

Introduction Générale

Introduction Générale

0.1 Note historique

Le 19ème siècle avait accru l'intérêt pour l'étude des mathématiques et de l'écologie puisque l'écologie avait produit des modèles mathématiques plus intéressants. L'écologie étudie des conditions d'existence et de l'interaction de la matière organique avec l'un de l'autre et avec leur environnement.

D'une manière générale les modèles mathématiques constituent des outils de compréhension du fonctionnement du systèmes naturelles, et de prédiction de leurs évolutions. On ne devra jamais perdre de vue le caractère explicatif et le pouvoir prédictif du modèle étudié.

Le terme "écologie" a été inventé la première fois par l'écologiste allemand E. Haeckel en 1866 pour dénoter la relation de l'animal à son organisme et à son environnement inorganique. "Eco" vient des oikos grecs, signifiant la maison, ou l'endroit à vivre".

Les systèmes écologiques sont extrêmement complexes, les niveaux de l'organisation écologique sont :

- Un individuel, organisation simple.
- Populations, un groupe d'individus d'un genre d'organisation (espèce).
- la communauté, une collection de toutes les populations dans un secteur donné.
- Ecosystème, une union d'une communauté écologique et l'environnement dans lesquels il vit.

L'écologie est une science multidisciplinaire. Elle implique la physiologie, la génétique,

la géologie, la sociologie, l'anthropologie, les mathématiques, la physique, la chimie, l'électronique, la médecine, etc... Selon le secteur et la méthode de recherches, il produit beaucoup de branches telles que la phyto-écologie, l'écologie animale, l'écologie de population, l'écologie comportementale, l'écologie physiologique, l'écologie de la communauté, la génétique écologique et l'écologie des systèmes.

Par conséquent l'écologie mathématique est devenue une science relativement indépendante. L'écologie produit des problèmes intéressants, les mathématiques fournissent des modèles et des manières de les comprendre, et l'écologie retourne pour examiner les modèles mathématiques. La fonction de l'écologie mathématique est d'exploiter le rapport normal entre l'écologie et les mathématiques.

L'écologie de population, qui étudie la croissance de population, des relations de mortalité, de concurrence et de prédateur-proie est peut-être le domaine le plus mathématiquement développé de l'écologie. Beaucoup de recherche a été faite aux modèles sophistiqués en écologie de population, par exemple, aux modèles dans le temps discret et continu (Freedman [27], 1980), avec et sans retards (Cushing [17], 1974), avec les modèles stochastiques (Lud-perruque [69], 1974), avec les effets des environnements dans l'espace non-uniformes (Levin [52], 1976) et avec la diffusion des populations (Okubo [76], 1980).

Le rapport du dynamique entre les prédateurs et le proie a longtemps été et continuera à être un terme dominante aussi bien en écologie et écologie mathématique du a son existence et importance universelle (Brryman 1992). Ces problèmes peuvent être simples mathématiquement à première vue, ils sont en fait, souvent très provocant et compliqué. Bien que la théorie de proie-prédateur a vue beaucoup de progrès en quarante derniers années, plusieurs problèmes mathématiques et écologiques demeurent long restent ouverts, un progrès d'étape importante dans l'étude des interactions de prédateurs proie était découverte bien maintenant la " paradoxe " connu de l'enrichissement par Hairston et autres (1960) et par Rosenzweig (1969), déclare cela selon la théorie de Lotka-Voltéra de type proie-prédateur.

Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra est le modèle le plus simple de relation de type prédateur-proie entre deux espèces. Volterra introduisit ce modèle en 1926 pour expliquer l'évolution périodique de deux espèces de poisson de la mer Adriatique, des équations de la même forme furent introduites en 1922 par Lotka en cinétique chimique. Les modèles proie-prédateur ont été étudiés mathématiquement depuis la publication des équations de Lotka-Volterra. Les principes de ce modèle, conservation de la masse et des compositions des taux de changement processus de naissance et de mort, sont restés valides jusqu'à aujourd'hui et beaucoup d'écologistes théoriques adhèrent à ces principes. Les modifications ont été limitées à remplacer la fonction de croissance malthusian, la consommation de prédateur par capita de proie ou la mortalité prédatrice par des fonction plus complexe telles que la croissance logistique, Holling type I, II, III des réponse fonctionnelles ou des taux de densité dépendant de mortalité.

Toutes les réponses fonctionnelles mentionnées dépendent seulement de l'abondance de proie N , mais bientôt il est apparu clairement que l'abondance de prédateur P peut influencer cette fonction (Cockburn 1968, Hassell et Varley 1969; Salez 1974) par interférence directe tout en cherchant ou par pseudo interférence (dans le sens de Free et autres 1977) et les modèles ont été développés incorporation de cet effet (Hassell et Varley 1969, de Anglis et autre 1975; Beddington 1975).

Cependant, ces modèles exigent habituellement plus de paramètres et leur analyse est complexe. Par conséquent, ils sont d'un côté rarement employés en écologie appliquée et sur l'autre côté, ont reçu peu d'attention dans la littérature mathématique.

D'une manière simple Arditi et Ginzburg (1989) ont proposé la dépendance prédatrice, en modélisant la réponse fonctionnelle comme fonction d'un seul argument, cet argument étant toutefois le rapport $(\frac{N}{P})$ entre l'abondance des proies et celle des prédateurs. Les modèles comportant ce type de réponse fonctionnelle sont qualifiés de ratio-dépendants (Arditi & Ginzburg 1989).

0.2 Intérêt du travail de la thèse - problématique:

Nous nous intéresserons ici au traitement des systèmes dynamiques continus et déterministes, c'est-à-dire régie par des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Les modèles proie prédateurs de type ratio-dépendant posent un défi concernant leurs dynamiques proches de l'origine. Ceci est dû au fait que ces modèles ne sont pas définies à l'origine donc elle ne peut pas être linéarisé autour de ce point.

Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes dynamiques est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini, ce concept qui est directement lié à la stabilité, a fait l'objet d'une recherche abondante depuis la fin du XIX siècle.

Dans cette thèse nous réalisons une étude qualitative de l'évolution du système modélisé. Il s'agit la plupart du temps de déterminer la stabilité de la communauté étudiée, les conditions hypothétiques d'existence d'une stabilité, la sensibilité d'une telle condition vis à vis des paramètres, des conditions initiales, de la complexité du système.

Ce positionnement soulève d'ailleurs la question de la validité de la notion de stabilité; doit-on se focaliser sur les points particuliers, insensibles aux perturbations.

Les méthodes de linéarisations jouent donc un rôle très important dans l'étude de ces systèmes non linéaire. Si beaucoup de systèmes peuvent admettre un domaine de comportement linéaire, la linéarité est toujours une approximation de la réalité.

L'approximation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet de l'équation non linéaire. S'agissant de l'étude du comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier. La linéarisation classique ne permet pas de répondre dans notre cas où les fonctions ne sont pas assez régulièrement et ne sont pas définies à l'origine. Ce qui justifie la recherche d'autres techniques de linéarisation pouvant donner des résultats satisfaisants concernant l'étude de ces problèmes non linéaires. Parmi ces techniques on peut citer la méthode de linéarisation optimale. Celle-ci a été introduite par Vujanovic [7] et est basée sur le principe des moindres carrés entre l'équation non linéaire et l'équation linéaire.

En s'inspirant du même principe de base (Arino-Benouaz) [31], [37], [39], [36] ont pu associer une autre optimale A définissant une application linéaire (Dérivée optimale) à une équation différentielle ordinaire non linéaire. Le système linéaire obtenu est une sorte de valeur moyenne des dérivées de la fonction non linéaire le long des trajectoires partant de x_0 et allant à l'origine. Celle-ci sera vue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable dans le cas d'équation comportant de fonctions non régulières et en générale non dérivables.

La contribution dans cette thèse est le prolongement des travaux entrepris par (Arino-Benouaz) [31], [37], [39],[36] à partir de 1994. Nous allons dans un premier temps généraliser la méthode de linéarisation optimale à partir des résultats acquis lors de l'introduction de la dérivation optimale. Ensuite, on va faire l'étude de la stabilité des systèmes ratio dépendant de prédateur proie (systèmes non linéaires) en utilisant la méthode de la dériver optimale.

En fin, et en s'inspirant des perspectives donnée par Benouaz dans sa thèse de doctorat [36], nous allons chercher à appliquer la dérivation optimale à des systèmes paramétré non linéaires c'est-à-dire des systèmes de la forme:

$$x = f(x, p) \quad (p: \text{paramètres})$$

Notre étude est subdivisée en deux grandes parties. La première concerne l'aspect théorique, et la deuxième partie est consacrée à l'aspect numérique, c'est-à-dire l'application et la mise en oeuvre numérique de l'étude théorique.

1. La première partie, comprend trois chapitres (chapitre 1, chapitre 2, chapitre 3):
 - Dans le premier chapitre nous allons introduire des rappelles sur quelques notion fondamentales de la stabilité qui vont nous servir dans l'élaboration de cette thèse, ainsi la présentation de la méthode de la dérivée optimale.
 - Le deuxième chapitre, est consacrée aux quelques commentaires concernant les modèles mathématiques en écologie des populations: systèmes dynamiques proie-prédateur, modèle de Lotka-Volterra.

- Dans le troisième chapitre, nous étudions une classe des modèles ratio- dépendant proposés par Arditi et Ginzburg en 1989. Nous avons classifié et déterminé toutes les structures topologiques possibles près de l'origine $(0, 0)$ selon tous les paramètres. On a observé le comportement dynamique intéressant tel que l'extinction déterministe, l'existence des attracteurs multiple, et l'existence d'un cycle de limite. Ainsi on a vérifié ces résultats par la méthode de dérivée optimale.

2. La deuxième partie concerne l'aspect numérique. Cette partie comprend le chapitre 4 dont l'objet est essentiellement la mise en oeuvre numérique de la synthèse d'un modèle ratio- dépendant qui décrit le développement de la maladie du Sida dans une société en utilisant la dérivée optimale. Ainsi nous comparons les résultats obtenues avec celles trouvés par **B.D.Aggarwala**.

Chapitre I

Quelques notions sur la stabilité et
présentaion de la dérivée optimale.

Chapitre 1

Quelques notions sur la stabilité et présentation de la dérivée optimale

1.1 Introduction

Ce premier chapitre comporte deux parties. Nous allons consacrer la première partie à rappeler quelques notions fondamentales, qui seront le plus souvent citées dans les différentes études de cette thèse. On introduira dans ces rappels des définitions concernant:

- La stabilité d'un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre. Ainsi des définitions sur la fonction de Lyapunov et la stabilité au sens de Lyapunov.

- Stabilité des systèmes linéaires.

- L'étude qualitative au voisinage d'un point singulier des trajectoires d'un système différentiel autonome dans le cas linéaire. On rappelle une classification des trajectoires au voisinage d'un point singulier.

Nous introduirons aussi, Un rappel sur les modèles paramétrés et l'intérêt de l'analyse de la bifurcation dans le cas de ces modèles. Ainsi les différents types de bifurcation.

Dans la deuxième partie, on va présenter la méthode de la dérivée optimale et ses propriétés.

1.2 Notions sur la stabilité

1.2.1 Définition de la stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

Définition 1: (*Point d'équilibre*) Un vecteur $x_e \in \mathbb{R}^n$ est dit point ou état d'équilibre si:

$$f(x_e) = 0 \quad (1.2)$$

Remarque: tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par un simple changement de variable $x \leftarrow x - x_e$. Donc, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérant:

$$x_e = 0 \quad (1.3)$$

Définition 2: (*Stabilité locale simple et asymptotique*) L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système 1. 2 est:

stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r = r(\epsilon)$, tel que:

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t > 0 \quad (1.4)$$

instable, si non stable,

asymptotiquement stable, s'il est stable et si r peut être choisi tel que:

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (1.5)$$

marginalement stable, s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Physiquement, la stabilité au sens de LYAPUNOV garantit que la trajectoire restera à l'intérieur de la boucle $B(x_e, \epsilon)$ si son point de départ appartient à une boucle $B(x_e, r)$. La stabilité asymptotique inclut cette propriété, mais spécifie de plus que toute trajectoire initialisée dans la boucle $B(x_e, r)$ converge vers x_e .

Dans ce qui suit et par abus de langage, on parle de stabilité du système au lieu de parler de stabilité du point d'équilibre.

Définition 3 (*Stabilité asymptotique globale*) Si le système est asymptotiquement stable quel que soit le vecteur d'état initial $x(t=0)$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.

1.2.2 Fonctions de Lyapunov

Définition 4 (*Fonction définie positive*) Une fonction scalaire $U(x)$ continûment différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si :

$$(1) U(0) = 0,$$

$$(2) U(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \Omega \ / \ x \neq 0.$$

si (2) est remplacé par $U(x) \geq 0$ alors la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 5 (*Fonction quadratique définie positive*) La fonction quadratique $U(x) = x^T Q x$, où $Q_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice $Q_{n \times n}$ sont strictement positives.

Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (fonction de LYAPUNOV). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.

Exemple 1

$$U_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \text{ est définie positive dans } R^2 \text{ et semi-définie positive dans } R^3,$$

$$U_2(x) = (x_1 + x_2)^2 \text{ est seulement semi-définie positive dans } R^2 \text{ car nulle sur la droite}$$

$$x_1 + x_2 = 0.$$

1.2.3 Stabilité au sens de Lyapunov (méthode directe)

La stabilité au sens de LYAPUNOV est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continûment (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Théorème 1 (*Stabilité locale*) L'état d'équilibre $x_e = 0$ est stable si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que :

- (1) $U(0) = 0$,
- (2) $U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$,
- (3) $\dot{U}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$,

où \dot{U} est la dérivée de U par rapport au temps et Ω est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par $\dot{U}(x) < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

La fonction $U(x)$ est appelée fonction de LYAPUNOV.

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de LYAPUNOV et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Une fonction de LYAPUNOV candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de LYAPUNOV candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies dont la revue dépasse le cadre de document. Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle) du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif, voir exemple suivant).

Théorème 2 (*Stabilité globale*) L'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable si il existe une fonction continûment dérivable $U(x)$ telle que :

- (1) $U(0) = 0$,
- (2) $U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$,
- (3) $\dot{U}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$,
- (4) $\dot{U} \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.

1.2.4 Stabilité des systèmes linéaires

Si le système est linéaire:

$$\dot{x}(t) = A(t)x \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de A sont strictement positive, soit:

$$R_e(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

Théorème 3 (*Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires*) Le système linéaire $\dot{x}(t) = A(t)x$ est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q, il existe une matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de LYAPUNOV.

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (1.8)$$

1.2.5 Etude qualitative au voisinage d'un point singulier des trajectoires d'un système différentiel autonome dans le cas linéaire

La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire (NL), au voisinage d'un point singulier, consiste à ce ramener au système linéaire associé (L), puis à faire le lien entre les trajectoires des

deux système. Ce lien peut paraître "automatique" à première vue, en particulier si l'on se contente de n'examiner que quelques exemples sans complications. Ces notes ont simplement pour but de donner un résumé des divers situations possibles.

rappel de la classification des trajectoires au voisinage d'un point singulier

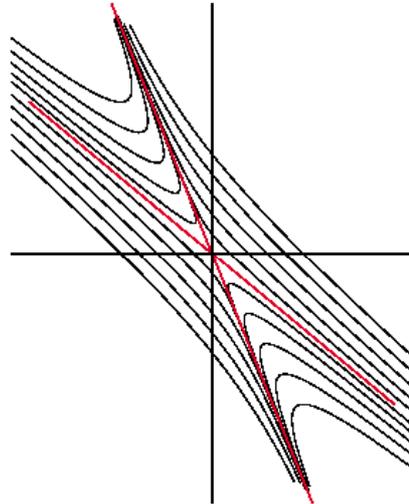
$$(L) \begin{cases} \dot{x} = ax - by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1.9)$$

On suppose le système non dégénéré, c'est à dire $ad - bc \neq 0$.

En conséquence l'origine est le seul point singulier.

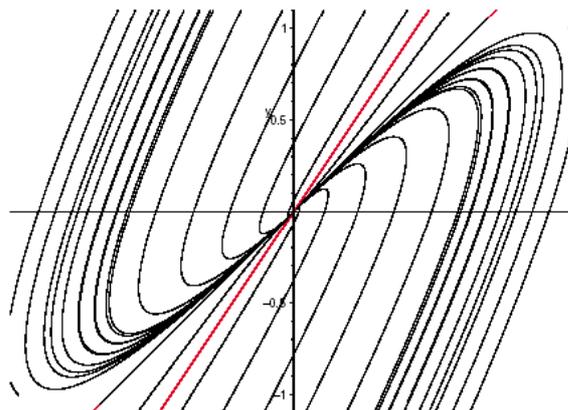
On note λ et μ les valeurs propres (réelles ou non) de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

cas 1: λ, μ réels distincts et $\lambda, \mu < 0$. **Point-selle** (asymptotiquement instable)..

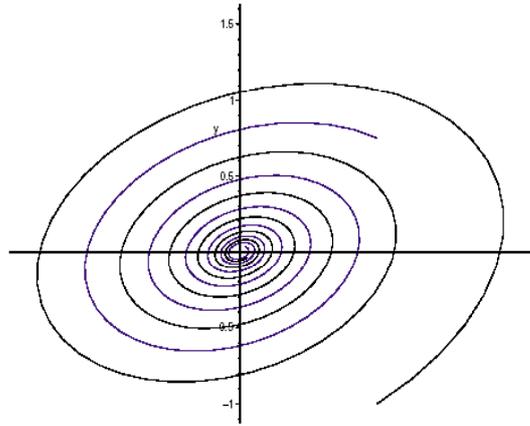


cas 2: λ, μ réels distincts et $\lambda, \mu > 0$. **Noeud** (asymptotiquement instable si $\lambda + \mu < 0$).

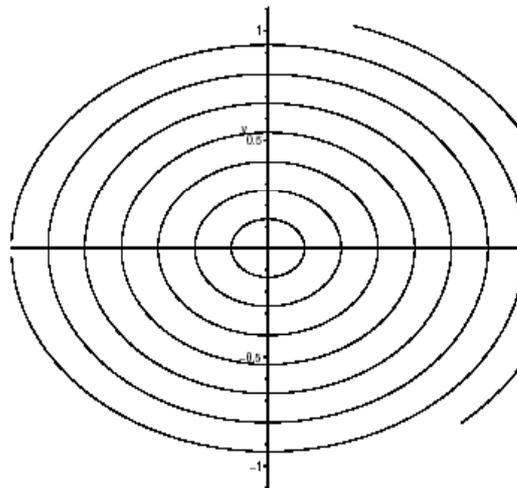
Toutes les trajectoires (sauf une) ont une direction limite commune "à l'origine".



cas 3: $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \bar{\lambda}$ avec α, β réels, $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. **Foyer** (asymptotiquement stable -resp. instable- si $\alpha < 0$ -resp. $\alpha > 0$).



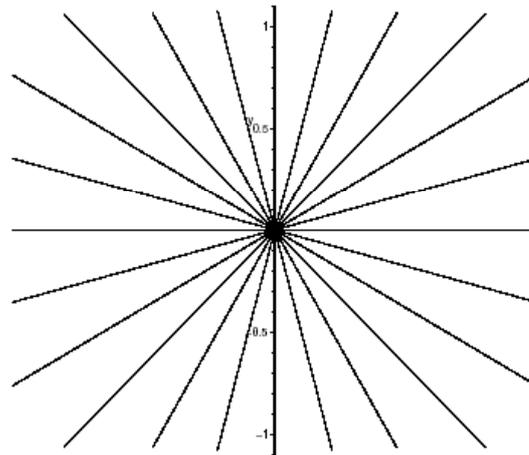
cas 4: $\alpha = i\beta$ et $\mu = i\beta$ avec $\beta \neq 0$. **Centre** (stable). Toutes les trajectoires sont fermées (solution périodique).



cas 5: $\lambda = \mu \neq 0$ et A est diagonalisable.

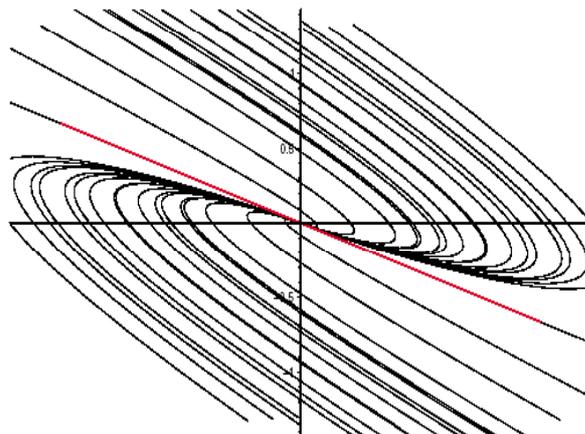
Noeud étoilé (asymptotiquement stable- resp. instable- si $\lambda < 0$ - resp. si $\lambda > 0$).

Quelle que soit la direction donnée, il existe une trajectoire admettant cette direction comme direction limite "à l'origine".



cas 6: $\lambda = \mu \neq 0$ et A n'est pas diagonalisable.

Noeud dégénéré (asymptotiquement stable - resp. instable- si $\lambda < 0$ - resp. si $\lambda > 0$).

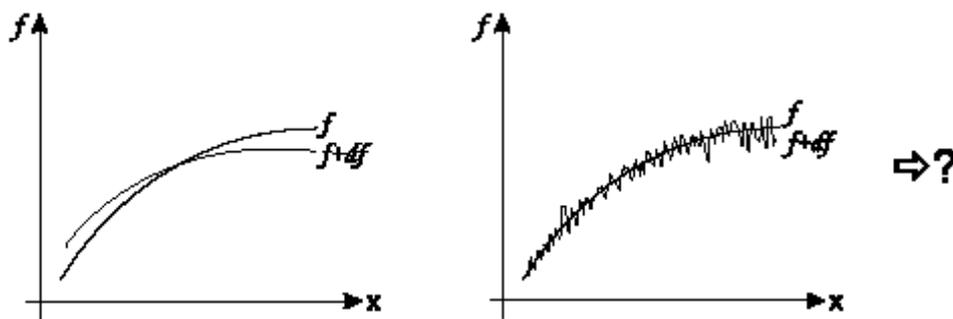


N.B: dans [C L], le point singulier est appelé noeud impropre des les cas 2 et 6, noeud propre dans le cas 5.

1.2.6 Modèles paramétrés et les différentes bifurcations

Modèles paramétrés

Les systèmes d'équations différentielles ont une forme efficace de modélisation des systèmes biologiques. Néanmoins, les incertitudes liées aux phénomènes biologiques sous-jacents sont toujours présentes dans un modèle mathématique (estimation des paramètres etc.). Un moyen de tester la robustesse du modèle face aux perturbations ainsi engendrées serait donc un outil puissant. Mais des perturbations de même amplitude peuvent être de plusieurs natures et leurs conséquences sur le systèmes sont alors très différentes:



Différentes perturbations d'une fonction f

Pour pouvoir conclure il faut donc se restreindre à une catégorie précise de modèles, les modèles paramétrés:

$$x = f(x, p) \tag{1.10}$$

Ce sont les modèles intéressants biologiquement car, comme mentionné ci-dessus, l'incertitude la plus importante porte sur les paramètres.

Dans le cas de ces modèles, l'analyse de bifurcation est une méthode qui permet d'identifier des valeurs du (des) paramètre(s) pour lesquelles le comportement asymptotique

tique du système change qualitativement. Elle permet donc bien de savoir si le système est consistant malgré les perturbations dues à l'incertitude sur l'estimation des paramètres (il n'y a pas de valeur de bifurcation dans la zone d'incertitude des paramètres) ou non (il existe au moins une valeur de bifurcation dans la zone d'incertitude des paramètres). Elle peut aussi apporter beaucoup d'autres renseignements sur le système comme cela sera montré plus tard.

Nous nous intéresserons ici au traitement de systèmes dynamiques continus et déterministes, c'est-à-dire régi par des systèmes d'équations différentielles ordinaires. De plus, les modèles étudiés ici sont tous des systèmes autonomes;

cest-à-dire que la fonction d'évolution du système ne dépend pas du temps. Concrètement cela signifie que les différents paramètres restent constants au cours du temps. Ces modèles sont essentiellement utilisés dans le cadre d'études de dynamiques des populations et des écosystèmes, mais les techniques sont également applicables à des systèmes moléculaires, ou, en élargissant le champ, à des modèles spatiaux, d'épidémiologie notamment.

Les différentes bifurcations

A la suite de Sergio RINALDI, je verrais ici les bifurcations comme des "collisions". En effet, dans un système structurellement stable (i.e. dans lequel il n'y a pas de bifurcation) les attracteurs, les points répulsifs, les selles et leurs variétés stables et instables sont séparés et restent séparés pour n'importe quel jeu de paramètres. Une bifurcation correspond donc à la "collision" de deux objets (attracteur, point répulsif ou selle) ou de deux variétés et ceci est une méthode géométrique efficace pour les décrire. On peut aussi dire que la théorie des bifurcations étudie les changements que subit une application lorsque le paramètre de contrôle change.

La collision de deux objets donne naissance à une bifurcation "locale" alors que la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation "globale".

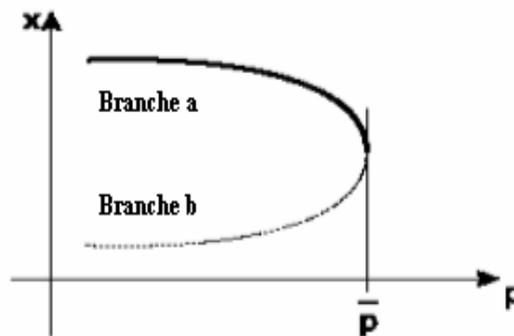
Bifurcations locales

Les bifurcations "locales" sont appelés ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. Dans la suite, chaque bifurcation sera présentée graphiquement puis le critère de détection utilisé dans les algorithmes pour la localiser sera présenté. Ce critère, dans le cas des bifurcations locales, concerne les valeurs propres du Jacobien (étant donné qu'il intervient au premier ordre dans la linéarisation). Les conventions des représentations graphiques seront les suivantes:

Collisions d'équilibres : Bifurcation "saddlenode" ou "fold"

Cette bifurcation consiste en le dédoublement d'un point fixe en deux nouveaux points fixes (voir Figure 2.), l'un étant stable et l'autre pas. L'instabilité de l'un de ces deux points fixes rend, par conséquent, difficile l'observation de ce genre de bifurcation.

Représentation



Bifurcation point de selle/noeud, la branche (a) est stable
tandis que la branche (b) est instable.

Dans un système de dimension 2 ($x_1; x_2$), une selle entre en collision avec un noeud (stable ou instable), d'où le nom de cette bifurcation. Un exemple simple d'équation pour laquelle elle est observée est:

$$\dot{x} = x^2 - \mu$$

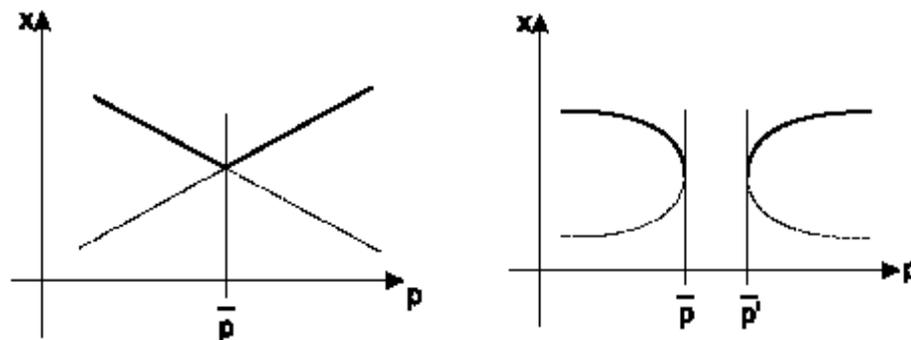
Détection : Une valeur propre du Jacobien est nulle pour $p = \bar{p}$.

