems, Vol. Cas-31, N^o 3, pp237-247.
- [18] **M. Hasler; J. Neiryneck**, (1985), *Circuits Non linéaires*, Presse Polytechniques Romandes.
- [19] **A. Jordan et al**, (1986), *Transient State Temperature Distribution in a Cylindrical Electrical Conductor: Non linear Effects*, Revue de Physique Appliquée, 21.
- [20] **A. Z. Bensenane**, (1986), *Linéarisation Optimale des Equations d'Etat Non linéaires*, Thèse de Magister, Tlemcen.
- [21] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal Linearization Method Applied to the Resolution of State Equation*, RAIRO-APII, 21, pp. 175-185.

- [22] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal Linearization of Non-linear State Equation*, RAIRO-APII, 21, pp. 263-271.
- [23] **Wiggins S. and Holmes P. J.** (1987). *Periodic Orbits in Slowly Varying Oscillators*. *SIAM J. Math. Anal.* Vol N^o 18, pp 542-611.
- [24] **M.Sibony et J.Cl. Mardon**, (1988), *Analyse numérique II, Aproximations et Equations Différentielles*, Hermann, Editeur des Sciences et Arts.
- [25] **S.Wiggins** (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer verlag.
- [26] **F. Verhulst**, (1990), *Non linear Differential Equation and Dynamical Systems*, Springer verlag.
- [27] **Jack K. Hale, Hüseyin. Koçak**, (1991), *Dynamics and Bifurcations*, Springer verlag.
- [28] **J. P. Demailly**, (1991), *Analyse Numérique et Equations Différentielles*. Presses universitaires de Grenoble.
- [29] **A.J. Fossard et D. Normad-Cyrot**, (1993), *Systèmes Non linéaires*, Tome 2 (stabilité-stabilisation), Masson.
- [30] **T. Benouaz et O. Arino**, (1994), *Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-linéaire*, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [31] **N.F. Rulkov; L.S. Tsimring; H. D. I. Abarbanel**, (1994), *Tracking Unstable Orbits in Chaos using dissipative feedback control*, Physical review E, Vol. 50, N^o1.
- [32] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995), *Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation*. *Computational Procedure*, Appl. Math. and Comp Sci., N^o 1, Vol. 5, pp 33-48.

- [33] **T. Benouaz**, (13-17 August 1995), *Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation: The Scalar Case*, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp.19-22 , Plovdiv, Bulgaria.
- [34] **Steven, H.Strogatz**, (1995), *Nonlinear Dynamics and Chaos whith Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [35] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995) *Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique*, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N₀.95/10.
- [36] **T. Benouaz**, (16-20 June1995), *Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by an Optimal Procedure*, Proceeding of the 2nd International Conference on Differential Equations in Marrakech, Maroc.
- [37] **T. Benouaz and O. Arino**, (1996), *Least Square Approximation of a Non-linear Ordinary Differential Equation*, Computers Math. Applic., Vol. 31, N^o 8, pp 69-84.
- [38] **T. Benouaz**, (3-5 December 1996), *Lyapounov Function Generated by Least Square Approximation*, Deuxième conférence Maghrébine sur l'Automatique Vol.1 pp.73-75, Tlemcen.
- [39] **T. Benouaz**, (1996), *Contribution a l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non linéaire*, Thèse de Doctorat, Tlemcen.
- [40] **J. P. Corrion**, (1996), *Commande des Procédés*, Technique et Documentation (Londres- Paris-New York).
- [41] **S. Lazzouni**, Analyse des Aspects Qualitatifs de Certaines Classes de Circuits Electroniques non linéaires, *Thèse de magistère, Tlemcen(1998)*.
- [42] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998), *Optimal Approximation of the Initial Value Problem*, Computers Math. Applic. , Vol. 36, N^o1, pp. 21-32.

- [43] **T. Benouaz, F. Bendahmane, A. Chikhaoui**, (1999), *Generalisation of the Optimal Linearization of Nonlinear Ordinary Differential Equation*, Submitted for publication in Mathematics and Computer in Simulation Journal.
- [44] **T. Benouaz**, (August 1999), *Optimal Derivative of a Nonlinear Ordinary Differential Equation*, to appear in the Proceeding of the Equadiff 99, Berlin, Germany.