Cas particuliers de la bifurcation saddlenode

Certaines bifurcations, souvent considérées comme classiques, sont en fait des cas particuliers de cette bifurcation saddlenode. La plupart des logiciels d'analyse de bifurcation les détectent d'ailleurs en tant que telle. Une perturbation du système, même très faible, suffit donc pour qu'elles redeviennent une bifurcation saddlenode.

Bifurcation transcritique ou échange de stabilité

Des équations simples permettant d'observer ce phénomène peuvent être:

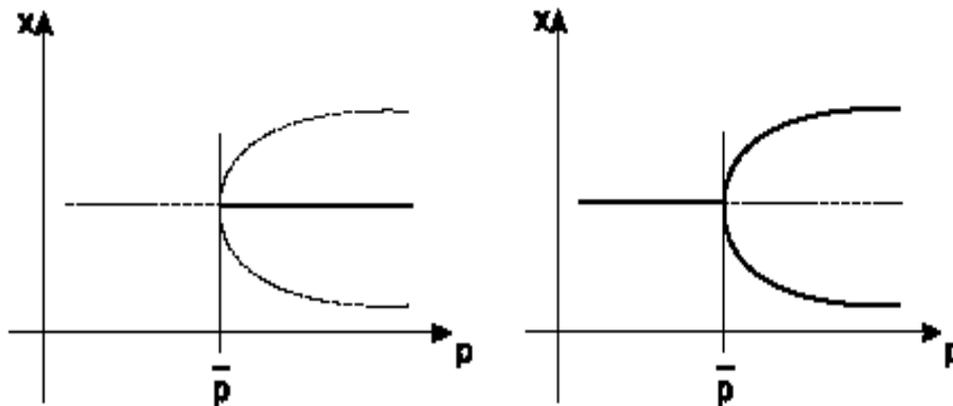


Bifurcation transcritique et sa dégénérescence après perturbation du système

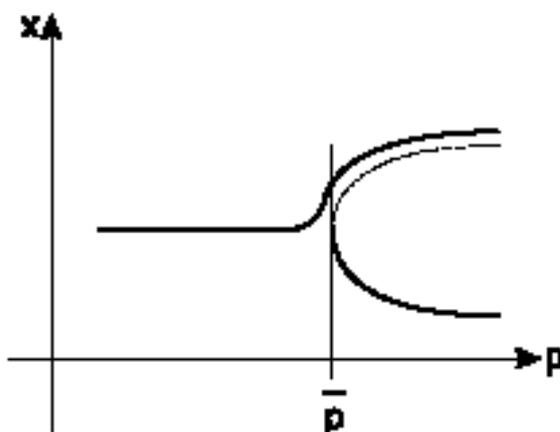
$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

$$\dot{x} = \varepsilon + \mu x - x^2 \quad \varepsilon < 0$$

Bifurcation pitchfork



Bifurcations pitchfork supercritique Bifurcations pitchfork subcritique



La dégénérescence de la supercritique après perturbation du système.

Ici encore, des équations simples permettent d'observer ces phénomènes:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad \dot{x} = \mu x + x^3$$

$$\dot{x} = \epsilon \mu x - x^3$$

La distinction super/subcritique est intéressante du point de vue biologique car les deux bifurcations n'ont pas du tout la même signification. En effet, pour des valeurs décroissantes du paramètre, dans le cas de la bifurcation supercritique le système passe continû-

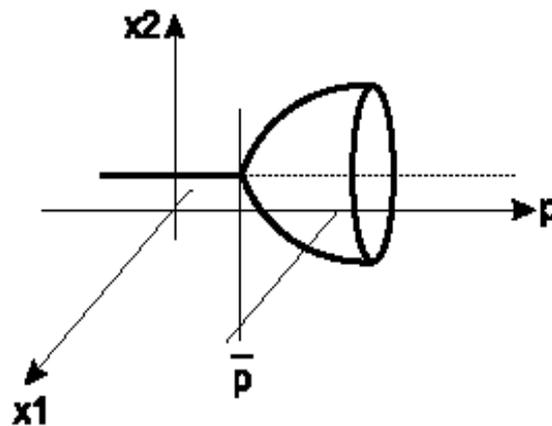
ment d'un équilibre "haut" ou "bas" à un équilibre "moyen". Au contraire, dans le cas de la bifurcation subcritique, le système est sur l'équilibre "moyen" et brusquement cet attracteur disparaît et la solution du système saute de manière discontinue vers un autre attracteur ou diverge vers l'infini. Par exemple, si le système représente une population, il y a une différence énorme entre le passage doux d'un régime de croissance à un autre (bifurcation supercritique) et l'extinction brutale de la population (bifurcation subcritique).

Collisions de cycles

Collision d'un cycle et d'un équilibre : Bifurcation de Hopf

Si un point fixe subit une bifurcation de Hopf, on voit apparaître un cycle limite d'une certaine période (voir Figure 3. Cette bifurcation est à la base des comportements quasi-périodiques.

Représentation



Bifurcation de Hopf (supercritique).

Il existe évidemment aussi la version subcritique de cette bifurcation.

Remarque: Le cycle apparaît avec une amplitude infinitésimale mais une période finie.

Détection: Deux valeurs propres complexes conjuguées du Jacobien traversent l'axe des imaginaires. Le sens de traversée détermine le type (super ou sub critique) de bifurcation.

Bifurcations globales

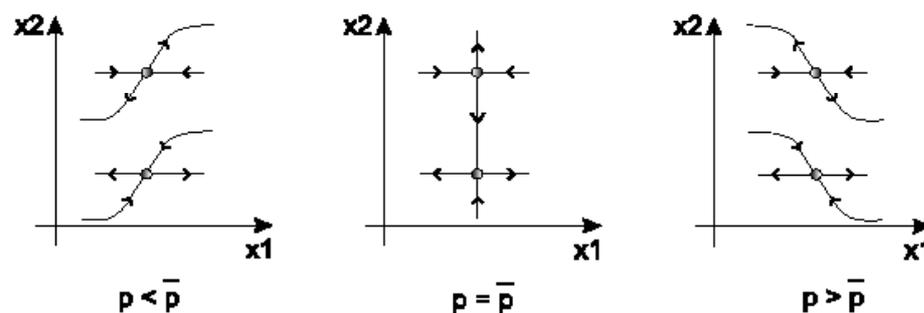
Ces bifurcation correspondent à des collisions de variétés et elles ne font donc pas forcé-

ment intervenir le voisinage de la solution. Ici les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées "globales".

Orbite hétéroclinique

Cette bifurcation résulte de la collision de variétés stables et instables de 2 selles séparées. C'est en fait un phénomène assez rare et de peu d'intérêt dans le cas des systèmes biologiques.

Représentation



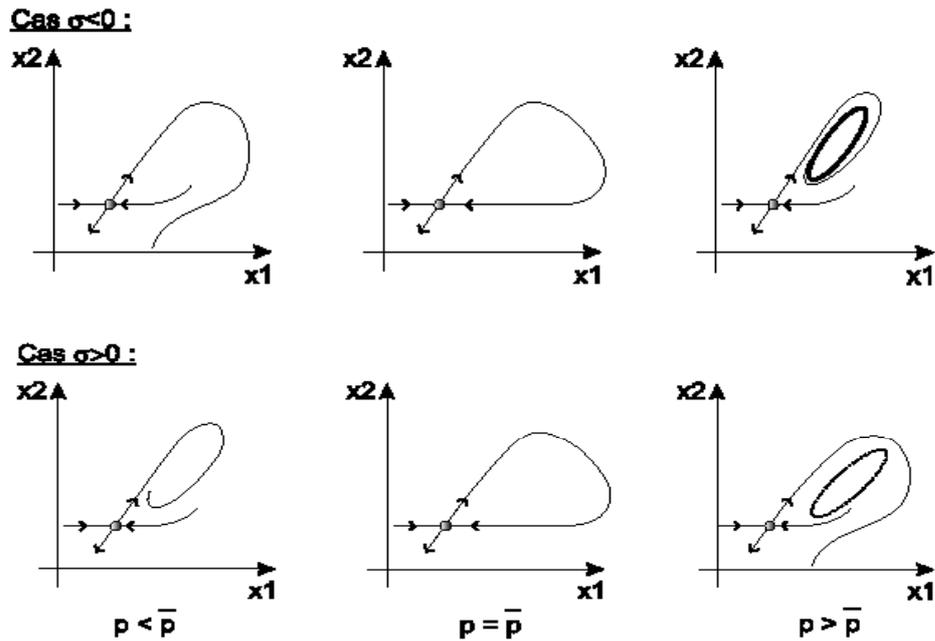
Bifurcation hétéroclinique

Orbite homoclinique

Ici, ce sont les variétés stable et instable d'une même selle qui entrent en collision.

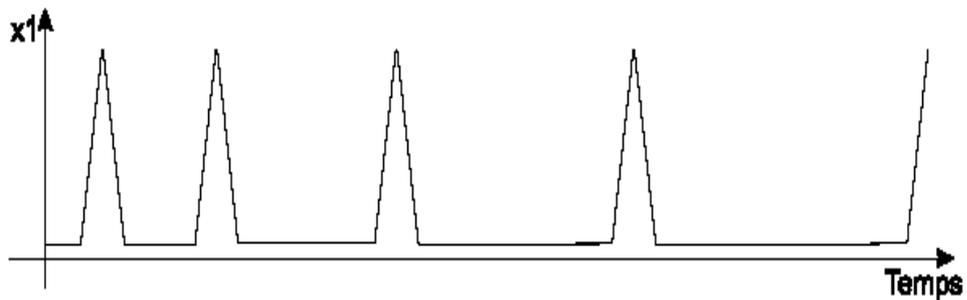
Selon le signe d'une certaine quantité, appelée quantité de selle et notée $\frac{3}{4}$, deux types de cycles sont observés.

Représentation



Bifurcation homoclinique

Au niveau temporel, les orbites homocliniques ont un comportement très particulier.



Comportement temporel d'une orbite homoclinique.

Les trajectoires restent longtemps à proximité de la selle avant d'être très rapidement expulsées vers le cycle homoclinique en cours de formation pour revenir enfin près de la selle et y passer un peu plus de temps encore etc. La théorie prédit que, pour la valeur du paramètre pour laquelle l'orbite homoclinique est observée (valeur de bifurcation) la période des trajectoires sur l'orbite est infinie. Cela rend les points de bifurcation homo-

clinique très difficilement détectables par simulation (à la limite, le temps de simulation serait infini !). D'autre part, dans le cas des systèmes biologiques, les données sont souvent recueillies sur une période de temps assez courte (quelques années par exemple pour les systèmes écologiques). Dans ce cas, il faut garder à l'esprit le comportement des orbites homocliniques pour ne pas identifier à tort un équilibre du système qui serait en fait une phase stationnaire (proche de la selle) d'une trajectoire attirée par une orbite homoclinique, qui pourrait donc encore subir des changements brutaux.

De plus, cette bifurcation peut aussi être à l'origine d'un comportement chaotique.

Dans ce cas, une seule bifurcation est suffisante pour faire basculer le système dans un régime chaotique (pas de cascade).

1.3 Méthode de la dérivée optimale

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale, si la fonction F , qui définit l'équation est suffisamment régulière au voisinage de l'équilibre et, si la linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, en ce sens, qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines de zéro de l'équation linéaire. Par contre, la tâche est toute autre en l'absence de régularité ou si le point d'équilibre est un centre.

Concentrons nous sur le cas non régulier. Imaginons même le cas où seul l'équilibre est non régulier. Dans ce cas, on ne peut pas dériver l'équation et on ne peut pas donc étudier l'équation linéarisée. Une question naturelle se pose alors : y a-t-il d'autres moyens d'associer à l'équation non linéaire, une équation linéaire dont le comportement asymptotique soit le même ?

En effet, on peut envisager par exemple, de substituer à la dérivation, la notion de sous différentiel. On obtient ainsi, une équation différentielle multivoque. L'idée choisie par Benouaz et Arino repose sur une méthode d'approximation. Dans ils ont introduit la no-

tion de la dérivée optimale. Il s'agit en fait d'une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés.

1.3.1 Principe de la méthode

Considérons le système d'équations différentielles non linéaires suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

avec $x \in R^n$, F : est définie dans certain ouvert Ω , à valeurs dans R^n , avec les hypothèses suivantes

H1) $F(0) = 0$.

H2) le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re } z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$ dans un voisinage de 0 pour lequel $DF(x)$ existe.

H3) F est continue, localement Lipschizienne.

Soit $x_0 \in R^n$, $x(t)$ la solution de l'équation non linéaire issue de x_0 . A toute application linéaire $A \in L(R^n)$, On associe la solution $y(t)$ de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t), y(0) = y_0 \quad (1.12)$$

et l'on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (1.13)$$

le long de cette solution, ce qui donne

$$A = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \right]^{-1}. \quad (1.14)$$

Plus précisément, la procédure est définie de la manière suivante :

Etant donné x_0 , on choisit une première application linéaire, par exemple, si F est dérivable en x_0 , on pourra prendre $A_0 = DF(x_0)$, ou alors la valeur de la dérivée en un point proche de x_0 , ce qui est toujours possible si F est seulement localement Lipschizienne.

Si A_0 est une application asymptotiquement stable, la solution issue de x_0 de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), y(0) = y_0,$$

tend vers 0 exponentiellement. On peut évaluer

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (1.15)$$

et on minimise G sur l'ensemble des matrices A . Si F est linéaire, le minimum est atteint pour la valeur $A = F$. (on a alors $A_0 = F$). Dans le cas général, on peut toujours minimiser G et la matrice qui donne le minimum est unique. On appelle A_1 cette matrice, on remplace A_0 par A_1 , on remplace y par la solution de l'équation associée à A_1 , et on continue. La dérivée optimale (qui dépend en général de x_0) est la limite (si elle existe) de la suite A_j ainsi construite. La procédure itérative peut être résumée comme suit

1. $A_0 \leftarrow DF(x_0)$.
2. $j \leftarrow 1$.
3. $A_j \leftarrow \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{A_{j-1}t}x_0)][e^{A_{j-1}t}x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{A_{j-1}t}x_0] [e^{A_{j-1}t}x_0]^T dt \right]^{-1}$.
4. Si $\|A_j - A_{j-1}\| > \epsilon$.

$j \leftarrow j + 1$

Aller à 3.

Sinon

\tilde{A} (dérivée optimale) $\leftarrow A_j$.

1.3.2 La dérivée optimale dans le cas scalaire

Considérons une équation différentielle scalaire non linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

avec $x \in R$, $f : R \rightarrow R$, le problème est d'approcher par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$g(a) = \int_0^{+\infty} |f(x(t)) - ax(t)|^2 dt \quad (1.18)$$

dans ce cas les hypothèses sur f sont les suivantes

h1) $f(0) = 0$.

h2) $f'(x) < 0$, en tout point où f' existe dans l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

h3) f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le calcul se fait d'une manière analogue à celle du cas vectoriel, on commence par le calcul de $a_0 = f'(x_0)$ puis on calcule a_1 en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

l'expression de a_1 est donnée par en substituant F par f :

$$a_1 = \frac{\int_0^{+\infty} f(x(t)) x(t) dt}{\int_0^{+\infty} x^2(t) dt} \frac{1}{x_0} \quad (1.20)$$

en changeant la variable t par $x(t) = \exp(a_0 t) x_0$, il vient

$$a_1 = \frac{\int_0^{x_0} f(x) dx}{\int_0^{x_0} x dx} \quad (1.21)$$

$$= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (1.22)$$

a_1 ne dépend pas de a_0 ; et par conséquent, la procédure de la dérivation optimale converge au premier pas, à savoir

$$\tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (1.23)$$

1.3.3 Quelques propriétés de la dérivée optimale

Cas où F est une somme de termes linéaire et non linéaire

Dans cette situation, la fonction F s'écrit

$$F(x) = Mx + \hat{F}(x)$$

où M désigne la partie linéaire, le calcul de la matrice A_1 donne

$$A_1 = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T \right] [\Gamma(x(t))]^{-1}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} A_1 &= M + \left[\int_0^{+\infty} [\hat{F}(x(t))] [x(t)]^T \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= M + \hat{A}_1 \end{aligned} \quad (1.24)$$

d'une manière générale, pour l'itération j

$$A_j = M + \hat{A}_j \quad (1.25)$$

avec

$$\hat{A}_j = \left[\int_0^{+\infty} \left[\hat{F}(x_j(t)) \right] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x_j(t))]^{-1}. \quad (1.26)$$

Donc, si la composante f_k de F est linéaire alors \hat{f}_k est nulle, la $k^{\text{ième}}$ ligne de la matrice optimale est égale à f_k .

1.3.4 Relation entre la dérivée optimale et la linéarisation classique

La relation de la dérivée optimale avec la linéarisation classique constitue une des propriétés les plus importantes, supposons que la suite A_j converge vers la matrice optimale et que $DF(0)$ existe, dans ce cas on peut écrire

$$F(x) = DF(0)x + o(|x|). \quad (1.27)$$

En remplaçant dans l'expression on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left[\int_0^{+\infty} [DF(0)x(t) + o(|x(t)|)] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= DF(0) + \left[\int_0^{+\infty} o(|x(t)|) [x(t)]^T dt \right] [\Gamma[x(t)]]^{-1} \\ &= DF(0) + o(1). \end{aligned}$$

où

$$o(1) = \left[\int_0^{+\infty} o(|x(t)|) [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1}.$$

avec $o(1)$ une quantité qui tend vers 0 quand $x_0 \rightarrow 0$.

Chapitre II

Dynamique de population et le modèle
proie-prédateur de Lotka-Volterra.

Chapitre 2

Dynamique de population et le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

2.1 Introduction

Selon Frontier et Pichod- Vialle (1995) on désigne par population l'ensemble des individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et (pratiquement) pouvant se reproduire entre eux.

Un peuplement est un ensemble de populations d'espèces diverses coexistant sur un territoire.

La dynamique d'une population s'exprime par des modèles incluant des variables explicatives.

Exemples : modèles de mortalité, modèles de croissance, modèles proie- prédateur.

Dans ce chapitre, nous présentons une description de la dynamique d'une population et des modèles d'interaction entre espèce. Ainsi nous nous intéressons à un type de systèmes proie- prédateur qui est le modèle de Lotka-Volterra où on fait l'étude de la dynamique et le comportement du modèle au voisinage d'un point d'équilibre.

2.2 Descriptions de la dynamique d'une population

Une des premières descriptions de la dynamique d'une population se trouve vers la fin du 18^{ème} siècle quand Malthus (1798) introduisit ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de croissance Malthusienne:

une population augmente exponentiellement tant que ses ressources ne sont pas limitantes. En désignant par $n(t)$ l'abondance de la population au temps t cette croissance peut être décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dn(t)}{dt} = rn(t) \quad (2.1)$$

où r est le taux de croissance. Mais que se passe-t-il si les ressources (par ex. l'espace, la nourriture, les nutriments essentiels) sont limitées? L'idée qu'une ressource limitante peut arrêter la croissance d'une population a été introduite empiriquement par Verhulst (1838) dans ce qui est appelé aujourd'hui le modèle de croissance logistique.

$$\frac{dn(t)}{dt} = rn\left(1 - \frac{n}{K}\right) \quad (2.2)$$

La capacité de soutien K désigne une abondance limite au-dessus de laquelle la croissance de la population devient négative, tandis qu'au-dessous, la croissance est positive.

K représente donc une valeur d'équilibre vers laquelle l'abondance de la population converge. K peut aussi être interprétée comme une mesure des ressources disponibles.

En fait, il existe un autre mécanisme qui empêche la population de croître exponentiellement: le cas où elle est consommée par une autre population à un taux excédant son taux de croissance. Une telle interaction proie-prédateur a été décrite originellement par deux chercheurs travaillant indépendamment, Lotka (1924) et Volterra (1926). En désignant par l'abondance de cette deuxième population, le prédateur. Le système de Lotka-Volterra va faire des cycles éternels qui passent périodiquement par les valeurs initiales des abondances de la proie et du prédateur (stabilité neutre). La découverte d'un

système mathématique proie-prédateur coïncidait avec l'article d'Elton (1924) sur les fluctuations des populations animales, ce qui a été l'origine de l'hypothèse selon laquelle ces fluctuations résultent d'interactions entre proies et prédateurs.

2.3 Présentation des modèles d'interaction entre espèces

La nature générale de la dynamique résultant de l'interaction entre deux espèces pour cela on considère une communauté de plusieurs populations (deux par la suite), décrite à tout instant par le vecteur $\vec{n}(t)$ dont les composantes représentent les différentes populations étudiées ; la dynamique de son évolution est une fonction de sa propre composition à l'instant considéré, soit :

$$\frac{d\vec{n}(t)}{dt} = f(\vec{n}(t)) \quad (2.3)$$

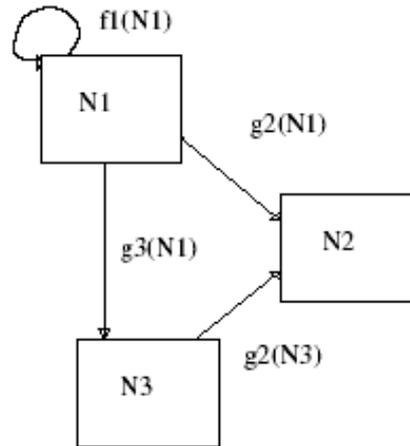
La fonction dévolution de la dynamique de la communauté sera définie au niveau de chaque espèce par la juxtaposition d'un terme de dynamique intrinsèque et d'un terme d'interaction avec les autres espèces, ce que lon écrit comme suit :

$$\forall i \frac{dn_i}{dt} = f_i(n_i) + (g_i(n_k))_{k \neq i} \quad (2.4)$$

Dans le cas d'un modèle prenant en compte une communauté de p espèces, on considèrera donc $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$. Les relations entre espèces peuvent d'abord être représentées sous la forme d'un diagramme, si la dynamique de l'espèce i est influencée par l'espèce k , on considèrera une fonction $g_i(n_k)$ non nulle et une flèche de k vers i sur le graphe de la communauté.(voir figure 1.)

Concernant la contribution propre à l'espèce, on peut considérer tous les types de dynamiques continues utilisées pour l'étude d'une seule espèce. Nous considèrerons le plus souvent le cas d'une croissance malthusienne (i.e. exponentielle): le terme $f_i(n_i)$ est de la forme an_i , où a est une constante. Dans le cas d'un modèle à une seule espèce N ,

l'évolution de cette espce est décrite par l'équation $\frac{dN}{dt} = aN$.



2.3.1 La fonction d'interaction

Le choix de la fonction d'interaction reflète le type d'interaction étudié, Prédation, Compétition, et/ou Mutualisme. La prédation entre deux espèces i et k (i étant la proie, k le prédateur) sera prise en compte sous la forme :

$$\begin{cases} g_i(n_k) < 0 \\ g_k(n_i) > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

On désignera ici sous le terme de prédateurs, toute espèce qui se nourrit aux dépens d'une autre. Les phytophages et les parasites sont des cas particuliers de prédateurs.

Un prédateur peut se définir en fonction du nombre de proies consommées:

-monophagie: une seule proie (le panda géant et les feuilles de bambous; le koala et les feuilles d'eucalyptus).

-oligophagie: vie aux dépens de quelques espèces proches (doryphore).

-polyphagie: nombreuses espèces proies ingérées.

Dans les relations proies-prédateurs, il convient de distinguer:

1- les réponses du prédateur vis à vis d'une proie,

- 2- les effets de la prédation sur les populations de proies et
- 3- les rôles de la prédation.

On a donc un prédateur, décrit par une variable $P(t)$, qui mesure le nombre ou la concentration au temps t . De même, la proie sera désignée par $N(t)$ (comme substrat).

On modélise seulement l'interaction entre $N(t)$ et $P(t)$. La forme la plus générale est

$$\begin{cases} N' = -f(N, P) \\ P' = g(N, P) \end{cases} \quad (2.6)$$

où f et g sont des fonctions positives des deux variables positives N et P . En effet, le fait que le nombre de prédateur augmente et que celui des proies diminue est presque une définition de la relation proie- prédateur. L'interaction est en effet néfaste pour la proie (espèce i) et profitable pour le prédateur (espèce k).

Le type de la fonction d'interaction choisie doit s'accorder avec les observations biologiques préliminaires. Ainsi, dans les modèles de prédation que nous étudierons, on pourra considérer les fonctions de prédation suivantes :

Notant N les proies, P les prédateurs, elles seront de la forme $g_N(P) = P * N * R(N)$ où $R(N)$ peut être définie par l'une des fonction suivantes :

$$\begin{cases} R(N) = \alpha & \text{loi d'action de masse} \\ R(N) = \frac{\alpha}{N + \beta} & \text{Holling I} \\ R(N) = \frac{\alpha N}{N^2 + \beta^2} & \text{Holling II} \\ R(N) = \frac{\beta(1 - e^{-\alpha N})}{N} & \text{type4} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ces fonctions ne sont données qu'à titre indicatif. Le choix revient toujours en dernier ressort au biologiste qui considère ses observations en premier lieu. Signalons enfin que le premier type de fonction représenté correspond à des interactions aléatoires, suivant la « loi d'action de masse ».

On peut distinguer avec Holling deux types de réponses:

-réponse fonctionnelle: augmentation du nombre de proies consommées lorsque la densité de proie augmente.

-réponse(s) numérique(s): changement de densité du prédateur lorsque le nombre de proie augmente.

Cela revient à dire que le nombre de proies disponibles augmente, un prédateur peut d'abord réagir en modifiant son taux de prédation (réponse fonctionnelle) et ensuite augmenter ses effectifs (réponse numérique).

Quatre types de réponses fonctionnelles sont reconnus:

-nombre de proies est rapidement constant (Thompson)-exemple. Crustacés;

-nombre de proies augmente proportionnellement (Nicholson et Bailey)-exemple. Insectes parasites;

-nombre de proies augmente puis se stabilise (curvilinéaire -Holling)-exemple. La plupart des Arthropodes étudiés;

-réponse sigmoïde: prédation importante au-delà d'un certain seuil, puis stabilisation-exemple. Vertébrés et Insectes parasites. Cette réponse implique souvent un changement de comportement du prédateur vis à vis de la proie.

2.3.2 Effets de la prédation sur les populations de proies:

Si on prend en compte simultanément les réponses fonctionnelles et numériques, on peut décrire l'évolution

simultanée des populations de proies et de prédateurs. De façon classique, on considère un système simple, avec une proie et un prédateur. Cela ne se rencontre que dans les systèmes avec monophagie. Cela décrit donc rarement la réalité. Le modèle le plus classique: modèle de Alfred Lotka et Vito Volterra (1925) qui s'écrit:

$$\begin{cases} N' = -aNP \\ P' = bNP \end{cases} \quad (2.8)$$

avec deux paramètres a et b . Ce modèle est logiquement satisfaisant car il dit que, en l'absence de prédateur ou de proie, il ne se passe rien. D'un point de vue biologique, on préfère souvent le raffiner en saturant le nombre de proies qu'un prédateur est capable de manger, et on écrit:

$$\begin{cases} N' = a h(N) P \\ P' = b h(N) P \end{cases} \quad (2.9)$$

où $h(N)$ est une fonction croissante avec une saturation (de type "Holling"). Il existe beaucoup d'autres formes de modèles possibles (Leberton et Millier 1982).

2.4 Les équations proie- prédateur de Lotka-Volterra

2.4.1 Historique, modèle et caractéristiques:

Le modèle de Lotka-Volterra décrit l'évolution d'une population proie et d'une population prédateur en interaction. Ce modèle a été largement étudié, car il est d'une part relativement simple et d'autre part il est considéré comme la base des systèmes d'interaction proie-prédateur. L'évolution décrite par ce système n'a cependant que peu de rapport avec la réalité biologique. Seules les oscillations en opposition de phase des populations proie et prédateur s'approchent d'un comportement naturel. Un problème essentiel de ce modèle est la trajectoire fermée de l'espace de phase, qui impose des oscillations de même amplitude dans le temps. Ce problème est contourné en modifiant le système de telle sorte à créer des cycles limites dans l'espace de phase. L'amplitude des oscillations varie dans ce cas, et l'évolution de la population tend vers cet état stationnaire. Le modèle de Lotka-Volterra ne permet pas d'inclure le comportement des espèces: la proie n'a pas la possibilité de changer sa tactique face au prédateur, et inversement. Pour pallier cette lacune, le modèle de Lotka-Volterra généralisé subdivise les populations proie et prédateur en différents types. Chaque type représente un comportement particulier de l'espèce. Afin d'inclure toutes les tactiques possibles, le système contient un grand nombre de types différents.

2.4.2 Présentation du modèle

La croissance de deux espèces de concurrence dans un environnement fermé a été analysé par Vito Volterra, un mathématicien italien célèbre (Bailey et Ollis, 1986), après la première guerre mondiale. Il s'agissait alors d'explicitier la dynamique des populations de sardines et de requins en mer Adriatique; expliquer notamment pourquoi les quantités de sardines pêchées après l'interruption due a la guerre n'étaient plus aussi importantes que précédemment et pourquoi à la reprise de la pêche la proportion observée de requin avait augmenté.

Volterra a expliqué les oscillations dans des populations de poissons dans le méditerranéen près proposition du raisonnement suivant (Edelstein-Keshet, 1988):

1. Croissance illimitée de proie en l'absence des prédateurs;
2. La survie prédatrice dépend de la présence de leur proie;
3. Le taux de prédation dépend de la probabilité qu'une victime est produite près un prédateur; et
4. Le taux de croissance de la population prédatrice est proportionnel à l'ingestion de nourriture (taux de la prédation).

Avec ces prétentions, Volterra a formulé les équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = aN - bNP \\ \frac{dP}{dt} = -cP + dNP \\ N(0) = N_0 \quad P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

où N et P représentent la population de proie et de prédateur respectivement; et les variables a, b, c, et d peuvent représenter des densités de biomasse ou de population de l'espèce.

Le système défini répond aux conditions initiales N_0 , P_0 et exprime la prise en compte de dynamiques intrinsèques de croissance (pour N) et décroissance (pour P) exponentielles;

les termes d'interactions sont proportionnels aux quantités de chacune des espèces. Cette équation est également connue comme le modèle de prédateur-proie de Lotka-Volterra développé par Lotka et Volterra vers la fin de 1920 a (Bailey et Ollis, 1986).

$$\frac{dP}{dt} = -cP + dNP$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow
 Changement de population de prédateur Conversion de la proie Densité indépendante de mortalité

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow
 Changement de population de proie Reproduction de proie Consommation de proie

N: la taille de population de proie (ou densité).

P: la taille de population de prédateur (ou la densité).

a: taux de croissance intrinsèque de proie.

b: taux d'attaque de la proie par chaque prédateur.

NP: taux de contact de prédateur et de proie.

d: taux de conversion de proie consommée en nouveaux prédateurs.

c: taux de mortalité prédatrice qui est une fraction constante par unité de temps.

Description des variables

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces: des proies (lapins, sardines) et des prédateurs (renards, requins, respectivement!). Pour cela, on note $N(t)$ et $P(t)$ le nombre de proies et de prédateurs au temps t . Les quantités N ; P sont donc des fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{N} . Afin de disposer d'outils mathématiques,

on préfère travailler avec des variables continues. C'est pourquoi on considère deux nouvelles quantités :

$$n(t) = \frac{N(t)}{N_0} \quad (2.11)$$

et

$$p(t) = \frac{P(t)}{P_0} \quad (2.12)$$

où N_0 (respectivement P_0 est un nombre de proies (respectivement de prédateurs) fixé et grand. Les quantités n et p sont donc des proportions de proies et prédateurs. Les variations de $n(t)$ et $p(t)$ sont donc des quantités petites, si bien que l'on peut faire l'hypothèse que $n(t)$ et $p(t)$ sont des fonctions de \mathfrak{R}^+ dans \mathfrak{R} .

Les nombres N_0 et P_0 sont choisis suffisamment grands pour que les variations de $N(t)$ et $P(t)$ soient comparativement petites. Cela permet de supposer les fonctions $t \rightarrow n(t)$ et $t \rightarrow p(t)$ continues.

En, considérons les taux de variation sur un intervalle :

$$\frac{\Delta n(t)}{n(t)} = \frac{\Delta N(t)}{N(t)} \quad (2.13)$$

Si on suppose que les variations de $n(t)$ sont petites par rapport à $N(t)$ (ce qui paraît vraisemblable seulement pour des populations nombreuses), on peut passer à la limite :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n(t)}{n(t)} = \frac{n'(t)}{n(t)} \quad (2.14)$$

Mise en équation:

En l'absence de prédateurs, les proies ont un taux de croissance constant (on suppose la nourriture abondante et l'absence de compétition) :

$$\frac{n'(t)}{n(t)} = a \quad (2.15)$$

De même, les prédateurs ont tendance à disparaître en l'absence de proies, faute de nourriture

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = -c \quad (2.16)$$

Il reste à prendre en compte les interactions entre les deux espèces : le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû aux prédateurs) est supposé proportionnel au nombre de prédateurs. De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à leur disposition, c'est-à-dire au nombre de proies.

Ces considérations nous conduisent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{n'(t)}{n(t)} = a - bp \\ \text{et} \\ \frac{p'(t)}{p(t)} = -c + dn \end{cases} \quad (a, b, c, d > 0) \quad (2.17)$$

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un système de deux équations différentielles, auquel on ajoute des conditions initiales (population de départ de chacune des espèces :

$$\begin{cases} n' = n(a - bp) \\ p' = p(-c + dn) \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec: $\{n(0), p(0)\} = (n_0, p_0), \quad n_0, p_0 > 0 \quad (1)$

Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra:

On trace le modèle de Lotka-Volterra en prenant les paramètres suivants :

$$a = 3 \qquad b = 1 \qquad c = 2 \qquad d = 1$$

$$\begin{cases} n' = n(3 - p) \\ p' = p(-2 + n) \end{cases}$$

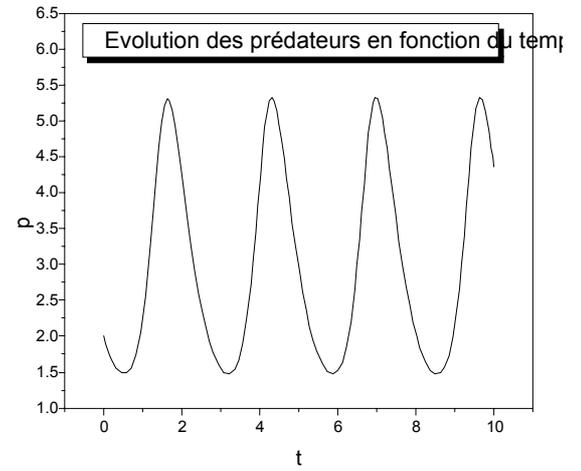
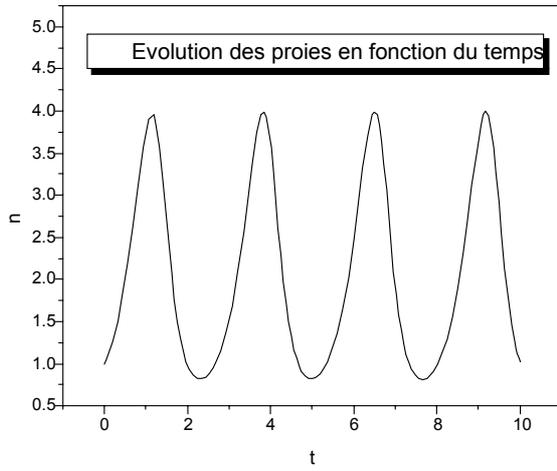


Figure 2.1: L'évolution des deux populations proies (x) et prédateurs (y) en fonction du temps pour les conditions initiales (2,1).

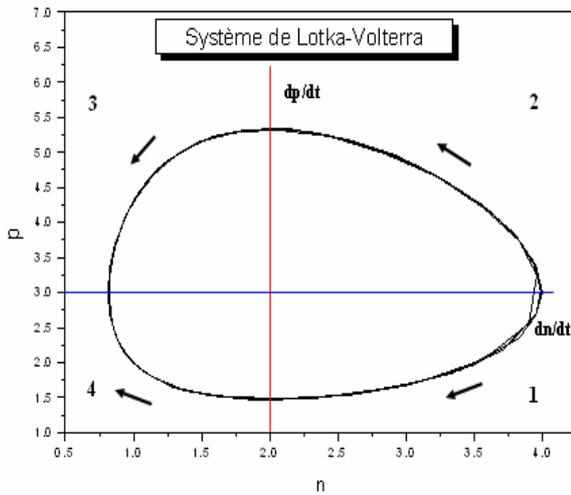


Figure2.2: Représentation du modèle de Lotka Volterra et les isoclines de proie et de prédateur dans le plan de phase.

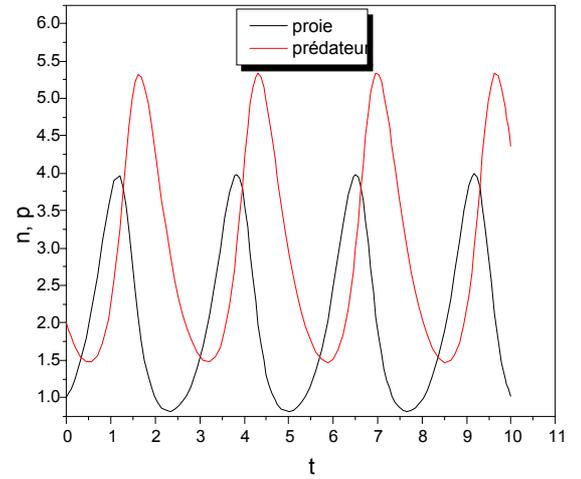


Figure2.3: Comparaisons entre la variation de proie et de prédateur en fonction du temps.

Il est évident que la proie et les populations prédatrices seront dans l'équilibre quand leur taux de changement est nul. Dans cette condition les naissances et les décès sont égaux. Par conséquent, nous pouvons trouver les isoclines d'équilibre qui représente les lignes où chaque espèce est constante, en résolvant les équations dynamiques du modèle proie - prédateur de Lotka-Volterra c-à-d:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = 0 \\ \frac{dp}{dt} = 0 \end{cases}$$

Un équilibre de la communauté se produit à l'intersection des deux isoclines parce que, en ce moment, les deux populations restent sans changement. L'espace de phase de proie-Prédateur est divisé en quatre régions par les isoclines d'équilibre:

Région 1: Les deux populations se développent.

Région 2: La population prédatrice se développe tandis que la proie refuse.

Région 3: Les deux populations diminuent.

Région 4: La population de proie se développe tandis que le prédateur refuse.

En traçant les densités des proies et des prédateurs para port au temps nous obtenons des cycles de l'abondance des deux espèces avec les prédateur faisons un cycle le ralentissement derrière celui des proie. Ceci est connu comme cycle de limite neutrement stable.

2.4.3 Dynamique et comportement du modèle au voisinage d'un point d'équilibre:

Les deux points d'équilibre du modèle de Lotka-Volterra sont:

$$(n, p) = (0, 0) \quad \text{et} \quad (n, p) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

Etude de l'équilibre (0,0):

la Jacobiënne du modèle au point (0, 0) est donnée par:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

admettant une valeur propre négative et une valeur propre positive, il s'agit d'un *point selle*.

Etude de l'équilibre $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$:

la Jacobiënne du modèle au point $(\frac{c}{d}; \frac{a}{b})$ est donnée par:

$$J_F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Celui-ci admet deux valeurs propres $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$, conjuguées, de parties réelles nulles. La linéarisation ne nous permet pas de conclure sur la stabilité de ce point d'équilibre.

Champs de vecteur :

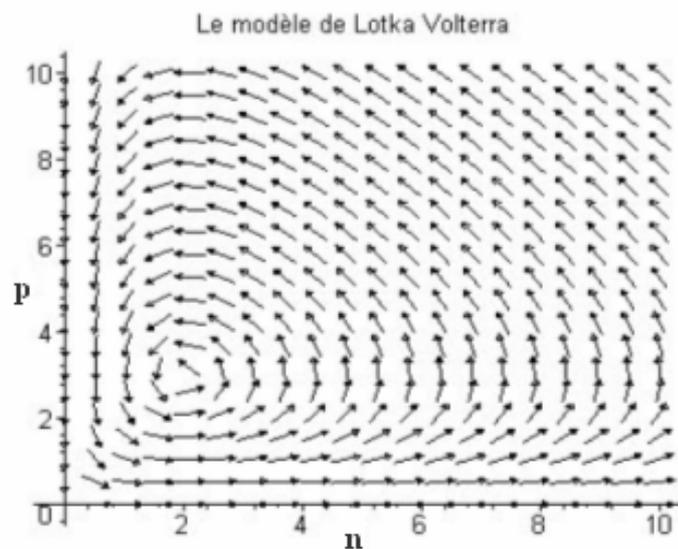


Figure 2.4: Champ de vecteurs du modèle de Lotka-Volterra.

2.5 La modélisation des systèmes proie- prédateur

2.5.1 Un cadre général pour la modélisation de systèmes proie- prédateur

Les modèles proie-prédateur qui vont être étudiés dans cette thèse suivent deux principes. Le premier est que la dynamique de la population peut être décomposée en processus de naissance et processus de mort,

$$\frac{dn}{dt} = \text{croissance} - \text{mortalité}$$

Le deuxième principe est la conservation de la masse (Ginzburg 1998), qui dit que la croissance du prédateur est une fonction directe de ce qu'il a mangé. Avec ces deux principes, on peut écrire la forme canonique d'un modèle proie-prédateur de la façon suivante:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = f(n)n - g(n,p)p - \mu_n(n) \\ \frac{dp}{dt} = eg(n,p)p - \mu_p(p)p \end{cases} \quad (2.19)$$

où $f(n)$ représente la croissance de la proie, $g(n,p)$ la réponse fonctionnelle (proies mangées par prédateur par unité de temps, Solomon 1949), e l'efficacité de conversion (pourcentage de la biomasse consommée qui est convertie en biomasse de prédateur) et $\mu_n(n)$ et $\mu_p(p)$ la mortalité naturelle, respectivement de la proie et du prédateur. La réponse numérique (taux de croissance du prédateur en fonction de la consommation) est considérée comme étant proportionnelle à la réponse fonctionnelle. Il y a plusieurs formes pour les fonctions f , g et μ_x ($x \in \{n, p\}$) ont été proposées dans la littérature. C'est en particulier la réponse fonctionnelle g qui a initié un grand nombre de travaux (Bastin & Dochain (1990)), avec une collection de plus de 50 modèles.

On fait habituellement l'hypothèse que la consommation est la cause principale de mortalité de la proie, de sorte que peut être négligé (tant que le prédateur existe). Nous remplaçons également par la croissance logistique standard (Verhulst 1838) et considérons

que la mortalité du prédateur est constante, comme dans les équations de Lotka-Volterra. Ces hypothèses donnent le système

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = r(1 - \frac{n}{k})n - g(n, p) \\ \frac{dp}{dt} = eg(n, p)p - \mu p \end{cases} \quad (2.20)$$

Traditionnellement, on fait l'hypothèse que la réponse fonctionnelle dans ce système ne dépend que de la proie, n , par ex.

$$g(n) = an \quad (\text{Lotka 1924})$$

$$g(n) = \frac{an}{1 + ahn} \quad (\text{Holling 1959})$$

Ce type de réponse fonctionnelle est qualifié proie dépendante, mais bientôt il est apparu clairement que l'abondance de prédateur P peut influencer cette fonction (Cockburn 1968, Hassell et Varley 1969; Salez 1974). Ainsi la réponse fonctionnelle doit aussi dépendre de l'abondance du prédateur, $g = (n, p)$. ce cas représente la prédateur-dépendance. En principe, une densité élevée de prédateurs entraîne un nombre accru de rencontres entre prédateurs. Ceci peut entraîner une diminution dans l'efficacité de la prédation, soit seulement parce que l'organisme perd du temps pour détecter que l'autre individu est aussi un prédateur (et pendant ce temps le prédateur ne cherche pas d'autres proies), soit à la suite d'une interférence active entre les deux prédateurs (Beddington 1975; Hassell & Varley 1969).

L'abondance du prédateur devrait par conséquent avoir un effet négatif sur la réponse fonctionnelle,

$$\frac{dg(n, p)}{dp} < 0$$

La prédateur-dépendance dans la réponse fonctionnelle a été introduite à plusieurs reprises. La première introduction avec un certain écho dans la littérature a été faite par Hassell & Varley (1969), qui proposaient que le taux d'attaque devrait diminuer avec une

augmentation de la densité des prédateurs.

L'incorporation de ce concept dans le système (2.11) a démontré un effet stabilisant (Beddington 1975; Beddington et al. 1978).

Une manière plus simple d'incorporer la prédateur-dépendance a été proposée par Arditi & Ginzburg (1989), en modélisant la réponse fonctionnelle comme fonction d'un seul argument (comme dans l'approche traditionnelle), cet argument étant toutefois le rapport entre l'abondance des proies et celle des prédateurs,

$$g(n, p) = g\left(\frac{n}{p}\right)$$

Ceci est un cas particulier de prédateur-dépendance. Les modèles comportant ce type de réponse fonctionnelle sont qualifiés de ratio-dépendants (Arditi & Ginzburg 1989). Ces modèles proie- prédateur de type ratio- dépendant vont être étudiés dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Application de la dérivée optimale à
l'étude de la dynamique globale d'un
système ratio- dépendant.

Chapitre 3

Application de la dérivée optimale à l'étude de la dynamique globale d'un système ratio-dépendant

3.1 Introduction

Les systèmes ratio-dépendants de prédateur-proie ont été considérés par quelques chercheurs pour être plus approprié pour les interactions de prédateur-proie où la prédation implique des processus de recherche sérieux. Cependant, de tels modèles ont installé une issue provocante concernant leur dynamique près de l'origine puisque ces modèles ne sont pas bien définie ici.

En cette thèse, le comportement qualitatif d'une classe de système ratio-dépendant de prédateur-proie à l'origine à l'intérieur du premier quadrant est étudié. On montre que l'origine est en effet un point critique d'un ordre plus supérieur. Il peut exister de nombreux genres de structures topologiques au voisinage de l'origine comprenant les orbites paraboliques, les orbites elliptiques l'hyperbolique orbites, et n'importe quelle combinaison d'elles. Ces structures ont des implications importants pour le comportement global du modèle. L'analyse qualitative globale du modèle selon tous les paramètres est effectuée,

et des conditions de l'existence et la non-existence des cycles de limite pour le modèle sont donnés. Des simulations sur ordinateur sont présentées en utilisant la méthode de la dérivée optimale pour illustrer les conclusion.

3.2 Etude de la dynamique globale d'un système ratio-dépendant:

3.2.1 présentation du modèle

Dans la dynamique de population, une réponse fonctionnelle du prédateur à la densité de proie se rapporte au changement de la densité de proie par unité de temps par prédateur en fonction de la densité de proie. La réponse fonctionnelle la plus importante et la plus utile est la fonction du type II de Michaelis-Menten ou de Holling du forme:

$$p(x) = \frac{cx}{m + x} \quad (3.1)$$

où

$c > 0$: taux de croissance maximal du prédateur,

$m > 0$: constante de moitié-saturation.

Puisque la fonction $p(x)$ dépend seulement de la densité de proie, il est habituellement appelé une fonction de réponse proie dépendante.

Des systèmes Prédateur-proie avec une réponse proie-dépendante ont été étudiés intensivement et la dynamique de tels systèmes sont maintenant très bien compris (par exemple, voyez Freedman [7] et les références cités ici).

Les modèles proie-dépendants traditionnels de prédateur-proie ont été défiés par plusieurs biologistes (Arditi et Ginzburg [3], Ardit, Ginzburg et Akcakaya [4], Akcakava [1], Gutierrez [9], etc...) basé sur le fait que la fonctionnel et les réponses numériques doivent dépendre des deux densités de proie et de prédateurs, particulièrement quand les prédateurs doivent rechercher la nourriture (et doit donc partager ou concurrencer pour

la nourriture).

Une telle réponse fonctionnelle s'appelle une fonction de réponse ratio-dépendante. Basé sur la fonction de Michaelis-Menten ou la fonction de type II de Holling, Arditi et Ginzburg [3] ont proposé un fonctionnel ratio-dépendant de la forme:

$$p\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\frac{cx}{y}}{m + \frac{x}{y}} = \frac{cx}{my + x} \quad (3.2)$$

et le modèle ratio-dépendant de prédateur-proie est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) - \frac{cxy}{my + x} \\ \dot{y} = y(-d + \frac{fx}{my + x}) \end{cases} \quad (3.3)$$

$x(t)$: densité de population de proie au temps t .

$y(t)$: densité de population de prédateur au temps t .

$\frac{a}{b} > 0$: capacité de charge de proie.

$d > 0$: taux de mortalité du prédateur.

$a > 0$: taux de croissance intrinsèque de proie.

$c > 0$: taux de serrage.

$m > 0$: constante de demi saturation.

$f > 0$: taux de conversion

Le modèle ratio-dépendant de prédateur-proie (3, 3) a été étudié par plusieurs chercheurs et il est observé la dynamique très riche de ce système. Freedman et Mathsen [8] ont limité leur analyse aux valeurs de paramètres qui assurent que l'équilibre $(0, 0)$ se comporte comme un point selle et établi des conditions pour la persistance du modèle. Jost, Arino et Arditi [11] ont étudié le comportement analytique à $(0, 0)$ pour un modèle ratio-dépendant général de prédateur-proie et ont prouvé que cet équilibre peut être un point de selle ou un attracteur pour certaines trajectoires. Ainsi, l'équilibre $(0, 0)$ a son propre bassin d'attraction dans l'espace de phase même si il existe un équilibre intérieur stable

ou instable.

Kuang et Beretta [13] ont étudié le comportement global des solutions du système (3, 3). Ils ont observé la dynamique très riche de frontière et ont montré que si l'équilibre positif du système (3, 3) est localement asymptotiquement stable, alors le système n'a aucune solution périodique positive non triviale (x^*, y^*) .

Kuang et Beretta ont mentionné qu'il restent beaucoup de questions intéressantes et provocantes concernant la dynamique du système (3, 3), comme l'existence et l'unicité d'un cycle de limite positif quand (x^*, y^*) existe et elle est instable, etc.

Comme observé par Freedman et Mathsen [8], Jost, Arino et Arditi [11], et Kuang et Beretta [13], le système (3, 3) n'est pas bien défini à l'origine $(0, 0)$ et ne peut pas être linéarisé ainsi à $(0,0)$. C'est la raison principale du système (3, 3) d'avoir une dynamique très riche et compliquée.

Dans ce chapitre, en redéfinissant le système à $(0, 0)$ et en faisant une transformation dans la variable de temps, nous transformons le système (3, 3) à un système polynomial. Le nouveau système est bien défini à $(0, 0)$ et peut être linéarisé à ce point. Cependant, la matrice Jacobiène à $(0, 0)$ est une matrice nulle.

En utilisant la terminologie d'Andronov et autres. [2] et Zhang et autre. [18], nous savons que $(0, 0)$ est un point critique d'un ordre plus supérieur du système (3, 3) (il est appelé un point critique non hyperbolique dans Perko [15]). En employant les résultats en Zhang et autres [18], nous étudierons les structures topologiques du système (3, 3) autour du point critique de l'ordre supérieur $(0, 0)$ à l'intérieur du premier quart de cercle et de leurs implications sur le comportement global des solutions.

Egalement nous réaliserons une étude qualitative globale sur le système (3, 3) dans le premier quart de cercle et prouverons que les comportements dynamiques est très intéressants tels que l'extinction déterministe, l'existence des attracteur multiples et des cycles de limite peuvent se produire.

3.2.2 L'équilibre du modèle

L'annulation des équations dynamiques dans le système (3, 3) nous permet de trouver les points d'équilibre de ce système.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \left[(a - bx) - \frac{cy}{my + x} \right] = 0 \\ y \left[-d + \frac{fx}{my + x} \right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } (a - bx) - \frac{cy}{my + x} = 0 \\ y = 0 \text{ ou } -d + \frac{fx}{my + x} = 0 \end{cases}$$

La résolution de la dernière équation donne les solutions suivantes:

$$\begin{cases} \text{si } x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (le système 3.3 n'est pas définie)} \\ \text{si } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (le système 3.3 n'est pas définie)} \\ \text{ou} \\ x = 1 \text{ (}\mathbf{1}, \mathbf{0}\text{) est un point d'équilibre} \end{cases} \\ \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \text{ est un point d'équilibre} \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} x^* = \frac{a}{b} - \frac{c(f-d)}{bmf} \\ y^* = \frac{f-d}{dm} x^* \end{cases}$$

Théorème

On considère une fonction $F(x, y)$ définie dans un domaine Ω , et non définie au point $N(\alpha_1, \alpha_2)$.

Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(x, y) = l$ existe, on dit que $F(x, y)$ admet un prolongement par continuité en N .

Soit la fonction $G(x, y)$ telle que: $G(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (\alpha_1, \alpha_2) \\ l & \text{si } (x, y) = (\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$

Pour notre exemple, nous avons $\Omega = R^2 - \{(x, y) \in R^2 : y \neq -x\}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(a - bx) - c \frac{xy}{x+y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{cxy}{x+y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}. \text{ Or, } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

On pose $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$. Où $r \rightarrow 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ Alors:

$$\left| \frac{xy}{x+y} \right| = \left| \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r (\cos(\theta) + \sin(\theta))} \right| = |r| \left| \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right| \leq |r| \left| \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right|$$

$$|r| \rightarrow 0 \text{ et } \left| \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right| \in R \implies |r| \left| \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right| \rightarrow 0. \text{ Donc, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0$$

De même, nous prouvons aussi que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) = 0$.

Par conséquent, le système (2.25) possède les points d'équilibre: $(x = 0, y = 0)$, $(x = 1, y = 0)$ et $(x = x^*, y = y^*)$.

Remarque:

Le système (3. 3) a toujours un équilibre positif unique (x^*, y^*) si et seulement si les deux conditions suivantes se tient:

- i) $d < f$ et $c \leq ma$;
- ii) $d < f < \frac{cd}{c - am}$ et $am < c$

La particularité mathématique importante du système (3, 3) est que l'origine est un point d'équilibre compliqué non-analytique. Les structures au voisinage de l'origine dans le premier quadrant et les asymptotes des trajectoires qui tendent à l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$ dépendent des valeurs des paramètres et peuvent changer d'une manière essentielle avec un changement des paramètres.

3.2.3 Comportement asymptotique du système (3,3) à (0, 0):

le système (3, 3) n'est pas bien défini à (0, 0)

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) - \frac{cxy}{my + x} \\ \dot{y} = y(-d + \frac{fx}{my + x}) \\ \dot{x} = \dot{y} = 0 \quad \text{quand} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

Il est facile de montrer que le système (3, 4) est continu et satisfait à la condition de Limschitz dans le premier quart de cercle fermé dans le plan (x, y). Cependant, le système (3, 4) ne peut pas être linéarisé à (0, 0). La stabilité tellement locale de (0, 0) ne peut pas être étudiée. Notez que nous intéressons seulement au dynamique du système (3, 4) à l'intérieur du premier quadrant. Ainsi, nous pouvons faire un changement d'échelle de temps:

$$dt = (my + x)d\tau$$

tels que le système (3, 4) est équivalent au système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^2 - (am - c)xy - bx^3 - bmx^2y = X_2(x, y) + \phi(x, y) \\ \dot{y} = (f - d)xy - dmy^2 = Y_2(x, y) \end{cases} \quad (3.5)$$

où X_2 et Y_2 sont des polynômes homogènes de degré 2 et $\phi(x, y)$ est donnée par la relation suivante:

$$\phi(x, y) = -bx^3 - bmx^2y$$

L'équilibre (0, 0) du système (3, 5) est un point critique d'isolement d'un ordre plus supérieur. Evidemment, le système (3, 5) est analytique dans un voisinage d'origine. Par théorème 3.10 à la page 79 de [18]. N'importe quelle orbite de (3, 5) qui tendre à l'origine doivent tendre à lui en spirale ou le long d'une direction fixe qui dépend de l'équation caractéristique du système (3, 5).

Dans cette partie nous prouverons que si une orbite de solution de (3, 5) tend à l'origine

il doit tendre à lui le long d'une direction fixe. Nous déterminerons également le nombre d'orbites de solution de système (3, 5) qui tendent à (0, 0) le long d'une direction fixe quand $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$ à l'intérieur du premier quart de cercle.

Tout d'abord, nous présentons les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et définissons

$$G(\theta) = \cos\theta Y_2(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta X_2(\cos\theta, \sin\theta)$$

Alors l'équation caractéristique du système (3, 5) prend la forme:

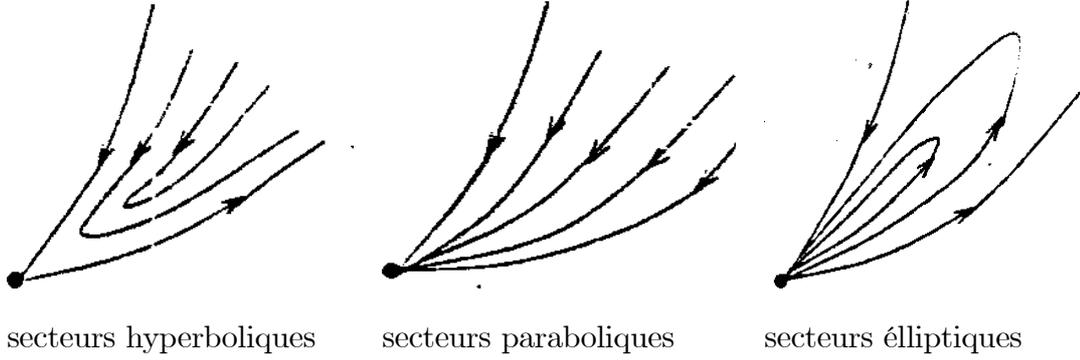
$$G(\theta) = \sin\theta \cos\theta[(c - am - dm)\sin\theta + (f - d - a)\cos\theta] = 0 \quad (3.6)$$

$G(\theta) = 0$ a un nombre fini de racines réelles θ_k ($k=1,2,\dots,n$) ou $G(\theta) \equiv 0$. Par les résultats dans la section II.2 dans [18], nous savons qu'aucune orbite du système (3, 5) ne peut tendre au point critique (0, 0) en spirale. C'est un cas singulier si $G(\theta) \equiv 0$; et si $G(\theta)$ n'est pas identiquement zéro; alors il y a 6 directions de $\theta = \theta_i$ le long dont une orbite du système (3, 5) peut approcher l'origine.

Ces directions $\theta = \theta_i$; sont donnés par des solutions de l'équation (3, 6). Si les orbites du système (3, 5) tendent à l'origine quand $t \rightarrow \pm\infty$ le long d'une direction $\theta = \theta_i$ la direction s'appelle une direction caractéristique.

Les orbites du système (3, 5) qui approchent l'origine le long des directions caractéristiques divisent un voisinage d'origine en nombre fini de régions ouvertes, appelé les secteurs. Pour un système analytique ces secteurs peuvent être classifiés dans trois types appelés les secteurs hyperbolique, secteurs paraboliques, et les secteurs elliptiques, respec-

tivement.



Maintenant, nous discuterons trois cas selon le nombre des racines réelles de l'équation caractéristique (2,3) dans $0 \leq \theta \leq \frac{\Pi}{2}$.

f-d-a=0 et c-am-dm=0:

Dans ce cas, $G(\theta) \equiv 0$, qui est un cas singulier. En utilisant la transformation de Briot-Bouquet $y = ux$. Le système (3, 5) dans I^+ est transformé en:

$$\begin{aligned} \dot{u} = \frac{y}{x} &\Rightarrow \dot{u} = \frac{1}{x} \dot{y} - \frac{y}{x^2} \dot{x} \\ &= \frac{1}{x} \dot{y} - \frac{u}{x} \dot{x} \end{aligned}$$

En remplaçant \dot{x} et \dot{y} par leurs expressions alors \dot{u} devient:

$$\dot{u} = -bx^2(u + mu^2)$$

Le système (3, 5) dans I^+ est transformé en:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax^2 + (am - c)x^2u - bx^3 - bmx^3u \\ \dot{u} &= -bx^2(u + mu^2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sur le plan (u, x) le système (3, 7) peut être écrire comme:

$$\frac{dx}{du} = \frac{a + (am - c)u - b(1 + mu)x}{-b(u + mu^2)} \tag{3.8}$$

L'équation (3, 8) a une solution générale de la forme:

$$x = \frac{a}{b} + ku + \frac{cu}{b} \ln \frac{u}{1+mu}$$

Où k est un constant arbitraire. Donc la solution général du système (3, 5) dans I^+ est

$$x = \frac{a}{b} + k\frac{y}{x} + \frac{cy}{bx} \ln \frac{y}{my+x}$$

comme $f-d-a=0$ et $c-am-dm=0$. La structure topologique des orbites du système (3, 4) à l'intérieur du premier quart de cercle se compose d'un secteur elliptique et d'un secteur parabolique.

Exemple1

$a=1, b=1, c=2, m=1, d=1$ et $f=2$.

$$(3, 4) \iff \begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{2xy}{y+x} \\ \dot{y} = y(-1 + \frac{2x}{y+x}) \end{cases}$$

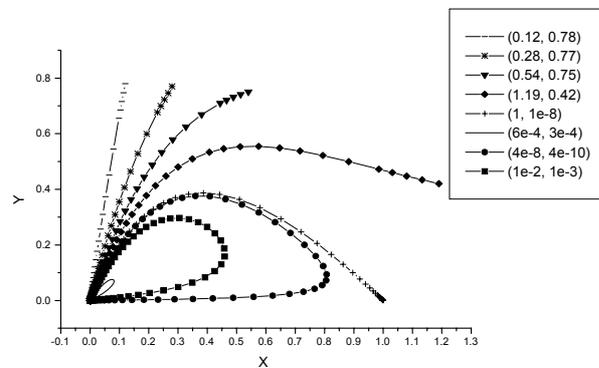


Figure 3.1: Structure topologique du système (3, 4) à (0, 0).

$(f-d-a)(c-am-dm)=0$ mais l'un des deux n'est pas nulle

Dans ce cas l'équation (3, 6) a deux racines dans $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta=0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Pour déterminer si il existe une orbite du système (3, 5) qui tend à l'origine le long d'une direction θ_i ($i = 1, 2$) quand $t \rightarrow \pm\infty$ Nous devons calculer les dérivés de $G(\theta)$ et de la fonction $H(\theta)$.

$$G'(\theta) = \sin\theta\cos\theta[(c - am - dm)\cos\theta - (f - d - a)\sin\theta] + \cos 2\theta[(c - am - dm)\sin\theta + (f - d - a)\cos\theta]$$

$$H(\theta) = \sin\theta Y_2(\cos\theta, \sin\theta) + \cos\theta X_2(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= a\cos^3\theta - dm\sin^3\theta - \cos\theta\sin\theta[(f - d)\sin\theta + (am - c)\cos\theta]$$

$$G''(\theta) = 2\cos 2\theta[(c - am - dm)\cos\theta - (f - d - a)\sin\theta] - 5\sin\theta\cos\theta \begin{bmatrix} (c - am - dm)\sin\theta + \\ (f - d - a)\cos\theta \end{bmatrix}$$

f-d-a \neq 0 et c-am-dm=0

Dans ce cas, θ_1 est une racine simple et θ_2 est une racine multiple avec une multiplicité 2 de (3, 6). Nous avons:

Théorème 1

Supposant, que $f - d - a \neq 0$ et $c - am - dm = 0$ alors

(a) Ils existent $\theta_1 > 0$ et $r_1 > 0$ tels que:

i) Si $f - d - a > 0$, tous les orbites du systèmes (3, 5) dans $\{0 \leq \theta < \theta_1, 0 < r < r_1\}$ tendent à (0,0) le long de θ_1 quand $t \rightarrow -\infty$;

(b) Ils existent $\theta_2 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que toutes les orbites du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq \frac{\pi}{2} < \theta_2, 0 < r < r_2\}$ tendent à (0, 0) le long θ_2 quand $t \rightarrow +\infty$.

f.-d-a=0 et c-am-dm \neq 0

Dans ce cas, θ_2 est une racine simple de (3, 6) et θ_1 est une racine multiple avec une multiplicité 2 de (3, 6). Nous avons:

Théorème 2

Supposons que $f - d - a = 0$ et $c - am - dm \neq 0$. Alors

(a) Il existent $\theta_3 > 0$ et $r_3 > 0$ tels que toutes les orbites du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq \theta < \theta_3, 0 < r < r_3\}$ tendent à (0,0) le long de θ_1 quand $t \rightarrow -\infty$; et

(b) Il existent $\theta_4 > 0$ et $r_4 > 0$ tels que:

(i) si $c - am - dm > 0$, toutes les orbites du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta < \theta_4, 0 < r < r_4\}$ tendent à (0,0) le long de θ_2 comme $t \rightarrow +\infty$;

(ii) si $c - am - dm < 0$, il existe une orbite unique du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta < \theta_4, 0 < r < r_4\}$ qui tend à (0,0) le long de θ_2 quand $t \rightarrow +\infty$.

$$(f-d-a)(c-am-dm) \neq 0$$

Dans ce cas, nous discutons deux cas secondaires parce que nous considérons seulement (3, 6) dans $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(A) Si $(f-d-a)(c-am-dm) > 0$, alors l'équation (3, 6) a deux racines simples: $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

(B) Si $(f-d-a)(c-am-dm) < 0$, alors l'équation (3, 6) a trois racines simples: θ_1 , θ_2 et $\theta_3 = \arctan \frac{a+d-f}{c-am-dm}$

Pour le cas (A), nous avons le théorème suivant selon les théorèmes 3.4 et 3.7 dans [18].

Théorème 3

Supposons que $(f-d-a)(c-am-dm) \neq 0$. Alors

(a) Ils existent $\theta_5 > 0$ et $r_5 > 0$ tels que:

(i) Si $f-d-a > 0$, toutes les orbites du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq \theta < \theta_5, 0 < r < r_5\}$ tend à (0, 0) le long de θ_1 quand $t \rightarrow -\infty$;

(ii) Si $f-d-a < 0$, il existe une orbite unique du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq \theta < \theta_5, 0 < r < r_5\}$ qui tend à (0, 0) le long de θ_1 quand $t \rightarrow -\infty$; et

(b) Ils existent $\theta_6 > 0$ et $r_6 > 0$ tels que:

(i) Si $c-am-dm > 0$, toutes les orbites du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta < \theta_6, 0 < r < r_6\}$ tendent à (0,0) le long de θ_2 .

Pour le cas (B), nous prenons les mêmes résultats pour θ_1 et θ_2 que dans le théorème ci-dessus 2.3. Ainsi, nous considérons seulement θ_3 .

Théorème 4.

Supposons que $f-d-a > 0$ et $c-am-dm < 0$. Alors:

(a) Ils existent $\theta_7 > 0$ et $r_7 > 0$ tels que il existe une orbite unique du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq |\theta - \theta_3| < \theta_7, 0 < r < r_7\}$ qui tend à (0,0) le long de θ_3 quand $t \rightarrow -\infty$ où l'un des conditions suivantes se tient

i) $a+d < f$ et $c \leq am$, ou

ii) $a + d < f < \frac{cd}{c - am}$ et $am < c < am + dm$; et

(b) Il existe $\theta_8 > 0$ et $r_8 > 0$ tel que tous les orbites du système (3, 5) dans

$\{(\theta, r) : 0 \leq |\theta - \theta_3| < \theta_8; 0 < r < r_8\}$ tendent à $(0, 0)$ le long θ_3 quand $t \rightarrow +\infty$ ou $\frac{cd}{c - am} \leq f$ et $am < c < am + dm$.

Théorème 5

Supposons que $f - d - a < 0$ et $c - am - dm > 0$. Alors

(a) Il existe $\theta_9 > 0$ et $r_9 > 0$ tels que il existe une orbite unique du système (3, 5) dans

$\{(\theta, r) : 0 \leq |\theta - \theta_3| < \theta_9; 0 < r < r_9\}$ qui tend à $(0, 0)$ le long de θ_3 quand $t \rightarrow +\infty$ si l'un des conditions suivantes se tient:

(i) $f \leq d$ et $am + dm < c$. Ou

(ii) $d < f < \frac{cd}{c - am}$ et $am + dm < c$; et

(b) Il existe $\theta_{10} > 0$ et $r_{10} > 0$ tels que il existe un nombre fini des orbites du système (3, 5) dans $\{(\theta, r) : 0 \leq |\theta - \theta_3| < \theta_{10}; 0 < r < r_{10}\}$ qui tendent à $(0, 0)$ le long de θ_3 quand $t \rightarrow -\infty$ où $\frac{cd}{c - am} \leq f < a + d$ et $am + dm < c$.

Nous avons discuté l'existence et le nombre d'orbites du système (3, 4) qui tendent au point critique $(0, 0)$ le long des directions fixes. Cependant, une telle information ne fournit pas assez de connaissance au sujet de la structure topologique au voisinage de l'origine dans I^+ , c.-à-d., elle ne nous indique pas le nombre et le genre des secteurs. Pour ce but nous devons étudier le comportement des orbites du système (3, 4) dans tout I^+ (I^+ entier).

3.2.4 Existence et stabilités des équilibres du système $((\frac{a}{b}, 0), (x^*, y^*))$

Le système (3, 4) a toujours un équilibre de frontière $(\frac{a}{b}, 0)$ et un équilibre intérieur. Un équilibre intérieure unique du système (3, 4) existe si et seulement si n'importe quels des conditions suivantes se tiennent:

i) $d < f$ et $c \leq ma$;

ii) $d < f < \frac{cd}{c - am}$ et $am < c$.

Dans les deux cas l'équilibre intérieure est (x^*, y^*) où

$$\begin{cases} x^* = \frac{a}{b} - \frac{c(f-d)}{bmf} \\ y^* = \frac{f-d}{dm}x^* \end{cases}$$

Etude de $(\frac{a}{b}, 0)$

La Jacobiënne du système (3, 4) au point $(\frac{a}{b}, 0)$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} -a & -c \\ 0 & f-d \end{bmatrix}$$

Le déterminant de ce matrice est: $det = -a(f-d)$, ainsi l'équation caractéristique est donnée par

$$(-a - \lambda)(f - d - \lambda) = 0$$

et les valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = -a$$

$$\lambda_2 = f - d$$

Discussion

i) Si $f > d$ alors l'équilibre $(\frac{a}{b}, 0)$ est un point selle et l'axe des abscisses x positif est divisé par ce point en deux parties. Ils ya deux séparatrices qui approchent asymptotiquement l'équilibre quand $t \rightarrow +\infty$. Il existe également un séparatrice unique dans I^+ qui tend à $(\frac{a}{b}, 0)$ quand $t \rightarrow -\infty$.

ii) Si $f < d$, $(\frac{a}{b}, 0)$ est un noeud stable..

iii) Si $f = d$, $(\frac{a}{b}, 0)$ est ***saddle node***

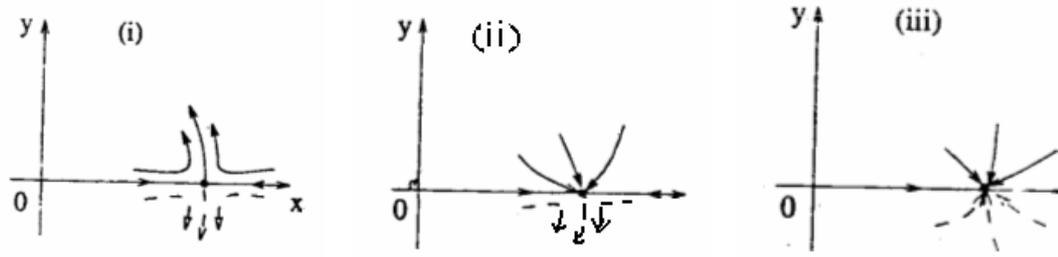


Figure 3.2: Structures topologiques du système 3.4 à l'équilibre $(\frac{a}{b}, 0)$ quand $f > d$, $f < d$ et $f = d$

Etude de (x^*, y^*)

La Jacobiënne du système (3, 4) au point (x^*, y^*) est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} -bx^* + \frac{cx^*y^*}{(my^* + x^*)^2} & -\frac{c(x^*)^2}{(my^* + x^*)^2} \\ \frac{fm(y^*)^2}{(my^* + x^*)^2} & -\frac{fmx^*y^*}{(my^* + x^*)^2} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de A est toujours positive et leur trace est donnée par

$$\begin{aligned} trA &= -bx^* + (c - fm) \frac{x^*y^*}{(my^* + x^*)^2} \\ &= \frac{cf^2 + md^2f - am.f^2 - dm.f^2 - cd^2}{m.f^2} \end{aligned}$$

Il est clair que (x^*, y^*) est localement asymptotiquement stable (instable) si le $trA < 0$ ($trA > 0$, respectivement) quand le $detA > 0$.

Théorème 1

1)

i)

ii)

iii) $d < f < \frac{-md^2 + \sqrt{\Delta}}{2(c - am - dm)}$ et $0 < c - am - dm$, où $\Delta = m^2d^4 + 4cd^2(c - am - dm)$.

2) (x^*, y^*) est instable si:

$$\text{iv) } \frac{-md^2 + \sqrt{\Delta}}{2(c - am - dm)} < f < \frac{cd}{c - am} \text{ et } 0 < c - am - dm.$$

3) (x^*, y^*) est non hyperbolique si:

$$\text{v) } f = \frac{-md^2 + \sqrt{\Delta}}{2(c - am - dm)} \text{ et } 0 < c - am - dm.$$

Du théorème ci-dessus, nous savons donc que l'équilibre intérieur unique (x^*, y^*) du système (3, 4) est un équilibre non hyperbolique de type central quand $f = \frac{-md^2 + \sqrt{\Delta}}{2(c - am - dm)}$ et $c - am - dm > 0$

Par conséquent, le système (3, 4) peut avoir la bifurcation de Hopf. Pour déterminer la stabilité de l'équilibre et la direction de la bifurcation de Hopf dans ce cas nous devons calculer les coefficients de Liapunov de l'équilibre.

Théorème 2

Si $f = \frac{-md^2 + \sqrt{\Delta}}{2(c - am - dm)}$ et $0 < c - am - dm$. Alors le système (3, 4) a un équilibre intérieur unique (x^*, y^*) , qui est un foyer stable de multiplicité un.

Des théorèmes 1 et 2, nous savons que le système (3, 4) subit une bifurcation de Hopf pour quelques valeurs de paramètre. Le cycle de limite créé par la bifurcation de hopf sera présenté dans la figure 2 et discuté dans la prochaine section.

Exemple:

$$a = 1, b = 1, c = 2, m = 1, d = 0.5 \text{ et } f = 0.782$$

$$(3, 4) \iff \begin{cases} \dot{x} = x(1 - x) - \frac{2xy}{y + x} \\ \dot{y} = y(-d + \frac{0.782x}{y + x}) \end{cases}$$

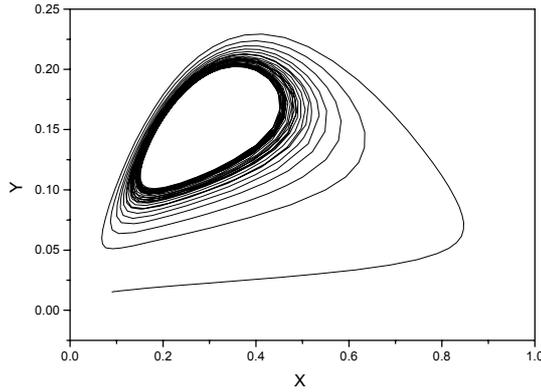


Figure 3.3: Bifurcation de Hopf
au point $(0.09, 0.01527)$

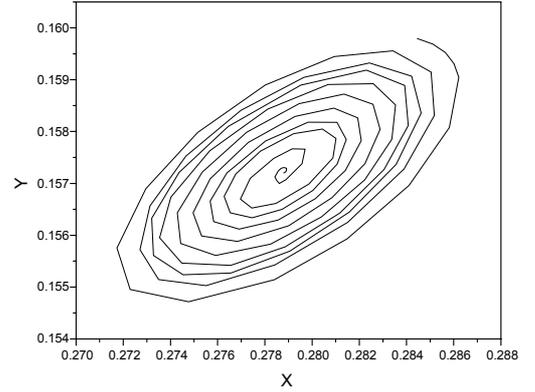


Figure 3.4: Cycle de limite crier par la
bifurcation de Hopf autour de l'équilibre
non triviale (x^*, y^*)

3.2.5 Les surfaces de bifurcation du système (3, 4)

Pour facilité le traces des surfaces de bifurcation du système (3, 4) qui possède six paramètres nous faisons un changement des variables pour réduisais se nombres de paramètres.

$$t \rightarrow at, \quad x \rightarrow \frac{x}{K}, \quad y \rightarrow \frac{m}{K}y \quad \text{avec } K = \frac{a}{b}$$

Alors le système (3, 4) prend une forme plus simple donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{axy}{y+x} \\ \dot{y} = \delta y(-r + \frac{x}{y+x}) \end{cases} \quad (3.9)$$

avec trois paramètres

$$s = \frac{c}{ma}, \quad \delta = \frac{f}{a}, \quad r = \frac{d}{f}$$

On pose $\delta r = \gamma$, le système (3, 9) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{sxy}{y+x} \\ \dot{y} = -\gamma y + \frac{\delta x}{y+x} \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous allons diviser l'espace de paramètres (γ, δ, s) en huit domaines correspondants pour un taux de mortalité de prédateurs γ arbitrairement fixé. Chaque domaine doit être associé à un plan de phase d'une telle manière que les frontières entre les domaines correspondent aux bifurcations du système.

$$\text{MM} : \begin{cases} \delta = \gamma + 1 \\ s < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{figures 3.10, 3.8.}$$

$$\text{NN} : \begin{cases} s = \gamma + 1 \\ \delta < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{figures 3.9, 3.10}$$

$$\alpha : s = \delta = \gamma + 1 \quad \text{figures 3.9, 3.10.}$$

$$\text{H} : \begin{cases} s = \frac{\delta \left(\gamma + \frac{\delta}{\delta - \gamma} \right)}{\delta + \gamma} \\ \gamma < \delta < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{figures 3.9, 3.5.}$$

$$\text{BA} : \delta = s \quad \text{figures 3.10, 3.8.}$$

$$\text{BO} : s = \frac{\delta}{\delta - \gamma} \quad \text{figures 3.9, 3.6, 3.10.}$$

Pour MM et NN: Changement de structure topologique au voisinage du point d'équilibre O pour des valeurs de paramètres γ, s et δ correspondant à ces surfaces. Voir [19 (*article amine*)]

H: Bifurcation supercritique d'Andronov-hopf. figures (3.2.b) (3.2.f)

BO et BA: Apparition ou disparition de B.

L: Apparition ou disparition des contours hétérocliniques. C'est à dire, ceux qui corres-

pondent aux bifurcations hétérocliniques, constitués par les séparateurs des points d'équilibre O et A. Cette frontière est associée à une bifurcation non locale. figure (3.2.c).

α : Le système 3.10 a une première intégrale de la forme:

$$(\gamma + 1) \ln \left(\frac{x + y}{x} \right) - y \left(1 + \frac{\gamma}{x} \right) = C$$

où C est une constante arbitraire.

Toutes les surfaces de frontières correspondent aux bifurcations de la Co-dimension 1.

Les lignes de l'intersection ou de contact entre les surfaces de frontières correspondent aux bifurcations de la Co-dimension 2.

La figure 3-10 représente le portrait de paramètres du système 3.10 pour une certaine valeur de paramètre typique γ arbitrairement fixé.

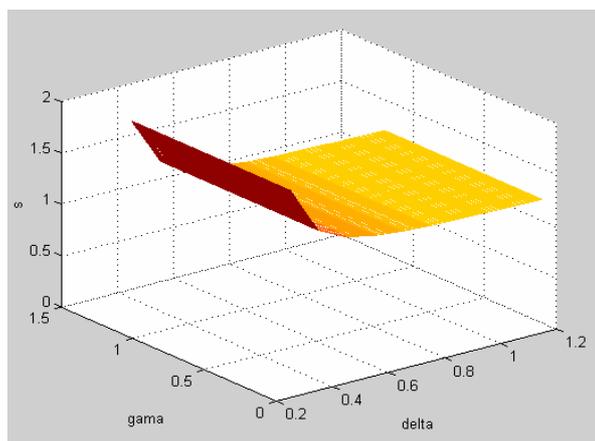


Figure 3.5: Surface de bifurcation:
La frontière H.

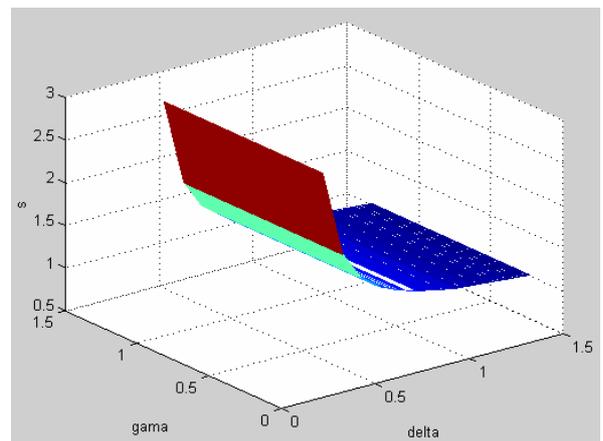


Figure 3.6: Surface de bifurcation:
La frontière BO.

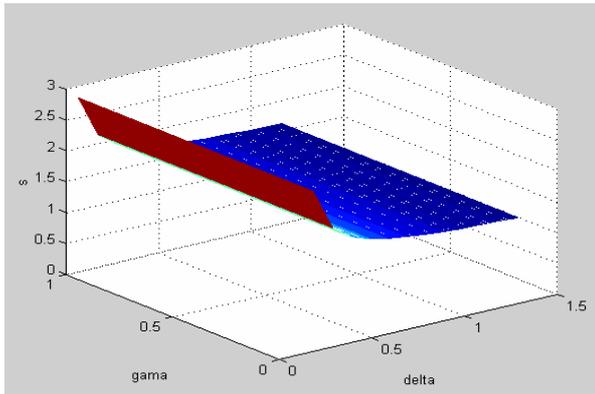


Figure 3.7: Surface de bifurcation:
La frontière L.

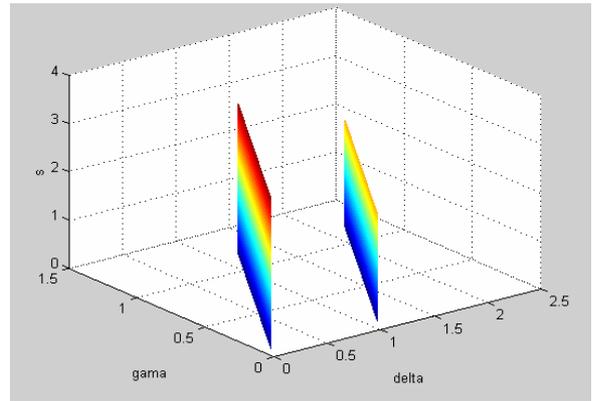


Figure 3.8: Surfaces de bifurcation:
Les frontières MM et BA.

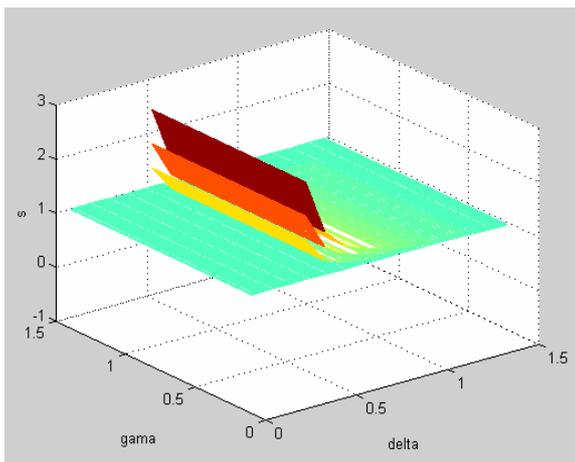


Figure 3.9: Diagramme de bifurcation
pour un γ arbitrairement fixé.

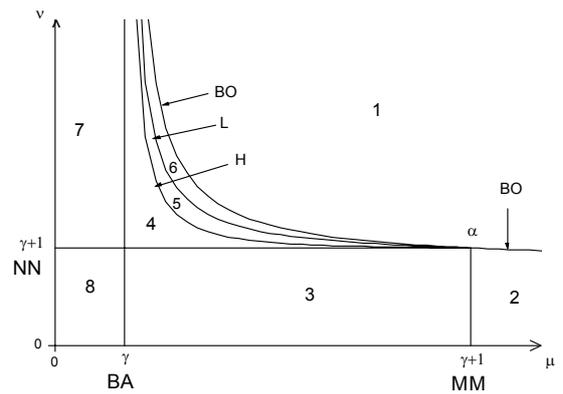


Figure 3.10: Ligne d'intersection α des
surfaces de bifurcation BO, L, NN,
et H α : $\delta=\gamma+1, s=\gamma+1$.

3.2.6 Dynamique globale du système (3.4)

Dans cette partie Nous récapitulons les résultats trouvés ci-dessus concernant les trois points d'équilibre, et nous classifions la dynamique globale du système (3.4) selon tous les paramètres.

Théorème 1

Le système (3.4) n'a aucun équilibre intérieur et $(0, 0)$ est un attracteur global dans I^+ si n'importe quelles des conditions suivantes se tient.

- i) $f - d - a > 0$ et $c - am - dm \geq 0$;
- ii) $f - d - a = 0$ et $c - am - dm \geq 0$;
- iii) $f \geq \frac{cd}{c - am}$ et $am + dm > c > am$;
- iv) $a + d > f \geq \frac{cd}{c - am}$ et $c - am - dm > 0$.

La structure topologique de l'origine dans I^+ se compose d'un secteur elliptique et d'un secteur parabolique. Le portrait de phase du système dans l'un de ces cas est présenté dans la figure 3.11.

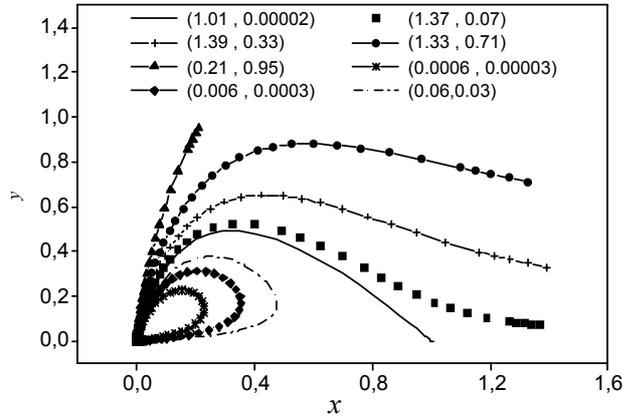


Figure 3.11: Structure topologique du système non linéaire à $(0,0)$ pour: $a=0.5$, $b=0.5$, $c=1$, $m=1$, $d=0.4$ et $f=1$.

Par les conditions suffisantes et nécessaires de l'existence d'un équilibre intérieur du système (3.4) étudié dans le paragraphe précédent, nous pouvons voir que ce système

n'a aucun équilibre intérieur pour tous les cas dans le théorème 1. Il est Clair, que n'importe quels cas dans ce théorème implique que $f > d$. Ainsi l'équilibre $(\frac{a}{b}, 0)$ est un point selle. Il existe aussi θ_0 et r_0 tel que toutes les orbites du système (3.4) dans $\left\{(\theta, r) : 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta < \theta_0; 0 < r < r_0\right\}$ tendent à $(0,0)$ le long de θ_2 quand $t \rightarrow -\infty$ si l'un des conditions i), ii) et iv) se tient. Cependant, si la condition ii) se tienne il existe $\bar{\theta}$ et \bar{r} tels que toutes les orbites du système (3.4) dans $\left\{(\theta, r) : 0 \leq |\theta - \theta_3| < \bar{\theta}; 0 < r < \bar{r}\right\}$ tendent à $(0,0)$ le long de θ_3 quand $t \rightarrow +\infty$.

Théorème 2

Si $f \leq d$ et $c - am - dm < 0$, alors le système (3.4) n'a aucun équilibre intérieur et l'équilibre $(\frac{a}{b}, 0)$ est un attracteur globale dans I^+ (noeud stable). La structure topologique de l'origine du système dans I^+ consiste d'un secteur hyperbolique. (Voire figure 3.12 et 3.13)

Exemple:

$$a = 0.5, b = 0.5, c = 0.8, m = 1, d = 0.4, f = 0.3$$

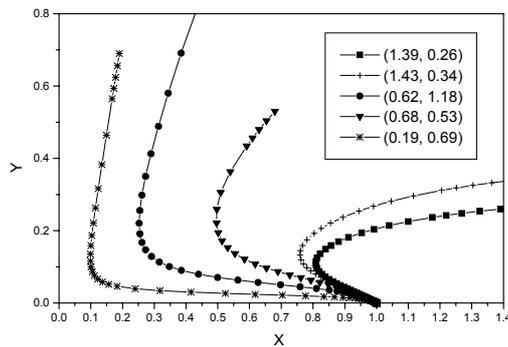


Figure 3.12: Portrai de phase du système (3.4) au point $(\frac{a}{b}, 0)$ qui est un attracteur globale.

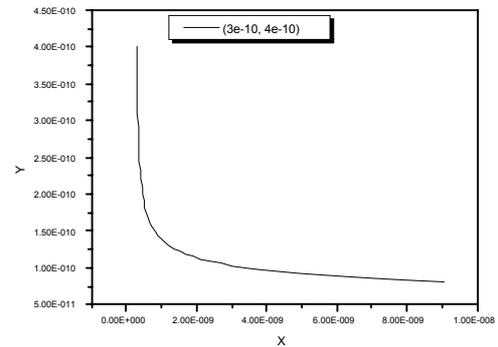


Figure 3.13: Portrai de phase du système (3.4) au point $(0, 0)$ qui consiste d'un secteur hyperbolique.

Théorème 3

Le système (3.4) n'a aucun équilibre intérieur, $(0, 0)$ et $(\frac{a}{b}, 0)$ sont des attracteurs dans

I^+ si $f \leq d$ et $am + dm \leq c$. D'ailleurs, la structure topologique de l'origine se compose d'un secteur hyperbolique et un secteur parabolique. (Voire figure 3.14 et 3.15)

Exemple

$$a = 0.5, b = 0.5, c = 1, m = 1, d = 0.4, f = 0.3$$

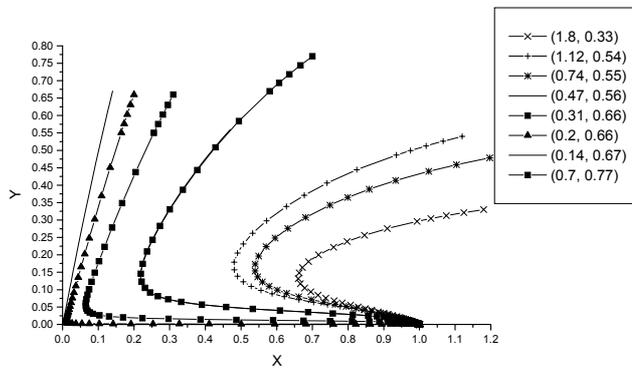


Figure 3.14: Portrai de phase du système (3.4) au point $(\frac{a}{b}, 0)$ qui est un attracteur.

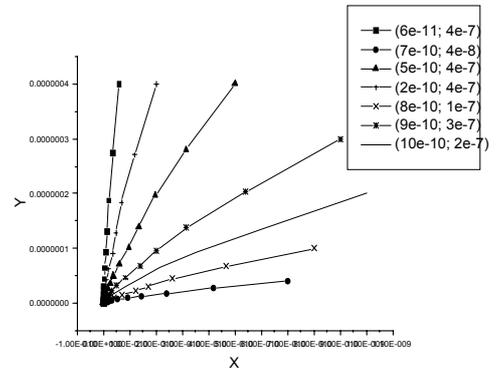


Figure 3.15: Portrai de phase du système (3.4) au point $(0, 0)$ qui est un attracteur.

Théorème 4

Si $d < f < a + d$ et $c - am - dm < 0$, alors le système (3.4) à un équilibre intérieur unique qui est un attracteur globale (localement asymptotiquement stable). Puis si $d < f$, alors $(\frac{a}{b}, 0)$ est un point selle. La structure topologique de l'origine consiste d'un secteur hyperbolique. (Voire figure 3.16 et 3.17).

Exemple

$$a = 0.5, b = 0.5, c = 0.4, m = 1, d = 0.4, f = 0.6$$

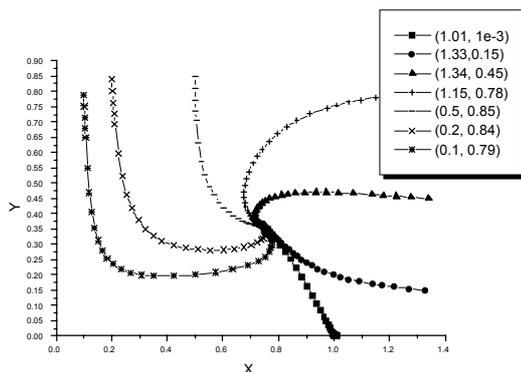


Figure 3.16: Portrai de phase du système (3.4) au point (x^*, y^*) qui est un attracteur globale.

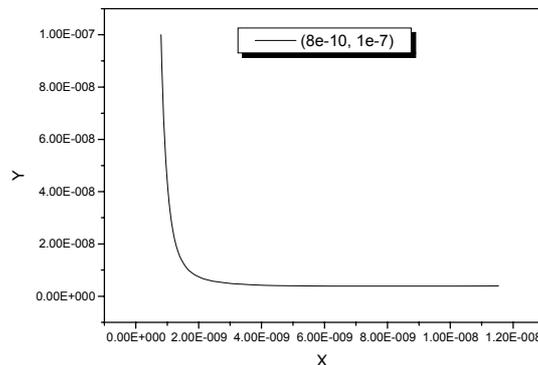


Figure 3.17: Portrai de phase du système (3.4) au point $(0, 0)$ qui consiste d'un secteur hyperbolique.

Théorème 5

le système (3.4) à un équilibre intérieur unique qui est un attracteur globale (localement asymptotiquement stable). Si n'importe quelles des conditions suivantes se tient

- i) $f - d - a = 0$ et $am + dm > c$;
- ii) $f - d - a > 0$ et $am \geq c$;
- iii) $\frac{cd}{c - am} > f > a + d$ et $am + dm > c > am$.

D'ailleurs, $(\frac{a}{b}, 0)$ est un point selle et la structure topologique de l'origine consiste d'un secteur hyperbolique et un secteur parabolique. (Voire figure 3.18 et 3.19).

Exemple

$$a = 1, b = 1, c = 1.2, m = 1, d = 1, f = 3.$$

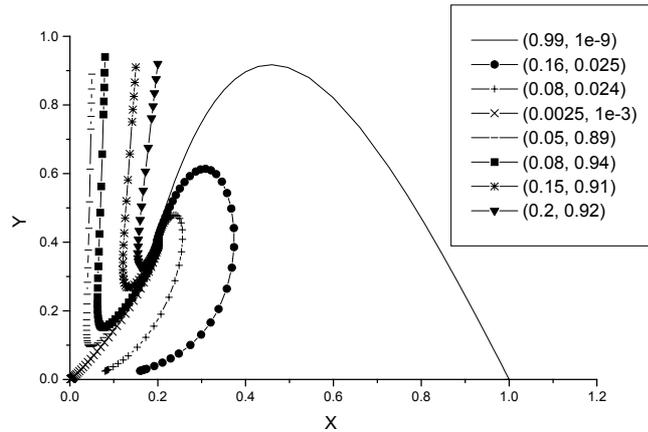


Figure 3.18: Portrai de phase du système (3.4) au point (x^*, y^*) qui est un attracteur globale.

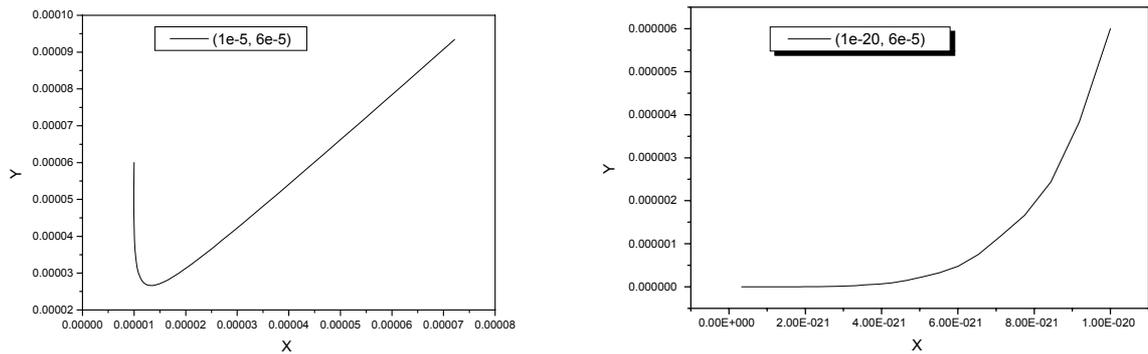


Figure 3.19: Structure topologique de l'origine qui consiste d' un secteur hyperbolique et un secteur parabolique

Théorème 6

Supposons que l'un des conditions suivantes se tient:

- i) $a + d > f > d$ et $c - am - dm = 0$;
- ii) $\frac{-md^2 + \sqrt{\Delta}}{2(c - am - dm)} \geq f > d$ et $c > am + dm$

Le système (2,1) à un équilibre intérieur unique et aucun cycle de limite, les deux points

d'équilibres $(0, 0)$ et (x^*, y^*) sont des attracteurs. La structure topologique de l'origine consiste d'un secteur hyperbolique et un secteur parabolique. (Voire figure 3.20).

Exemple

$$a = 1, b = 1, c = 2, m = 1, d = 0.5, f = 0.7$$

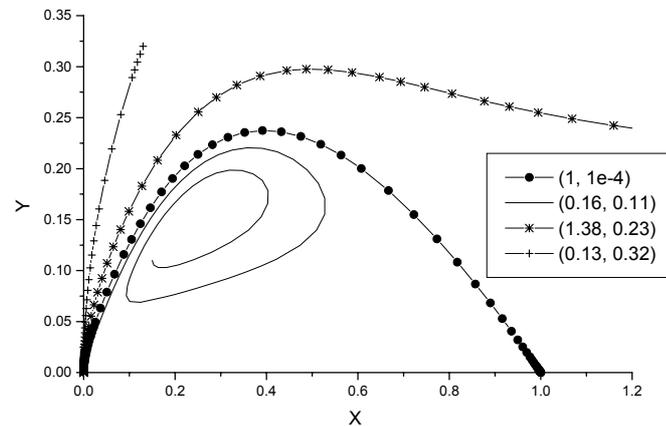


Figure 3.20: Portrait de phase du système (3.4) aux points $(0, 0)$ et (x^*, y^*) qui sont des attracteurs.

Théorème 7

Supposons que $\frac{cd}{c - am} > f > \frac{-md^2 + \sqrt{\Delta}}{2(c - am - dm)}$ et $c > am + dm$. Le système (3.4) à un équilibre intérieur unique et peut avoir un cycle de limite unique qui est stable si elle existe. Plus de précision, pour quelques paramètres le système a un cycle de limite stable unique dans I^+ et il y a un secteur parabolique dans lequel toutes les orbites du système approchent $(0,0)$ quand $t \rightarrow +\infty$. (Regarder la figure 3.21) et pour quelque autre paramètre le système na aucun cycle de limite. (Voire figure 3.22)

Exemple1

$$a = 1, b = 1, c = 2, m = 1, d = 0.5, f = 0.782.$$

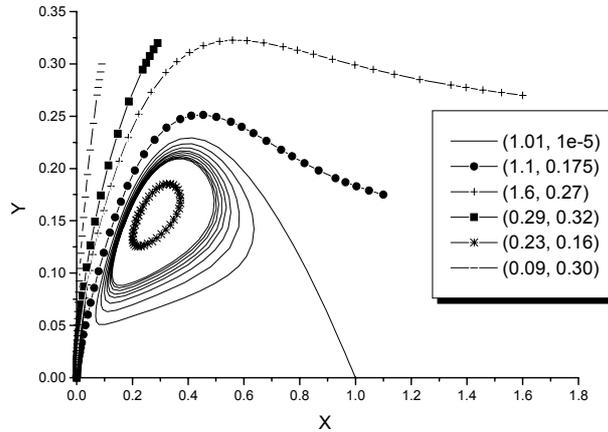


Figure 3.21: Portrait de phase du système (3.4) aux points $(0, 0)$ qui est un attracteur et l'existence d'un cycle de limite entourant (x^*, y^*) qui est un foyer instable.

Exemple2

$$a = 1, b = 1, c = 2, m = 1, d = 0.5, f = 0.8$$

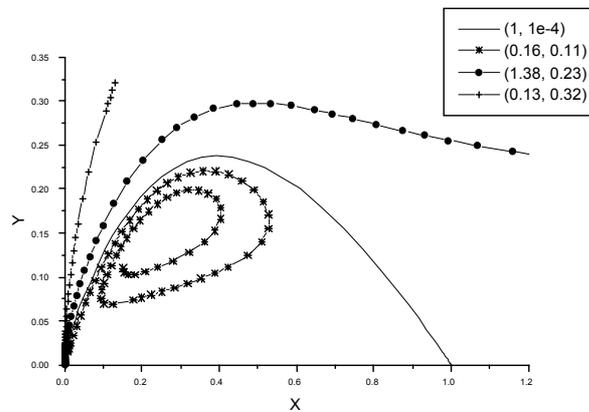


Figure 3.22: Portrait de phase du système (3.4) aux points $(0, 0)$ qui est un attracteur, $(\frac{a}{b}, 0)$ qui est un point selle et (x^*, y^*) qui est un foyer instable.

Le cycle de limite est cassé quand f est devenue grande.

3.3 Application de la dérivée optimale à l'étude de la stabilité du système ratio- dépendant à l'origine

La particularité mathématique importante du système (3.4), est que l'origine est un point d'équilibre compliqué non-analytique. Les structures au voisinage de l'origine dans le premier quadrant dépendent des valeurs de paramètres et peuvent changer d'une manière essentielle avec un changement de ces paramètres.

Nous avons discuté l'existence et le nombre d'orbites du système (3.4) qui tendent au point critique $(0, 0)$ le long des directions fixes. Cependant, les solutions orbites du système qui approchent l'origine le long des directions caractéristiques divisent un voisinage d'origine en nombre fini de régions ouvertes, appelé les secteurs. Pour un système analytique ces secteurs peuvent être classifiés dans trois types appelés les secteurs hyperbolique, secteurs paraboliques, et les secteurs elliptiques, respectivement.

Pour différentes valeurs positives des paramètres a, b, c, d et f , ils existent trois types de structures au voisinage de l'origine:

- 1-Un secteur hyperbolique dont l'origine est un point selle.
- 2-Un secteur parabolique dont l'origine est un noeud stable.
- 3-Un secteur elliptique composé des trajectoires qui tendent à $(0, 0)$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

Cette structure correspond à un éclatement des deux populations.

L'utilisation de la dérivée optimale nous permet de faire une étude comparative entre les comportements des solutions du système ratio dépendant et ceux obtenue par la procédure de la dérivée optimale. Et nous permettons aussi de confirmez la nature de l'origine à partir des valeurs propres obtenues.

Pour comprendre encore mieux les comportements des solutions on peut toujours tracer dans le plan de phase les lignes intégrales au voisinage de l'origine d'un champ de vecteur du système ratio dépendant non linéaire et du système linéarisé par la dérivée optimale. Il est souvent indispensable d'évaluer l'erreur quadratique entre le système linéaire et le système non linéaire pour juger la qualité de l'approximation. Le calcul de l'erreur

quadratique se fait en utilisant la relation suivante:

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \left\| x_i(t) - \tilde{y}_i(t) \right\|^2$$

où

$x(t)$ représente la solution du système non linéaire.

$\tilde{y}_i(t)$ représente la solution du système linéaire.

3.3.1 Etude des différentes cas possible

Cas ou l'équilibre (0, 0) est un point selle

Dans ce cas, la structures des solutions au voisinage de l'origine consiste d'un secteur hyperbolique.

Exemple1

$$a = 0.5, \quad b = 0.5, \quad c = 0.8, \quad m = 1, \quad d = 0.4, \quad f = 0.3.$$

Le système s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(0.5 - 0.5x) - \frac{0.8xy}{y+x} \\ \dot{y} = y(-0.4 + \frac{0.3x}{y+x}) \end{cases} \quad (3.11)$$

Le calcul de la matrice optimale, après une itération pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (3e - 10, 4e - 10)$ donne:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.2415 & -0.1490 \\ 0.0969 & -0.3441 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Dont les valeurs propres sont:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.2157 \\ \lambda_2 &= -0.3183 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Exemple2

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1.2, \quad m = 1, \quad d = 1, \quad f = 3.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{1.2xy}{y+x} \\ \dot{y} = y(-1 + \frac{3x}{y+x}) \end{cases} \quad (3.14)$$

Le calcul de la matrice optimale, après 5 itération pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (1e - 5, 6e - 5)$ donne:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.0430 & -0.0007 \\ 1.4339 & -0.9990 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Dont les valeurs propres sont:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0421 \\ \lambda_2 &= -0.9981 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Commentaires

En se plaçant très près de l'origine pour les deux exemples précédents, on remarque que la dérivée optimale permet de donner un système linéaire optimale avec deux valeurs propres de signe différent se qui signifie que l'origine est un col. Alors, il est instable. Les deux valeurs propres pour les deux exemples sont donnees par 3.13 et 3.16. Les figures (3.22) et (3.26) présentent respectivement les portraits de phase du système linéaire obtenu comparé à celui de système non linéaire (3.11, 3.14). Tandis que, les figures (3.23) et (3.27) représente l'évolution de l'erreur quadratique associé à l'approximation en fonction du temps. Les figures (3.24), (3.28) et (3.25), (3.29) montrent respectivement la représentation des champs de vecteurs du système non linéaire (3.11, 3.14) et du système linéarisé par d.o. On voit bien que le système non linéaire présente un secteur hyperbolique. Le champ de vecteurs du système non linéaire et du système linéaire optimale sont identiques et conduisent à la même conclusion, en faisant apparaître l'origine comme un point selle, l'origine étant donc instable.

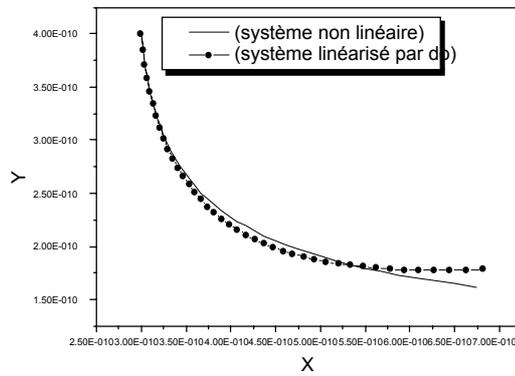


Figure 3.22: La solution $(x(t), y(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(3e-10, 4e-10)$.

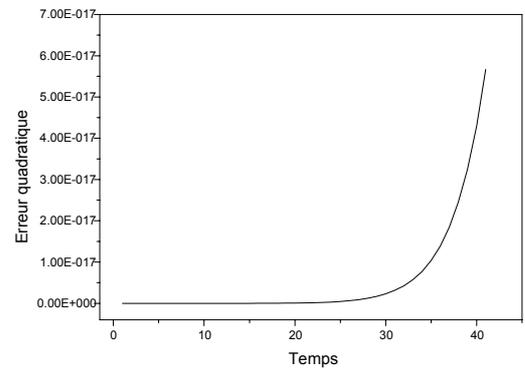


Figure 3.23: L'évolution de l'erreur quadratique du système linéarisé par do en fonction du temps.

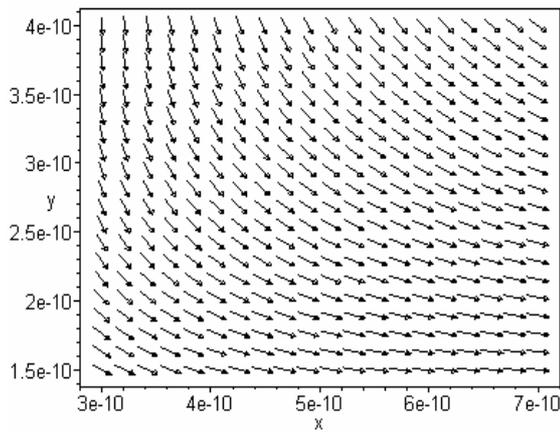


Figure 3.24: Champ de vecteurs du système non linéaire.

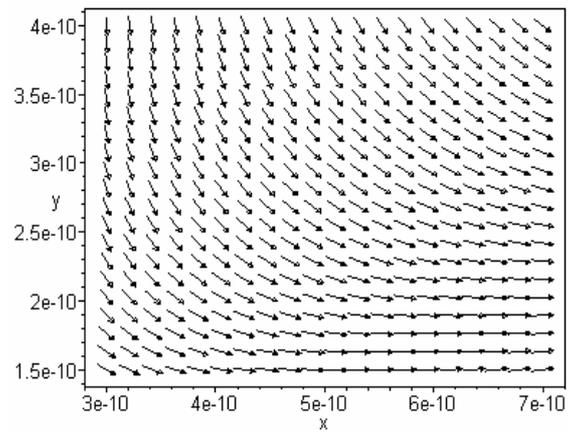


Figure 3.25: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

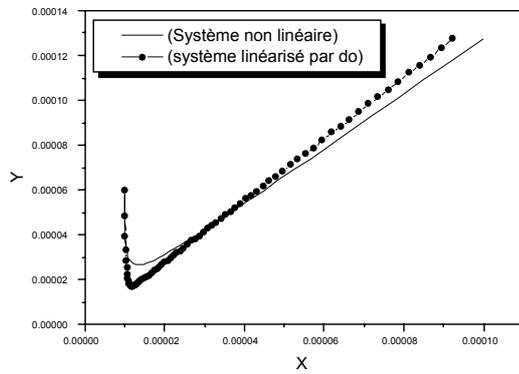


Figure 3.26: La solution $(x(t), y(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(1e-5, 6e-5)$.

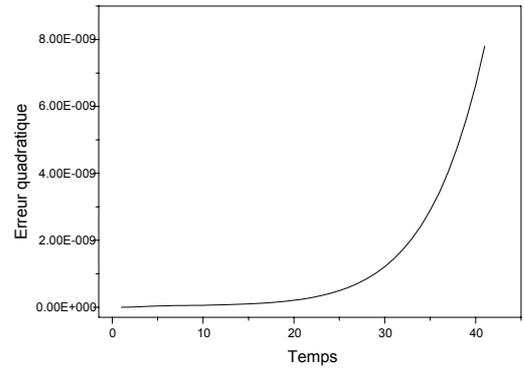


Figure 3.27: L'évolution de l'erreur quadratique du système linéarisé par do en fonction du temps.

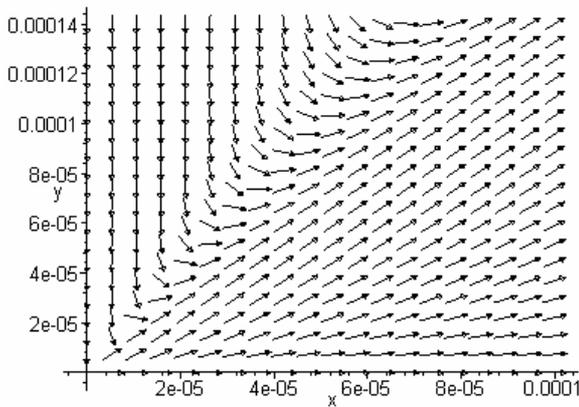


Figure 3.28: Champ de vecteurs du système non linéaire.

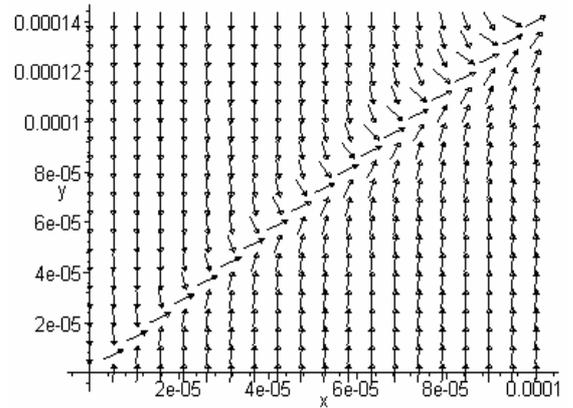


Figure 3.29: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

Cas ou l'équilibre $(0, 0)$ est un noeud stable

Dans ce cas, la structures des solutions au voisinage de l'origine consiste d'un secteur parabolique..

Exemple1

Pour les valeurs des paramètres $a = 0.5$, $b = 0.5$, $c = 1$, $m = 1$, $d = 0.4$, $f = 0.3$, et avec des conditions initiales $(x_0, y_0) = (8e - 10, 1e - 7)$, nous avons les équations d'état

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(0.5 - 0.5x) - \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.4y + \frac{0.3xy}{x+y} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$A_0 = DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -0.4842 & -0.0001 \\ 0.2953 & -0.4000 \end{bmatrix}$$

La matrice optimale donne après 3 itérations.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.4869 & 0.0000 \\ 0.2961 & -0.4000 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Ayant comme valeurs propres:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.4868 \\ \lambda_2 &= -0.4001 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Exemple2

$a = 1$, $b = 1$, $c = 1.2$, $m = 1$, $d = 1$, $f = 3$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{1.2xy}{y+x} \\ \dot{y} = y(-1 + \frac{3x}{y+x}) \end{cases} \quad (3.20)$$

Le calcul de la matrice optimale, , après 6 itération pour une condition initiale $(x_0, y_0) =$

$(1e - 20, 6e - 5)$ donne:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.2000 & -0.000 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Dont les valeurs propres sont:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.2000 \\ \lambda_2 &= -1.0000 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Commentaires

Les courbes des figures (3.30) et (3.34) représentent la solution $(x(t), y(t))$ dans l'espace de phase du système linéaire optimale (3.18, 3.21), comparée à celle du système non linéaire (3.17, 3.20) pour les conditions initiales $(8e - 10, 1e - 7)$, $(1e - 20, 6e - 5)$. Ainsi, on remarque bien que, si on se place très près de l'origine, la dérivée optimale d'écrit fidèlement la dynamique et le comportement réel du système non linéaire (3.17, 3.20), les solutions optimale et exacte (non linéaire) déterminées sont confondues. Les résultats obtenus pour les deux exemple montrent que les matrices optimales dans ce cas prévoient un noeud stable à l'origine, puisque leurs valeurs sont réelles négatives. Les deux valeurs propres pour les deux exemples sont données par 3.19, 3.22. Les figures (3.32), (3.36) et (3.33), (3.37) montrent respectivement la représentation des champs de vecteurs du système non linéaire et du système linéarisé par d.o. On voit bien que le système non linéaire présente un secteur parabolique. Le champ de vecteurs du système non linéaire et du système linéaire optimale sont confondus. On remarque que tant que le système admet un point d'équilibre stable à l'origine (noeud), l'approximation par la dérivée optimale représente convenablement le comportement qualitatif et quantitatif du système réel. Les figures (3.31) et (3.35) représente l'évolution de l'erreur quadratique associé à l'approximation en fonction du temps.

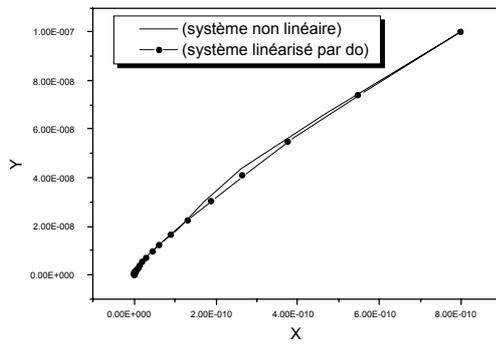


Figure 3.30: La solution $(x(t), y(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(8e-10, 1e-7)$.

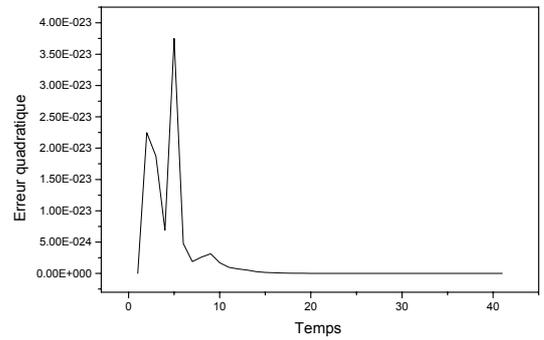


Figure 3.31: L'évolution de l'erreur quadratique du système linéarisé par do en fonction du temps.

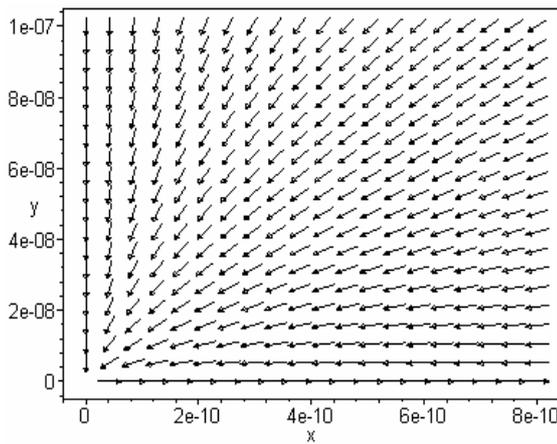


Figure 3.32: Champ de vecteurs du système non linéaire.

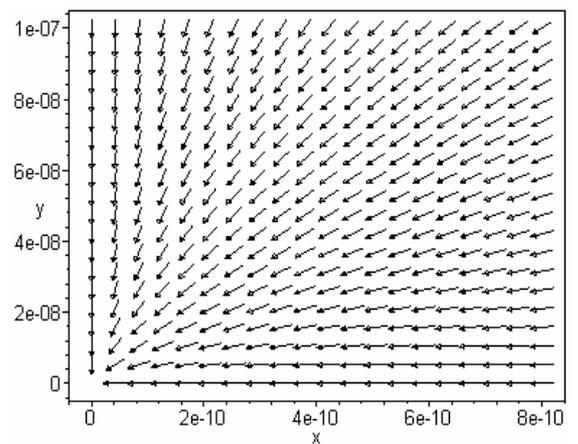


Figure 3.33: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

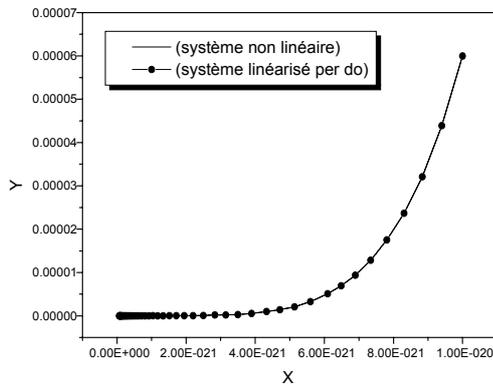


Figure 3.34: La solution $(x(t), y(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(8e-10, 1e-7)$.

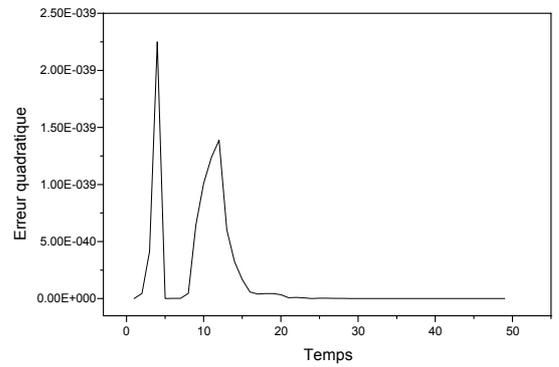


Figure 3.35: L'évolution de l'erreur quadratique du système linéarisé par do en fonction du temps.

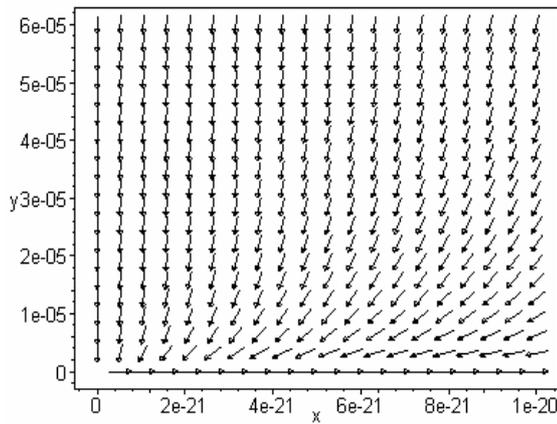


Figure 3.36: Champ de vecteurs du système non linéaire.

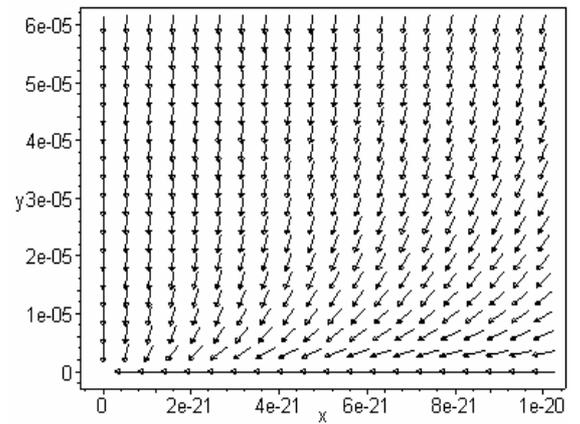


Figure 3.37: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

Cas ou la solution à l'équilibre $(0, 0)$ est sous une forme elliptique

Exemple

Pour les valeurs des paramètres $a = 0.5$, $b = 0.5$, $c = 1$, $m = 1$, $d = 0.4$, $f = 1$. et avec des conditions initiales $(x_0, y_0) = (6e - 5, 5e - 6)$, nous avons les équations d'état

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(0.5 - 0.5x) - \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.4y + \frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (3.23)$$

La matrice optimale s'écrit:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.3743 & -0.3583 \\ 0.1256 & -0.0417 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Ayant comme valeurs propres:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.1663 + 0.0418i \\ \lambda_2 &= 0.1663 - 0.0418i \end{aligned} \quad (3.25)$$

Commentaires

La figure (3.28) a représenté la solution $(x(t), y(t))$ dans le plan de phase du système linéaire optimale, comparée à celle de la solution non linéaire pour les condition $(x_0, y_0) = (6e - 5, 5e - 6)$. Les résultats obtenus montrent qu'il existe deux valeurs propres complexes, à partie réelle positive, donc l'origine $(0, 0)$ est un foyer instable et les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre, qui sera dit donc ce cas, instable. Les deux valeurs propres sont données par 3.25.

Les figures (3.39) et (3.40) montrent respectivement la représentation des champs de vecteurs du système non linéaire 3.23 et du système linéarisé par d.o. On voit bien que le système non linéaire présente un secteur elliptique. Le champ de vecteurs du système non linéaire et du système linéaire optimale ne sont pas identiques et faisant apparaître l'origine comme un foyer instable, l'origine étant donc instable.

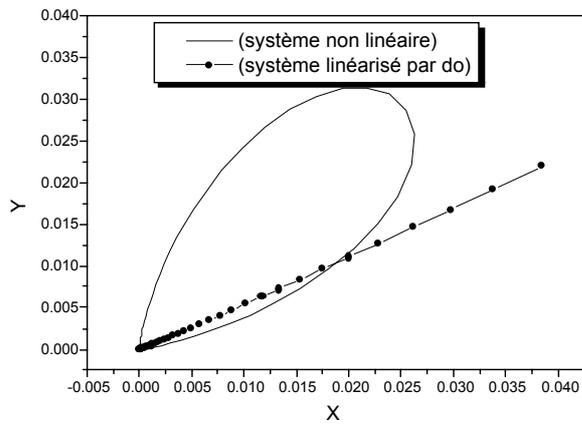


Figure 3.38: La solution $(x(t), y(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(6e-5, 5e-6)$.

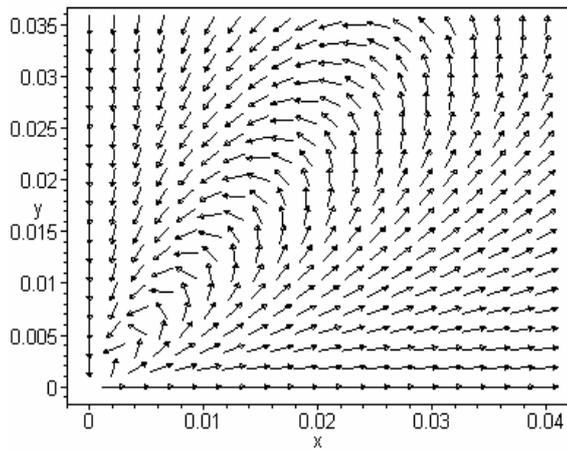


Figure 3.39: Champ de vecteurs du système non linéaire.

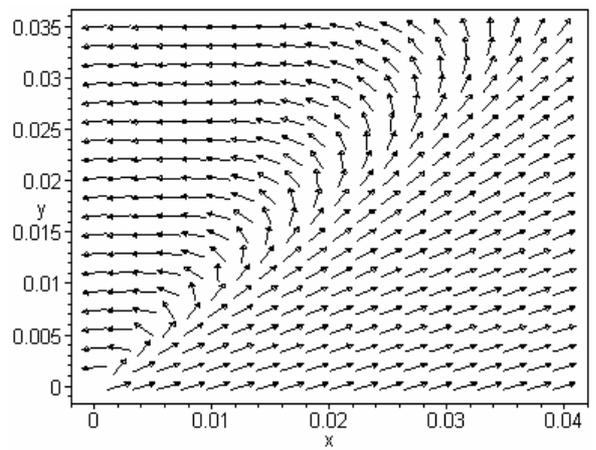


Figure 3.40: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

Nous remarquons aussi que le système approché par la dérivée optimale n'a pas la même forme que celui du système non linéaire. L'utilisation de la dérivée optimale comme méthode d'approximation n'est plus valide dans ce cas.

3.4 Conclusion

L'intérêt présenté par la dérivée optimale réside surtout, dans l'étude de la stabilité de l'origine du fait que la linéarisation classique ne permet pas de répondre dans notre cas où les fonctions ne sont pas assez régulièrement et ne sont pas définies à l'origine. Les exemples présentés montrent le bon accord de la dérivation optimale avec le système non linéaire sauf le cas où l'origine a une forme elliptique. En effet, le tracé des solutions reflète la similitude des trajectoires, d'un autre côté, le calcul d'erreurs montre que la dérivée optimale constitue la meilleure approximation dans un voisinage d'un point critique pour ce type de système ratio-dépendant. L'utilisation de cette méthode nous permet de déterminer la nature de l'origine. Par conséquent, les structures topologiques au voisinage de l'origine consistent de trois types de secteur:

- 1-Un secteur hyperbolique dont l'origine est un point selle.
 - 2-Un secteur parabolique dont l'origine est un noeud stable.
 - 3-Un secteur elliptique composé des trajectoires qui tendent à $(0, 0)$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.
- Dans ce cas à partir de la dérivée optimale on a trouvé que l'origine est un foyer instable.

Chapitre IV

Etude de la dynamique d'un modèle
ratio-dépendant appliqué au développement
du sida par la D.O.

Chapitre 4

Etude de la dynamique d'un modèle ratio dépendant appliqué au développement du sida dans une société par la D.O

4.1 Introduction

Les propos de ce chapitre sont consacrés à l'utilisation de la méthode de la linéarisation optimale, en particulier, à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un modèle qui décrit la propagation du virus de sida dans une société. Depuis la découverte humaine de virus d'HIV, la recherche fondamentale sur la dynamique de transmission de virus d'HIV dans les populations humaines est devenu une matière intéressante de recherches dans la biologie mathématique.

Le modèle étudié est un modèle proie prédateur de type ratio dépendant. Sa caractéristique principale est que la réponse du prédateur à la présence de proie dépend au rapport du nombre de proie au nombre de prédateur. Ce modèle n'est pas défini à $(0, 0)$ donc il ne peut pas être linéarisé autour de ce point. C'est la cause principale d'étudier

la linéarisation de ce modèle par la dérivée optimale. Ainsi nous comparons les résultats obtenues avec celles trouvés par **B.D.Aggarwala**.

4.2 Définition de la maladie du sida

Qu'est ce que le SIDA

Tout le monde parle du SIDA, mais le définir est une chose relativement compliquée. Cette difficulté à définir simplement cette maladie reflète bien sa complexité.

Tout d'abord, quelles sont les significations des différentes initiales?

- Syndrome.
- Immuno (d')
- Déficience
- Acquis

Dégageons maintenant sa définition à partir de l'analyse de ces différents termes.

- Un syndrome "un ensemble de signes, de symptômes qui appartiennent à une entité clinique, mais dont les causes peuvent être diverses." définition du dictionnaire Hachette.
- L'immuno-déficience est une insuffisance fonctionnelle du système immunitaire.
- Le terme 'Acquis' signifie tout simplement que le SIDA n'est pas une maladie héréditaire mais due à un agent mis accidentellement au contact du malade.

C'est agent est le Virus de l'Immuno-déficience Humaine ou VIH (HIV en langage international).

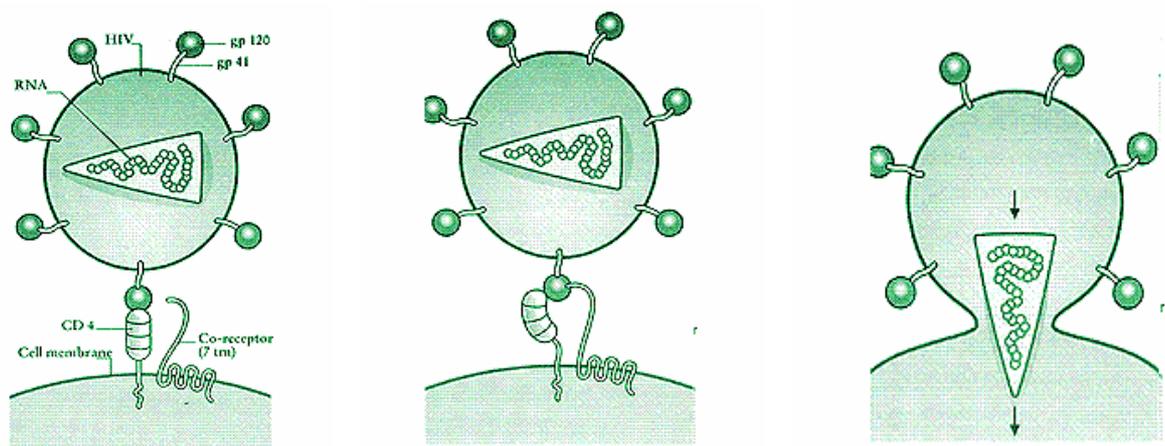
La fixation de la particule virale sur la cible cellulaire se fait par la liaison de la gp120 (protéine du virus) à la molécule CD4 (molécule membranaire extrêmement importante des lymphocytes). Les lymphocytes (qui sont des globules blancs) sont appelés lymphocytes CD4 ou T4. En fait, ils sont distingués d'une autre catégorie de lymphocytes appelés CD8 ou T8 qui ne sont pas infectés par le VIH.

Après l'interaction gp120 et CD4, le virus pénètre alors dans la cellule. L'ARN du génome qui est libéré de son enveloppe est transcrit en ADN par la transcriptase inverse.

Cet ADN est alors intégré en partie dans l'ADN cellulaire.

Le VIH intracellulaire, inséré dans le génome de la cellule infectée sous forme d'ADN est alors à l'abri des attaques du système immunitaire. Lors de chaque réplication et division cellulaire, la cellule copie et transporte le génome viral avec elle.

Remarque : Le VIH sous forme latente peut être activé par des stimulations extérieures telle une infection à Herpès virus, à cytomegalovirus ou autre agent infectieux entraînant une réplication virale intense.



Le sida ou, syndrome d'immunodéficience acquise, est une maladie très particulière, déroutante tant pour le grand public que pour les chercheurs et tous les professionnels de santé à des degrés divers.

Depuis quinze ans, des efforts considérables ont été déployés pour connaître et faire connaître cette maladie qui touche principalement des personnes jeunes. La connaissance de la physiopathologie a permis de mieux définir le mode de contamination, la multiplication du virus dans l'organisme, les moyens de l'inhiber ou de freiner sa prolifération par des médicaments appropriés. De très importants progrès thérapeutiques ont été réalisés ces dernières années. La prise en charge de l'infection par le VIH s'inscrit de plus en plus autour de la gestion d'une maladie au long cours.

Mode de contamination

- par le sang
- par voie sexuelle
- par voie materno-foetale

4.3 L'épidémie du Sida

Dans les pays en développement en général et en Afrique en particulier, la forme et l'intensité de l'épidémie du Sida sont étroitement liées à la pauvreté, à l'inégalité, à la destruction des structures sociales, au déracinement des personnes. Ces phénomènes sont souvent associés à la violence et aux conflits. Il devient actuellement indispensable de prendre en compte l'épidémie du Sida comme un des problèmes majeurs que l'on doit traiter dans une situation de crise civile, de guerre et d'urgence. Dans des situations d'urgence, la question du Sida est souvent éclipsée derrière des problèmes à court terme plus pressant et plus visibles. Or les crises aiguës ou larvées peuvent créer des conditions accélérer de propagation du VIH-SIDA et engager ainsi l'avenir sanitaire de toute une région.

L'épidémie du Sida progresse selon les lignes de faille des sociétés. Elle se développe là où l'accès à l'information, à la prévention, l'indépendance économique et le respect des droits de l'homme ne sont pas garantis pour tous. Pour lutter contre l'avancée de l'épidémie, il est nécessaire que la structure sociale connaisse une relative stabilité, et que la société, en particulier l'Etat, ait la capacité de faire fonctionner les institutions garantes des droits individuels. Or beaucoup de pays africains sont confrontés actuellement à de nombreuses situations de crise. Conflits internationaux, guerres civiles, crises politiques, économiques et sociales remettent en question le fonctionnement des institutions. Une typologie de ces crises pourrait être définie en fonction de leurs causes, leur durée et leur limitation ou pas à une population concernée, les déplacements de populations provoqués ou l'assistance qu'elles suscitent de la part des organisations humanitaires. A chacune de ces situations

correspond un certain niveau de capacité à mettre en place des mesures de lutte contre l'épidémie du Sida.

Il y a donc nécessité de comprendre le rôle que les conflits exercent sur la transmission du Sida et de savoir que la mise en oeuvre d'actions préventives doit tenir compte à la fois des comportements sexuels à risque et de l'influence que les stress physiques psychologiques et matériels engendrés par le conflit peut avoir sur ces comportements.

4.4 Présentation d'un modèle ratio-dépendant pour HIV/SIDA

Le développement d'HIV/SIDA dans une société peut être modélisé par un modèle proie prédateur de type ratio dépendant. Ce modèle est réaliste quand le prédateur doit rechercher la proie parce que la probabilité de trouver une proie dépend au rapport du nombre de proie au nombre de prédateurs.

Le modèle divise une société en deux classe, les individus infectés d'HIV et les individus non infecter par ce virus.

Si un individu \mathbf{X} non infecté a un contact avec d'autres, puis dans n'importe quelle rencontre, ses chances d'avoir un contacte avec un individu \mathbf{Y} infecté d'HIV sont proportionnelle à $y/(x+y)$ de sorte que la propagation de l'infection soit aussi ratio dépendant.

De tels systèmes dépendants peuvent être présenté par les équations suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(1-x) - \frac{x \cdot y}{(x+y)} & (4.1a) \\ y'(t) = -ay + \frac{kxy}{(x+y)} & (4.1b) \end{cases} \quad (4.1)$$

α, a, k sont des paramètres positifs.

$x(t)$: Nombre (ou la densité par unité de surface dans le plan $(x - y)$ de proie à tout moment t).

$y(t)$: Nombre (ou la densité par unité de surface dans le plan $(x - y)$ de prédateur à tout

moment t).

k : Facteur de conversion.

a : Taux de mortalité des prédateurs.

Dans ce modèle le $x(t)$ se développe selon l'équation logistique

$$x'(t) = \alpha x(\beta - x) \quad (4.2)$$

où

α : Facteur de croissance de proie.

β : Capacité de charge de l'environnement, a été dimensionalisé à 1 dans les équations 4.1

Les coefficients multipliant le terme $xy/(x + y)$ dans les deux équations (4.1a) et (4.1b) devraient être identiques. Quand un individu entre en contact avec le virus HIV, nous perdons un individu non infecté d'HIV, et simultanément gagnons un individu infecté par ce virus.

On assume que les valeurs de ces coefficients sont données par k et k_1 dans les équations 4.1, puis nous dimensionalisons k_1 à un. Cependant cela peut être discuté quand on obtient un bébé infecté (naît avec le virus), nous gagnent un individu infecté sans perdre un individu non infecté, de sorte que k devrait être légèrement le plus grand que 1. Dans d'autres applications de ces équations aux systèmes proie prédateur, k peut-être moins de 1 parce que habituellement un prédateur mange plus d'une proie dans sa vie. Ainsi, toutes les valeurs de k sont appropriées.

Si $x = 0$, les prédateurs meurent selon l'équation

$$y'(t) = -ay \quad (4.3)$$

Dans ce chapitre nous étudions le système d'équations 1.1 dans le plan (x, y) . Puisque la limite n'est pas définie à $(x, y) = (0, 0)$, le système ne peut pas être linearisé autour de ce point et nous ne savons pas les valeurs propres de ces équations en ce moment.

La question que nous voulons poser est, dans quelles conditions sur les paramètres les solutions du système 1.1 approchent le point $(0, 0)$. Dans le cas de l'application de HIV/SIDA, le point $(0, 0)$ représente l'annulation de la société et notre question est clairement une question convenable à demander.

4.4.1 Les points d'équilibres du modèle et les valeurs propres correspondants

L'annulation des équations dynamiques dans le système 1.1 nous permet de trouver les points d'équilibres de ce système.

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(1 - x) - \frac{x \cdot y}{(x + y)} = 0 \\ y'(t) = -ay + \frac{kxy}{(x + y)} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système mène aux équations suivantes

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 1 + \frac{\alpha}{ak} - \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \\ y = \frac{k - a}{a}x \end{cases}$$

Alors les points d'équilibres sont, $(0, 0)$, $(1, 0)$, (x_1, y_1) où

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(k\alpha - k + a)}{(k - a)} \\ y_1 &= \frac{k\alpha}{a}x_1 \end{aligned}$$

Ces points corespondent à

$(0, 0) \rightarrow$ La société étant éliminée.

$(1, 0) \rightarrow$ La maladie étant éliminée

$(x_1, y_1) \rightarrow$ La maladie devient endémique.

La Jacobienne du système 1.1 est donnée par

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha(1-2x) - \frac{y^2}{(x+y)^2} & -\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \\ k\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 & -a + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que:

- Au point (0, 0) la Jacobienne n'est pas définie.
- Au point (1, 0) la Jacobienne devient:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & -1 \\ 0 & -a + k \end{bmatrix}$$

- Au point (0, 0) la Jacobienne est:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha - \frac{a^2}{k^2} & -\frac{a^2}{k^2} \\ \frac{(k-a)^2}{k} & -a + \frac{a^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

Pour obtenir les valeurs propres à ces point d'équilibres nous calculons

$$|Jacob - \lambda I| = 0$$

- Au point (1,0) on trouve que les valeurs propres sont:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = k - a \end{cases}$$

- Au point (x_1, y_1) :

$$|Jacob - \lambda I| = 0 \implies \lambda^2 + \left(\alpha + a - 1 + \frac{a^2}{k^2}(1-k) \right) \lambda + \frac{a(k-a)}{k^2} (k\alpha + a - k) = 0$$

Posons:

$$B = \left(\alpha + a - 1 + \frac{a^2}{k^2} (1 - k) \right)$$

$$C = \frac{a(k - a)}{k^2} (ka + a - k)$$

Tel que les solutions de l'équation $\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ sont les valeurs propres au point (x_1, y_1) .

Les valeurs propres du système au point $(0, 0)$ dans le plan (x, y) ne sont pas connues, il n'est pas possible de dire dans quelle condition sur les paramètres a, k, α le point mobile $(x(t), y(t))$ approchera le point $(0, 0)$ ou s'éloignera de lui. Dans cette étude nous essayons de répondre à cette question numériquement en illustrons certains nombres de cas.

4.4.2 Les différents cas étudiés selon la variation des paramètres du modèle

Avant d'étudier les différents cas possibles nous devons mentionner que le chemin de solution des équations 1.1 est périodique, a un cycle de limite (périodique), ou approche un des trois points critiques.

Notez également, que les solutions des équations (1, 1) restent dans le premier quadrant dans le plan $x - y$ si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$.

Pour $B \geq 0$, le chemin de solution de ces équations ne peut pas avoir un cycle de limite positif (montré par Kuang et Beretta dans [1]). Pour cela nous considérons $B < 0$ dans notre étude.

Nous supposons encore qu'il n'y a aucune solution de cycle de limite de sorte que toutes les solutions doivent atteindre un des points d'équilibre.

1^{ère} cas $\alpha \geq 1$:

Dans ce cas le chemin de solution ne peut pas approcher le point d'équilibre $P_1(0,0)$ dans le plan (x, y) donc elle n'est pas accessible (montré par Kuang et Beretta [1]). L'espèce de proie a la chance maximale de survivre et on ne peut pas avoir le cas de l'annulation

de la société.

- Pour $0 < k \leq a$, P_2 est asymptotiquement stable et P_3 n'est pas dans le premier quadrant, donc elle n'est pas accessible, de sorte que toutes les solutions tendent à $P_2(1, 0)$.

C'est le cas où la maladie est supprimée.

- Pour $k > a$, P_2 est instable et P_3 est asymptotiquement stable de sorte que toutes les solutions tendent à ce point. Dans ce cas, les proies et les prédateurs coexistent.

Discussion

Si $\alpha \geq 1$ l'espèce de proie a la chance maximale de survivre. Deux cas peuvent se présenter :

- Le taux de conversion est petit devant le taux de mortalité de prédateur ($k < a$). Les prédateurs (personnes infectées) ne peuvent pas se reproduire assez rapidement pour compenser leurs taux de mortalité a . Ce qui conduit à l'extinction des prédateurs de population y . Par conséquent la maladie disparaît. La population de proies x (personnes non infectées) survie toujours, celle-ci revient aux prédateurs qui ne peuvent pas infecter tous les proies avant l'extinction totale. C'est le cas de l'élimination de la maladie avant qu'elle se propage dans toute la société. (figure 4.1).

- Taux de conversion est grand devant le taux de mortalité de prédateur $k > a$. Dans ce cas le nombre de personnes infectées augmente (haute consommation de proie) malgré sa mortalité. Les deux populations coexistent. Ceci se traduit par:

- La croissance du nombre de personnes non infectées est supérieure et plus rapide que celle des personnes infectées par le virus HIV.

- La suffisance de nourriture consommée ($\alpha \geq 1$).

De telle situation ne ramène pas à l'annulation de la société (figure 4.5.).

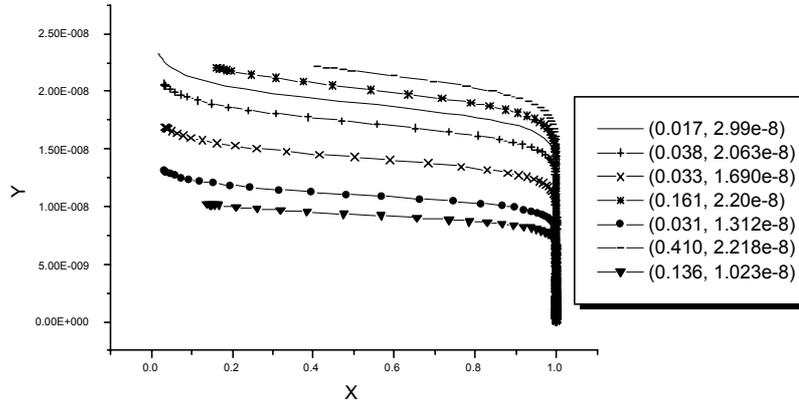


Figure 4.1: Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions proche de l'origine dans le cas où $\alpha \geq 1$ et $k \leq a$ avec $\alpha = 2, k = 0.1, a = 0.2$.

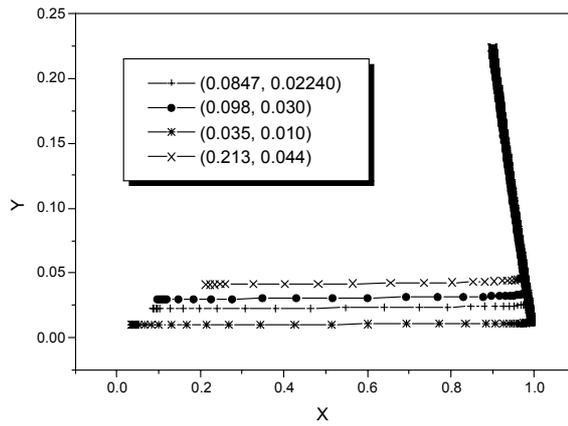


Figure 4.2: Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions proche de l'origine dans le cas où $\alpha \geq 1$ et $k > a$ avec $\alpha = 2, k = 0.25, a = 0.2$.

2^{ème} cas: $0 < \alpha < 1, a < k < a/(1-\alpha)$

C'est le cas le plus intéressant tenir compte d'une grande variété des solutions. Dans ce cas, P_2 est instable (un point selle) et P_3 peut être stable, neutrement stable, ou instable dépendre des valeurs de B et de C .

La solution peut approcher P_3 ou tourner autour d'elle ou approcher P_1 ceci dépend des valeurs des constantes a , α et k . Discutons maintenant les divers cas.

Cas 2a: $\mathbf{B=0, C > 0}$:

Si $B = 0$ alors $\alpha = \frac{1 - a - a^2(k - 1)}{k^2}$ et P_3 est un point neutre stable. Il n'ya aucun cycle de limite pour $B \geq 0$, et P_3 est un attracteur même dans un voisinage immédiat de ce point. Toutes les solutions au voisinage de P_3 approchent ce point le long d'une certaine spirale.

Le " bassin d'attraction " du point P_3 c'est à dire l'ensemble des valeurs initiales d'où la solution s'approchera le long d'une certaine spirale, est tout à fait petit et de l'extérieur de ce bassin d'attraction, le chemin de solution peut approcher l'origine. Ceci dépend des grandeur relatives de a , de k , et de α .

Nous essayons de montrer ce bassin numériquement dans la figure 4.3 pour $(a, k, \alpha) = (0.31, 0.62, 0.595)$.

Dans ce diagramme, Nous traçons le chemin de deux solutions voisines de nos équations, une commence à partir de $A_1 (0.9, 0.399)$ et l'autre de $A_2(0.9, 0.398)$ à $t = 0$. Ces solutions

sont tracer de $t = -2$ à $t = 500$.

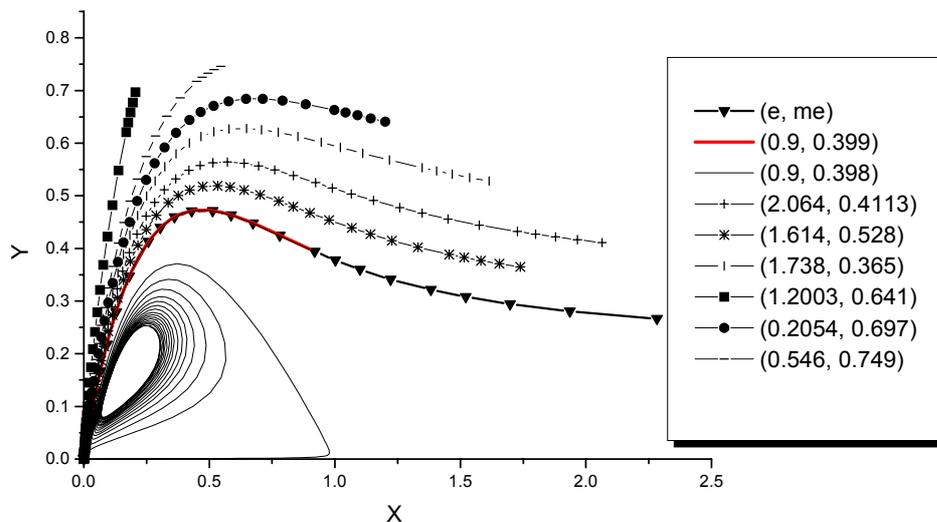


Figure 4.3: Diagramme de phase représentant le bassin d'attraction de l'origine, solution de bondissement (e, me) et les les deux solutions commencent de $A_1(0.9, 0.399)$ et de $A_2(0.9, 0.398)$.

La solution qui commence de A_1 tend à l'origine, alors que celle commençant de A_2 vient très près de l'origine, puis approche le point d'équilibre $P_2(1, 0)$ restant près d'un vecteur propre de P_2 et laisse ce point restant près de l'autre vecteur propre.

La solution de bondissement tend à l'origine le long d'un vecteur propre et part de lui le long de $y = 0$.

Pour trouver ce vecteur propre, nous discutons que si $y = mx$ est un tel vecteur propre, alors les équations (1,1) doivent être satisfaites le long de ce vecteur propre à l'origine, c.-à-d. nous devons avoir le $y'(t) = mx'(t)$ le long de $y = mx$ quant x approche de zéro.

Pour nos équations ,cela donne:

$$y'(t) = G(x, y) = mF(x, y) \quad \text{avec} \quad F(x, y) = x'(t)$$

On a: $F(x, y) = G(x, y)$ avec $y'(t) = mx'(t)$ et $y = mx \implies$

$$-amx + \frac{kmx^2}{(1+m)x} = m \left[\alpha x - \alpha x^2 - \frac{mx^2}{(1+m)x} \right]$$

Négligeant les termes quadratiques car on est au voisinage de l'origine ,donc:

$$\begin{aligned} -am + \frac{km}{(1+m)x} = m\alpha - \frac{m^2}{(1+m)} &\implies -am(1+m) + km = \alpha m(1+m) - m^2 \\ &\implies -am - am^2 + km = \alpha m^2 + \alpha m - m^2 \\ &\implies -a - am + k = \alpha m + \alpha - m \\ &\implies m = \frac{\alpha + a - k}{1 - a - \alpha} \end{aligned}$$

Le bassin d'attraction de l'origine est liée par cette solution qui travers l'origine avec une pente égale à m .

Nous avons arbitrairement assumé que si $(x(t))^2 + (y(t))^2$ est moins qu'un certain petit nombre (nous avons pris 10^{-8}) à $t = 150$, alors le chemin de solution approche l'origine. Ainsi la solution de bondissement est $(e, me) = (10^{-8}, 310^{-8})$.

Cas 2b:

Si $\mathbf{B} > \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}^2 < \mathbf{4C}$, l'équilibre P_3 est un point stable qui est approché asymptotiquement le long d'une spirale.

Cependant, le domaine d'attraction de P_3 est encore limité et de l'extérieur de ce domaine, le chemin des solutions tendent à l'origine (où les valeurs propres sont inconnues).

Nous illustrons ce bassin d'attraction de l'origine par la prise de $(a, k, \alpha) = (0.2, 0.4, 0.66)$.

Le bassin est montré dans la figure 4.4.

Ce diagramme montre deux solutions de nos équations, une commence de $A_1(2.0, 0.346)$ et l'autre de $A_2(2.0, 0.345)$. Les deux solutions sont tracer de $tt = -5$ à $t = 200$.

La solution qui commence à partir de A_1 approche l'origine pour de grandes valeurs de t tandis que celui qui commence à partir de A_2 va d'abord près de l'origine puis près de l'autre point d'équilibre $P_2(1.0)$ et finalement approches le troisième point d'équilibre P_3 .

Dans ce cas, la ligne de bondissement entre les deux bassins d'attraction est encore une solution qui approche l'origine le long de $y = mx$. avec $m = \frac{(a + \alpha - k)}{(1 - a - \alpha)}$. Si une solution

commence avec une valeur initiale de y plus grande que cela de la solution qui travers (e, me) dans le plan (x, y) , alors cette solution tend à l'origine directement.

Si $m = \frac{(a + \alpha - k)}{(1 - a - \alpha)} = \tan(\theta_1)$, au voisinage de l'origine, l'origine est un point de selle dans le secteur $0 < \theta < \theta_1$ et un noeud stable dans le secteur $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

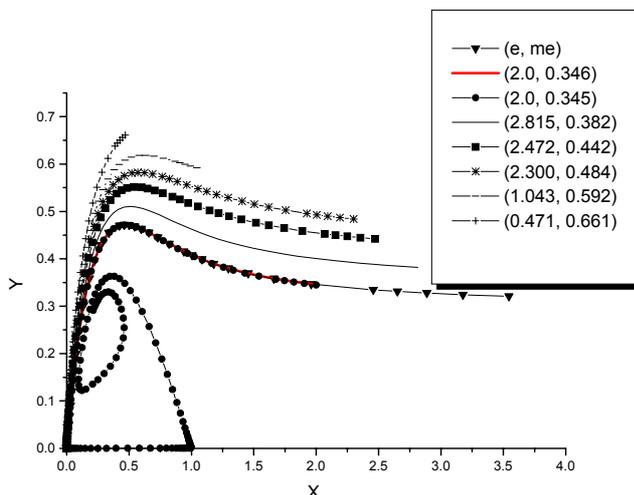


Figure 4.4: Diagramme de phase représentant le bassin d'attraction de l'origine, solution de bondissement (e, me) et les les deux solutions commencent de $A_1(2.0, 0.346)$ et de $A_2(2.0, 0.345)$.

Cas 2c

$$\mathbf{B} > \mathbf{0}, \mathbf{C} > \mathbf{0}, \mathbf{B}^2 > 4\mathbf{C}.$$

Dans ce cas, P_3 est un noeud stable, son " bassin d'attraction " dans le premier quadrant est tout à fait petit et de l'extérieur de ce bassin, le point de déplacement approche le $(0,0)$. Ici la dynamique est tout à fait différente des deux cas précédents. Cette fois le plan est divisé en trois parties au lieu de deux, illustrez encore par un exemple.

Nous essayons de tracer le bassin d'attraction de l'origine par la prise de $(a, k, a) =$

(0.2, 0.25, 0.66).

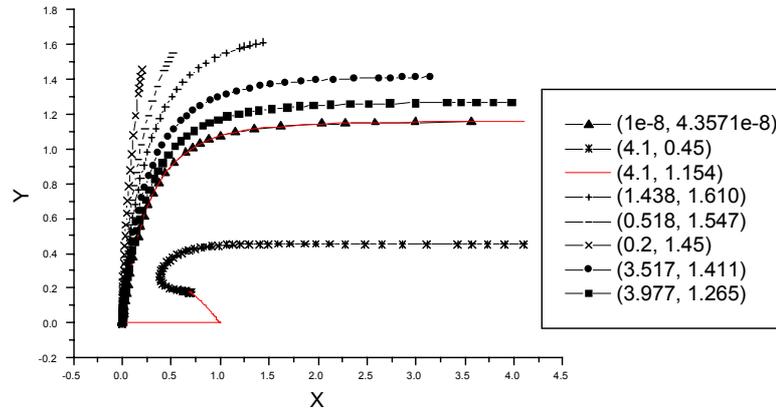


Figure 4.5: Diagramme de phase représentant le bassin d'attraction de l'origine, solution de bondissement (e, me) et les les deux solutions commencent de $A_1(4.1, 1.154)$ et de $A_2(4.1; 0.45)$.

Notons encore que le bassin d'attraction de l'origine peut être lié par une solution convenablement choisie de nos équations c'est encore la solution qui traverse le point (e, me) . Cette solution est montrée dans le diagramme où $e = 10^{-8}$ et $m = (a + \alpha - k) / (1 - a - \alpha) = 4.3571$. Nous montrons également autre solution A_1 qui est très près de celle-ci, et qui tend à P_3 par l'intermédiaire de $P_2(1, 0)$. La solution A_2 est tangentielle au vecteur propre P_3 . Elle divise la région allant à P_3 en deux parties. Les solutions qui commencent 'au-dessous' de cette solution tendent à P_3 directement sans aller d'abord près de $P_1(0, 0)$. Les solutions qui commencent 'au-dessus' de cette solution traitent l'origine comme un point selle de sorte qu'elles vont plus ou moins près de l'origine, puis près de P_2 et puis tendent à P_3 . Dans ce cas, si $y(0) \geq 1.2$, alors, même pour des grandes valeurs de $x(0)$, le grand nombre de prédateurs conduisent d'abord la population de la proie presque à zéro et deviennent ensuite éteintes eux-mêmes.

Cas 2d

$\mathbf{B} < \mathbf{0}, \mathbf{B}^2 < 4\mathbf{C}$

Dans ce cas, P_3 est instable et toutes les solutions qui approchent l'origine dans le temps positif, ne fournit aucun cycle de limite. Nous donnons un exemple encore avec $(a, k, \alpha) = (0.2, 0.25, 0.3)$. La façon dont les solutions approchent l'origine est illustré dans la figure 4.5.

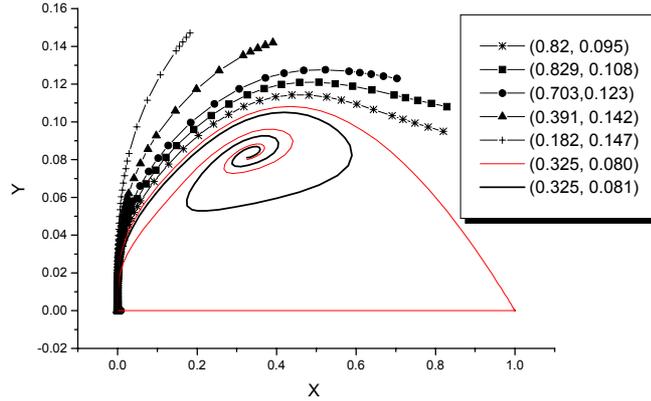


Figure 4.5: Diagramme de phase représentant le bassin d'attraction de l'origine, solution de bondissement (e, m_e) et les les deux solutions commencent de $A_1(0.325, 0.080)$ et de $A_2(0.325; 0.081)$.

Cette figure montre le bassin d'attraction de l'origine, tel que tous les points dans le premier quadrant tendent à l'origine dans le temps positif. Les solutions qui se trouvent dans la région incluse par l'allure de la solution A_1 tournent autour de P_3 le long d'un spirale puis tendent à l'origine (exemple A_2). Tandis ceux qui commencent en dehors de cette région vont à l'origine dans le temps positif.. Ces solutions tendent à l'origine avec une pente de $m = (a + \alpha - k)/(1 - a - \alpha) = 0.5$.

Si $m = \tan(\theta)$, alors l'origine agit en tant que noeud stable pour des solutions dans le secteur $(\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2})$ et agir comme un point selle pour des solutions dans le secteur $(0 < \theta < \theta_1)$.

3^{ème} Cas

$0 < \alpha < 1, k < a$

Dans ce cas $C < 0$, de sorte que P_2 soit un noeud stable et P_3 n'est pas dans le premier quadrant.

Si $a < 1$, le chemin peut approcher n'importe quel des deux points $P_1(0.0)$ ou $P_2(1.0)$, (P_3 n'est pas dans le premier quadrant donc non accessible). Les deux solutions numériques données sur la figure 5 illustrent ce fait.

Nous essayons de tracer le bassin d'attraction de l'origine par la prise de $(a, k, a) = (0.2, 0.1, 0.3)$.

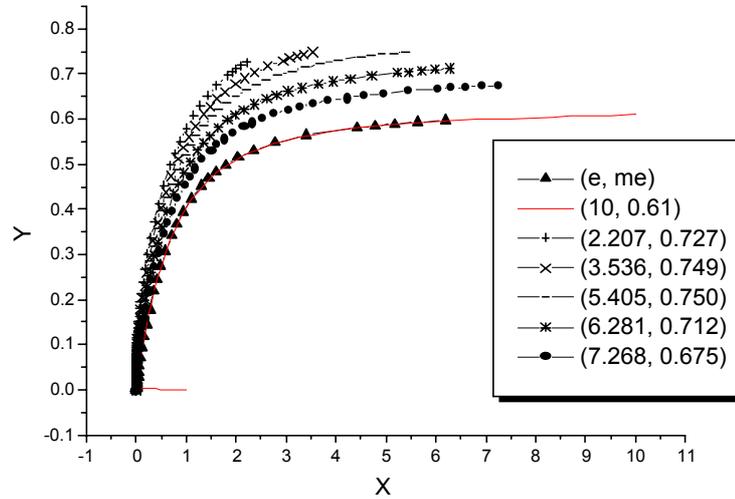


Figure 4.6: Diagramme de phase représentant le bassin d'attraction de l'origine, solution de bondissement (e,me) et une solution qui tend à $P_2(1,0)$.

Cette figure montre le bassin d'attraction de l'origine et deux autre solutions, une commence de $(10, 0.61)$ est qui tende à $P_2(1,0)$ et l'autre est la solution de bondissement $(e, me) = (10^{-8}, 0.80010^{-8})$ qui tend à l'origine dans le temps négatif $(-126.7 < t < 0)$ avec m est toujours données par $m = (a + \alpha - k)/(1 - a - \alpha) = 0.800$.

Discussion

Dans ce cas, ou le nombre de proies (personnes non infectées par le sida) est insuffisant. En plus le taux de conversion de proies en prédateurs est inférieur au taux de mortalité de prédateurs c-à-d que le remplissage de prédateurs est trop lent pour qu'ils survivent.

Alors deux cas peuvent se présenter:

- Les deux populations atteignent la coextinction, les prédateurs infectent tous les proies et deviennent eux-mêmes éteints. C'est le cas de l'annulation de la société.

- La population de proies survie toujours, au début elle commence à diminuer en approchant à l'extinction c'est le temps où se passe le contact entre les proies et les prédateurs mais à un certain moment elle commence à nouveau à augmenter à cause de la diminution du nombre de prédateurs jusqu'à ce qu'ils s'éteignent (la croissance des prédateurs est trop lente pour qu'ils survivent). C'est le cas de l'annulation de la maladie. (10, 0.61).

4^{ème} Cas

$$0 < \alpha < 1, \mathbf{k} \geq \frac{a}{(1 - \alpha)}$$

Dans ce cas, P_2 est instable et P_3 n'est pas dans le premier quadrant. Par conséquent, toutes les solutions dans n'importe quelle région dans le premier quart de cercle tendent à l'origine (sauf ceux qui commencent de $y(0) = 0$).

Nous donnons un exemple avec $(a, k, \alpha) = (0.6, 1.2, 0.5)$ dans la figure 4.7. La façon dans laquelle les solutions tendent à l'origine est montrée dans cette figure.

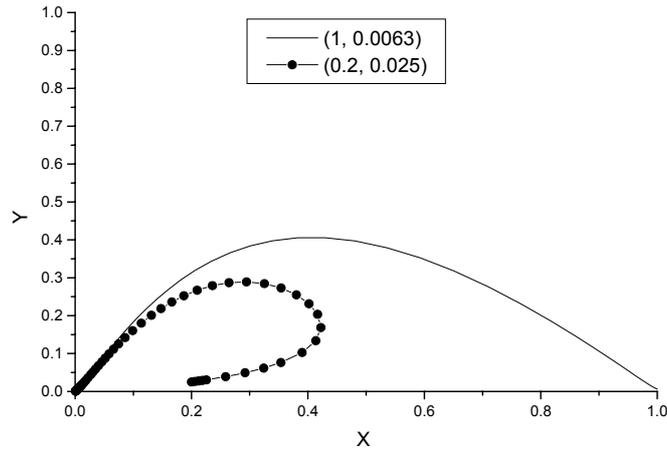


Figure 4.7. Diagramme de phase représentant deux solutions
 approchant l'origine.

Discussion

Dans ce cas, en présence de la proie, les prédateurs augmentent tellement rapidement qu'ils conduisent la proie à l'extinction, et leur propre population tend à zéro.

De telle situation peut se traduire par le fait que les prédateurs se produisent assez rapidement pour compenser leurs taux de mortalité. En plus la capacité de consommation de proies est assez haute et le nombre de proie est insuffisant ($\alpha < 1$).

5^{ème} cas

$0 < \alpha < 1, k = a$

Dans ce cas, les deux points d'équilibre, P_2 et P_3 coïncident et sont stables. Pour $0 < \alpha < 1$ et $a < 1$, les solutions approchent P_2 ou l'origine, tandis que pour un $a \geq 1$, l'origine n'est pas accessible. Nous montrons deux solutions avec $a < 1$ pour $(a, k, \alpha) =$

(0.2, 0.2, 0.4) dans la figure 4.8.

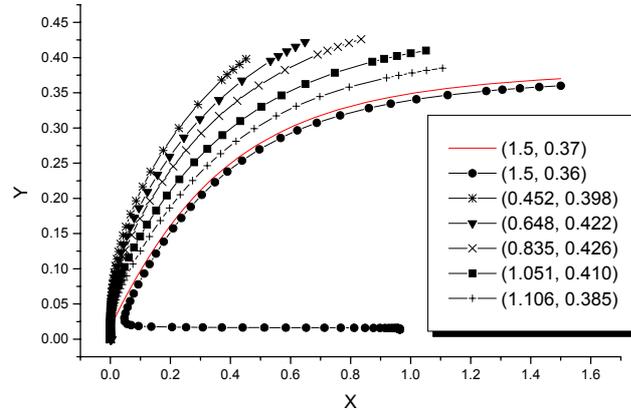


Figure 4.8: Diagramme de phase représentant le bassin d'attraction de l'origine et deux solutions commençant de (1.5, 0.37) et de (1.5, 0.36).

Dans cette figure nous traçons deux solutions une commence de (1.5, 0.37) est qui tend à l'origine et l'autre est (1.5, 0.36) et qui tend à (1, 0). Notons que le bassin d'attraction de l'origine peut être lié par une solution convenablement choisie de nos équations c'est encore la solution qui traverse le point $(e, m e)$ où $e = 10^{-8}$ et $m = (a + \alpha - k) / (1 - a - \alpha) = 1$.

Discussion

Pour $0 < \alpha < 1$ et $k = a$ on a le taux de conversion est égale au taux de mortalité de prédateurs c à d que le nombre des personnes qui sont devenus infecté soit égale au nombres de personne positive d'HIV qui meurent. Dans ce cas les condition initiales (x_0, y_0) permettent de prédire que les deux populations de proie x et de prédateur y soit atteindrent la co-extinction où seulement l'extinction des prédateur.

- Les solutions avec un grand (large) nombre initiales de prédateur tendent à l'origine. C'est le cas de l'extinction des deux populations où le grand nombre de prédateurs mangent d'abord toute la proie et se disparaissent ensuite. De telle situation ramène la société à l'annulation.

- Les solutions avec un petit nombre initiales de prédateur tendent à $(1, 0)$. C'est le cas de l'extinction de prédateurs ce qui impliquent la survie de la proie seulement. Ainsi la maladie étant éliminer.

Nous avons maintenant discuté toutes les combinaisons possibles de a , k , et de α et de leur effet sur les solutions de nos équations. Nous énonçons maintenant un théorème qui est lié à la discussion jusqu'ici et qui contraint nos solutions dans autre, manières différentes. Comme précisé par Kuang et Baretta [1], si $a + \alpha < 1$, alors ils ya des solutions de nos équations qui approchent l'origine. Cette proposition est fait dans l'esprit de ce rapport et le généralisé considérablement.

Théorème 1a. Si $a + \alpha < \min(1, k)$, alors toutes les solutions vont à l'origine.

Théorème 1b Si $a + \alpha > \max(1, k)$, alors aucune solution ne tend à l'origine.

Théorème 1c Si $k < a + \alpha < 1$, alors ils ya des solutions des équations (1,1) qui approchent l'origine.

Théorème 1d Si $1 < a + \alpha < k$ alors ils y a des solutions des équations (1,1) qui approchent l'origine.

Théorème 1f Si $k \geq 1$, alors il n' ya aucun cycle de limite dans $x > 0, y > 0$.

Donc nous avons essayé d'étudier numériquement dans quelles conditions sur les constantes a , k et α les solutions vont approché les trois points d'équilibre de ce modèle. Nous avons discuté un grand nombre de cas qui peuvent se présenter pour différentes valeurs de a , de k , et de α . Toutes les combinaisons possibles de ces constantes sont étudiées. Dans chaque cas, nous avons montres les solutions qui vont à un des deux points d'équilibre (le troisième point s'avère instable). On a estimez le bassin d'attraction de ces points numériquement pour quelques cas spéciaux. Voici un tableau présentant les diverses possibilités.

| cas | Valeurs de a, k, et α | comportement du solution |
|-----|---|---|
| 1 | $\alpha \geq 1$ | (0, 0) n'est pas accessible. Tous les solutions tendent à $\left\{ \begin{array}{l} P_2 \\ \text{ou} \\ P_3 \end{array} \right.$. |
| 2 | $0 < \alpha < 1, a < k < \frac{a}{(1-k)}$ | P_2 est instable. Tous les solutions tendent à P_1 ou à P_3 . |
| 2a | $B = 0, C > 0$. | P_3 est localement stable. (neutre). |
| 2b | $B > 0, C > B, B^2 > 4C$ | P_3 est un foyer stable. Les solutions tendent à P_3 ou à P_1 . |
| 2c | $B > 0, C > 0, B^2 > 4C$ | P_3 est un noeud stable. Les solutions tendent à P_3 ou à P_1 . |
| 2d | $B < 0$ | P_3 est instable. Les solution tendent à |
| 3 | $0 < \alpha < 1, k < a$ | Les solutions tendent à P_1 ou P_2 . |
| 4 | $0 < \alpha < 1, k \geq \frac{a}{(1-\alpha)}$ | Tous les solutions tendent à P_1 . |
| 5 | $0 < \alpha < 1, k = a$ | P_2 et P_3 coïncident, Les solutions tendent à P_1 ou à P_2 . |
| 6 | $a + \alpha < \min(1, k)$ | Tous les solutions tendent à P_1 . |
| 7 | $a + \alpha > \max(1, k)$ | Tous les solutions tendent à P_2 ou P_3 |
| 8 | $k < a + \alpha < 1$ | Quelques solutions tendent à P_1 d'autres vont à $\left\{ \begin{array}{l} P_2 \quad \text{ou} \\ P_3 \quad \text{ou} \\ \text{un cycle de limite} \end{array} \right.$ |
| 9 | $1 < a + \alpha < k$ | Quelques solutions vont à P_1 d'autres vont à P_3 |

4.5 Etude de la stabilité du modèle au point (0, 0) par la méthode de la dérivée optimale

Le modèle étudié est un modèle proie- prédateur de type ratio- dépendant. Si nous voulons simplement, étudier le comportement d'un tel modèle à l'origine, on s'aperçoit, que ce n'est pas possible car la fonction non linéaire représentant l'équation différentielle n'est pas dérivable en ce point, or dans le cas d'HIV / SIDA, ce point représente l'annulation

de la société. L'étude du comportement au voisinage de ce point est très importante.

A partir du travail de B.D. Aggarwala nous avons étudié numériquement dans quelles conditions sur les constantes a , k et α les solutions vont approcher les trois points d'équilibre de ce modèle et en particulier le point $(0, 0)$. Nous avons discuté un grand nombre de cas qui peuvent se présenter pour différentes valeurs de a , de k , et de α . Ainsi on a trouvé dans la majorité des cas que les solutions de nos équations approchent l'origine le long de $y = mx$. avec $m = \frac{(a + \alpha - k)}{(1 - a - \alpha)}$

Si $m = \frac{(a + \alpha - k)}{(1 - a - \alpha)} = \tan(\theta_1)$, l'origine est un point de selle dans le secteur $0 < \theta < \theta_1$ et un noeud stable dans le secteur $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Appliquons maintenant, la dérivée optimale en ce point (à l'origine). Cette méthode nous permet de faire une étude comparative entre les comportements des solutions du système ratio dépendant et ceux obtenue par la procédure de la dérivée optimale. Et nous permettons aussi de confirmer la nature de l'origine à partir des valeurs propres obtenues.

4.5.1 Etude de quelque cas précédant par la do

Exemple1 (cas 2b)

Les valeurs des paramètres sont $(a, k, \alpha) = (0.2, 0.4, 0.66)$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.66x(1-x) - \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.4\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.4)$$

Cas ou l'équilibre $(0, 0)$ est un point selle

Le calcul de la matrice optimale, après 2 itérations pour une condition initiale $(x_0, y_0) =$

$(0.6e - 10, 1.6e - 10)$ donne:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.1178 & -0.0695 \\ 0.2169 & -0.1722 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ayant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.0499 \\ \lambda_2 &= -0.1044 \end{aligned} \quad (4.6)$$

comme valeurs propres, ce qui permet de conclure que la dérivée optimale prédit un point selle.

Les figures (4-9) et (4-10) présentent respectivement les portraits de phase des systèmes 4.4 et 4.5 ainsi que l'évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps.

Les champs de vecteurs non linéaire et linéarisé par la dérivée optimale sont tracés dans les figures (4 - 11) et (4 - 12).

Cas ou l'équilibre $(0, 0)$ est un noeud stable

La matrice optimale obtenue après 18 itérations pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (2.0, 0.346)$ est la suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.8613 & 0.3302 \\ 0.0962 & -0.1138 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

elle présente des valeurs propres réelles négatifs.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.9016 \\ \lambda_2 &= -0.0735 \end{aligned} \quad (4.8)$$

ce qui permet de conclure que l'origine est un noeud stable.

La similitude des champs de vecteurs est montrée par les figures (4 - 15) et (4 - 16), alors que l'évolution des systèmes 4.4 et 4.7 et l'erreur quadratique sont présentés dans les figures (4 - 13) et (4 - 14).

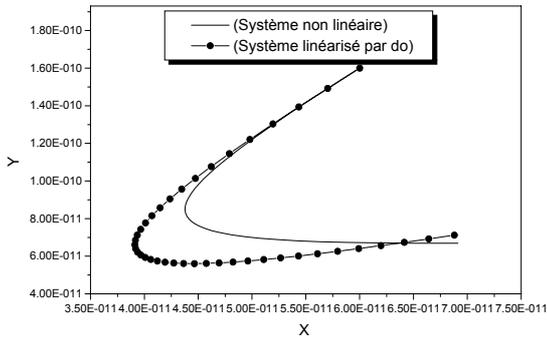


Figure 4.9: Plan de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0.6e-10, 1.6e-10)$

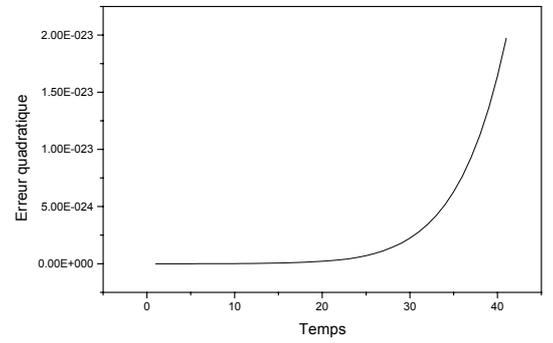


Figure 4.10: Erreur quadratique du au système linéaire (4.6) au sens de la D.O.

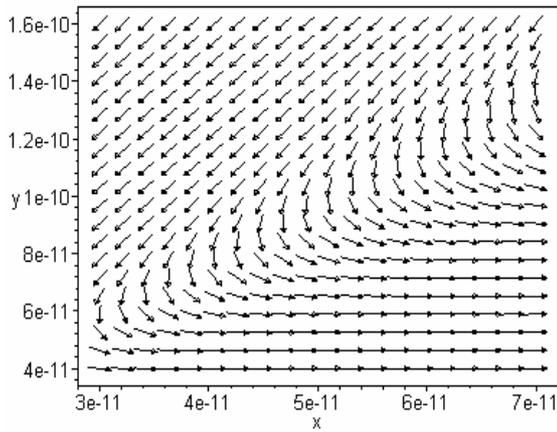


Figure 4.11: Champ de vecteurs du système non linéaire.

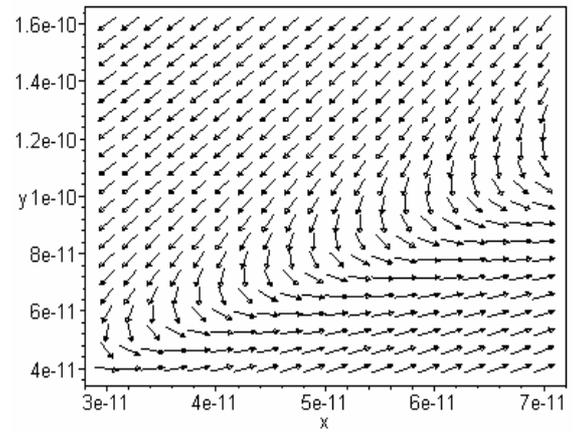


Figure 3.12: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

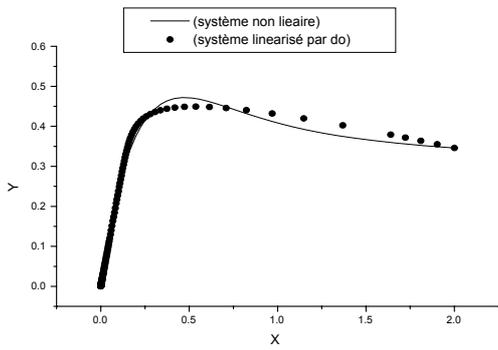


Figure 4.13: Plan de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(2.0, 0.78)$

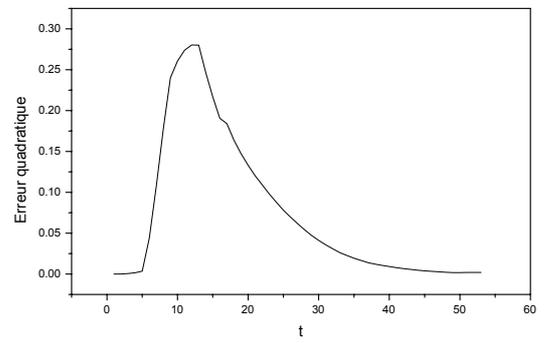


Figure 4.14: Erreur quadratique du au système linéaire (4.6) au sens de la D.O.

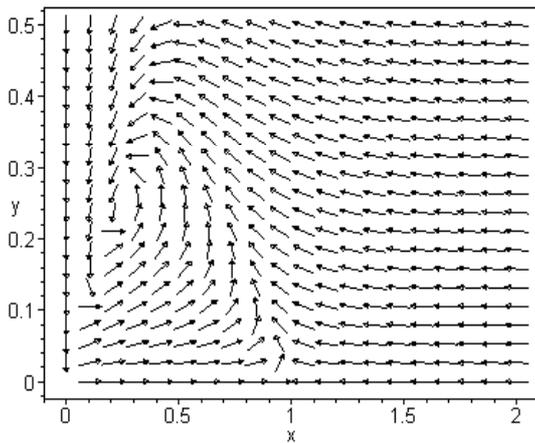


Figure 4.15: Champ de vecteurs du système non linéaire.

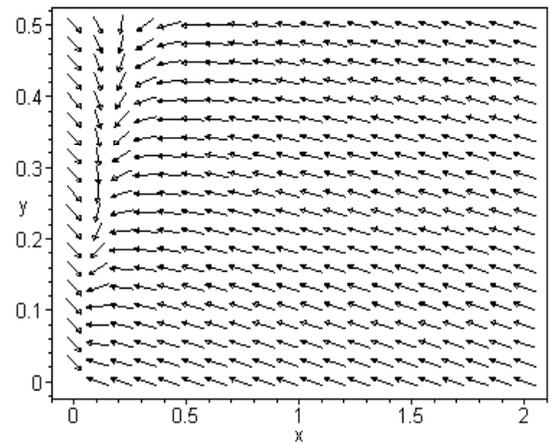


Figure3.16: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

Exemple1 (cas 2d)

Les valeurs des paramètres sont $(a, k, \alpha) = (0.2, 0.25, 0.3)$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.3x(1-x) - \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.25\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.9)$$

Cas ou l'équilibre $(0, 0)$ est un point selle

Le calcul de la matrice optimale, après 2 itérations pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (0.003, 0.00098)$ donne:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.2323 & -0.4966 \\ 0.0171 & -0.0762 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ayant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.2019 \\ \lambda_2 &= -0.0457 \end{aligned} \quad (4.11)$$

comme valeurs propres, ce qui permet de conclure que la dérivée optimale prédit un point selle.

Les figures (4 – 17) et (4 – 18) présentent respectivement les portraits de phase des systèmes 4.9 et 4.10 ainsi que l'évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps. Les champs de vecteurs non linéaire et linéarisé par la dérivée optimale sont tracés dans les figures (4 – 19) et (4 – 20).

Cas ou l'équilibre $(0, 0)$ est un noeud

La matrice optimale obtenue après 14 itérations pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (0.82, 0.095)$ est la suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0495 & 0.0628 \\ 0.0061 & -0.0238 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

elle présente des valeurs propres réelles négatifs.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.0601 \\ \lambda_2 &= -0.0133\end{aligned}\tag{4.13}$$

ce qui permet de conclure que l'origine est un noeud stable.

La similitude des champs de vecteurs est montrée par les figures (4 – 23) et (4 – 24), alors que l'évolution des systèmes 4.11 et 4.12 et l'erreur quadratique sont présentés dans les figures (4 – 21) et (4 – 22).

Commentaires

En ce plaçant très près de l'origine, on remarque que la dérivée optimale permet de donner un système linéaire optimale avec deux valeurs propres.

Pour les deux exemples précédentes ces deux valeurs propres peuvent être soit:

- Réelles négatifs où la linéarisation optimale fait apparaître l'origine comme un noeud stable.
- Réelles de signes opposés où la linéarisation optimale fait apparaître l'origine comme un point selle.

Les résultats élaborés en choisissant des conditions initiale près de l'origine, montre clairement que la méthode de la D.O suit le comportement du système non linéaire.

La similitude des champs de vecteurs du système non linéaire et son linearisé au sens de la D.O, impliquent le bon accord de la D.O avec le système non linéaire.

Le calcul de l'erreur quadratique montre, que tant qu'on est proche de l'origine la méthode de la dérivée optimale est meilleure où la linéarisation classique ne peut pas être appliquer dans ce cas.

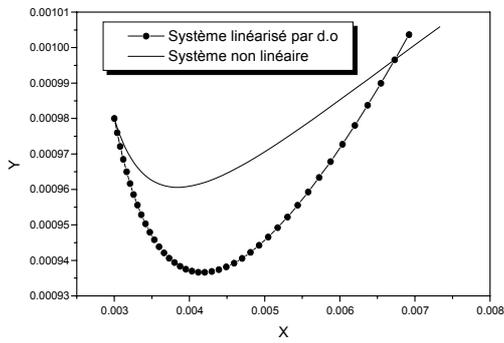


Figure 4.17: Plan de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(0.003, 0.00098)$

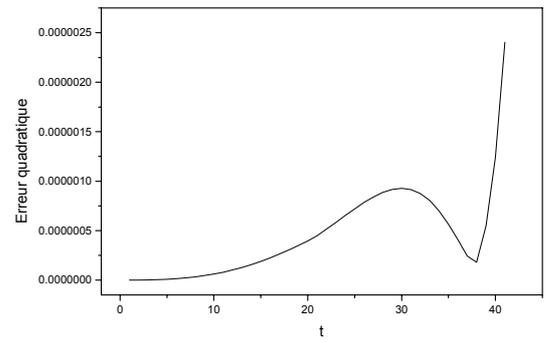


Figure 4.18: Erreur quadratique du au système linéaire (4.9) au sens de la D.O.

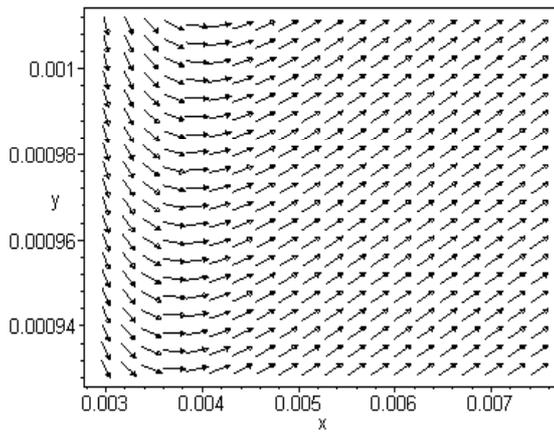


Figure 4.19: Champ de vecteurs du système non linéaire.

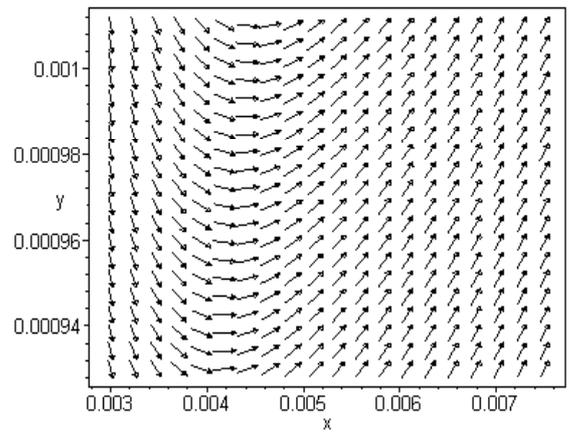


Figure 4.20: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

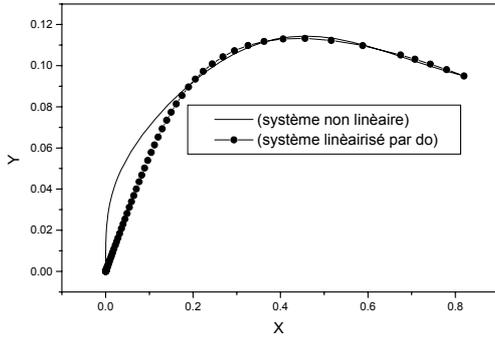


Figure 4.21: Plan de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(0.82, 0.095)$

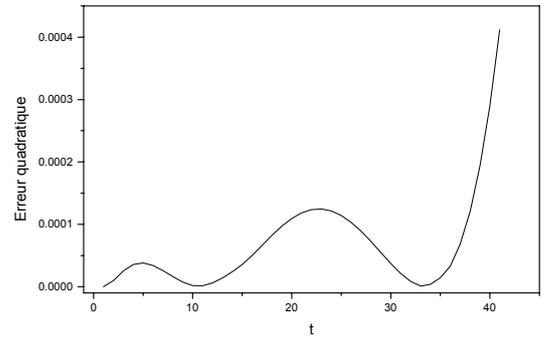


Figure 4.22: Erreur quadratique du au système linéaire (4.9) au sens de la D.O.

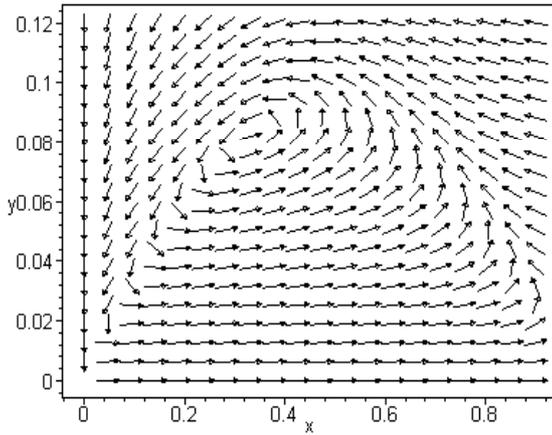


Figure 4.23: Champ de vecteurs du système non linéaire.

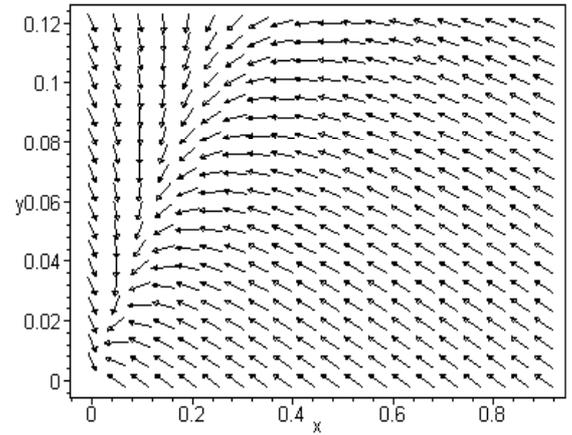


Figure 4.24: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O.

4.6 Application du modèle à la société canadienne

Le modèle ratio dépendant proposé par **B.D.Aggarwala** est un modèle qui décrit l'évolution du sida dans n'importe quelle société. Ici on va l'appliquer à la société canadienne. Partant des données statistiques sur le HIV/SIDA qui ont été publiées par les autorités de la santé Canadienne, B.D.Aggarwala a pu estimer le nombre de personnes infectées par ce virus au Canada pendant les années 1996, 1997, 1998, 1999 et l'année 2000, c'à d estimé le nombre de personnes infectées cinq ans à l'avance.

Cette fois si le modèle est donné par les équations suivantes:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(1-x) - \frac{kx.y}{(x+y)} \\ y'(t) = -ay + \frac{kxy}{(x+y)} \end{cases} \quad (4.14)$$

Pour Canada (et aussi bien pour toute autre société), les valeurs de a , k et α et la population démographique pour n'importe quelle année donnée peuvent être aussi estimés à partir des données statistiques sur le HIV/SIDA.

Pour l'estimation du nombres des gens infectées de l'année $N+1$ ils ont employé les données sur le HIV/SIDA de l'année N et la population démographique de l'année suivante $N+1$. De cette manière le bilan estimatif pour 1997 est basé sur le nombre de personnes infectées en 1996 et la population démographique de 1997. Mêmes chose pour le bilan estimatif des autres années.

Les évaluations avec le nombre réel et l'erreur commise pendant ces années sont données dans le tableau 1.

Tableau 1

| y | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Évaluation | 26130 | 28005 | 30278 | 32306 | 34411 |
| Réel | 26190 | 28110 | 30181 | 32253 | n/a |
| Erreur (%) | 0.23 | 0.37 | 0.32 | 0.16 | n/a |

Notons, que le nombre total de la population démographique canadienne en 2000 est de 30750100 et Ils ont choisi de prendre une année comme étant l'unité du temps. Ainsi l'erreur commise pendant chaque année est moins de 0.5 %.

A partir de ces résultats on peut faire une comparaisons entre le nombre réel et estimées des personnes infectées d'HIV au Canada, cette comparaison est représenter dan la figure 4.25.

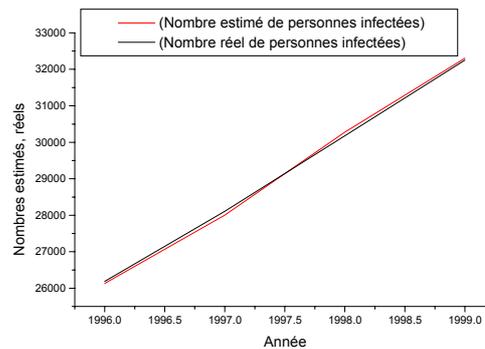


Figure 4.25: Comparaison entre le nombre réel et estimé de personnes infectées d'HIV au Canada.

Dans cette figure, on remarque que lors des années 1996, 97, 98, 99, 2000, le nombre actuel et réel des personnes infectées augmente chaque année. La progression de ce nombre est presque linéaire. Il devient très grand par la suite et par conséquent, la société s'annule. C'est le cas de l'extinction des deux populations proie et prédateur.

Maintenant nous allons étudier un exemple qui traite le cas de l'extinction par la dérivée optimale où on va confirmer les résultats trouvés précédemment.

Maintenant nous allons faire la même étude mais on utilise un modèle linéarisé par la méthode de la dérivée optimale. Pour ce la on a choisi un exemple qui traite le cas de l'extinction où les paramètres sont donnés par les valeurs suivantes:

$$\alpha = 0.595 \quad a = 0.31 \quad k = 0.62$$

Le système s'écrit:

$$\begin{cases} x'(t) = 0.595x(1-x) - \frac{x \cdot y}{(x+y)} = 0 \\ y'(t) = -0.31y + \frac{0.62xy}{(x+y)} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Le système linéaire optimal obtenue pour une condition initiale $(x_0, y_0) = (0.9, 0.399)$ est la suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0495 & 0.0628 \\ 0.0061 & -0.0238 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La comparaison entre les deux systèmes nous permet de tracer les figures suivantes:

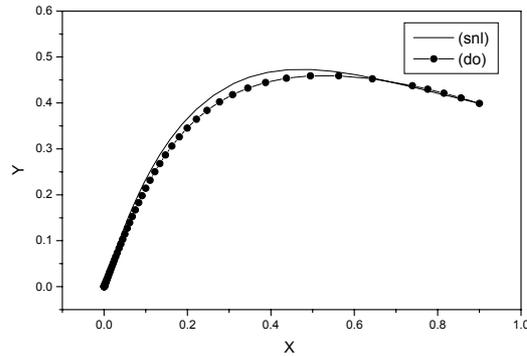


Figure 4.26: La solution $(x(t),y(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(0.9,0.399)$.

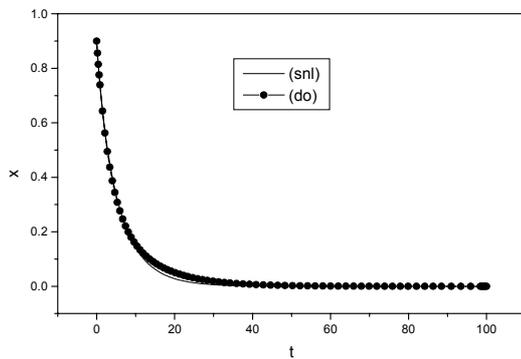


Figure 4.29: Variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps.

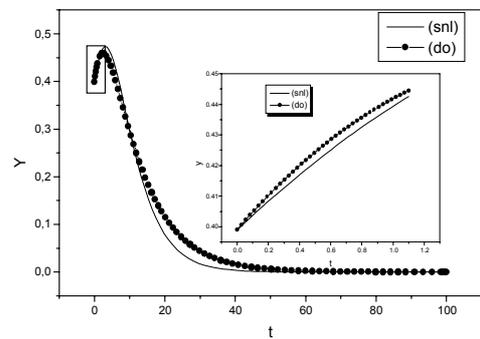


Figure 4.28: Variation de la solution $y(t)$ en fonction du temps.

D'après les figure (4-26), (4-27), (4-28), il est claire que cette exemple traite le cas de l'extinction où l'évolution de $y(t)$ augmente au début puis elle commence à diminuer au cours du temps. Par conséquent l'évolution de $x(t)$ diminue au cours du temps jusqu'elle

s'annule. Ce qui nous intéresse c'est l'évolution de $y(t)$ puisque elle représente le nombre de personnes infectées et en particulier l'étude de sa variation par la dérivée optimale dans l'intervalle de diminution.

Pour utiliser le système linéaire optimale à l'estimation du nombre de personnes infecte au Canada il faut d'abord calculer l'échelle moyenne du temps qui correspond a une année à partir du tableau 1. Nous prenons comme conditions initiales les résultats de l'année 1996.

$$(x_0, y_0) = \left(1 - \frac{y_0}{30.7501}, \frac{y_0}{30.7501}\right) \text{ avec } y_0 = 26130$$

Après un calcul on trouve que l'échelle moyenne du temps qui correspond a une année est:

$$T = 0.23$$

Donc on peut estimer le nombre de personnes infectés à partir du système linéaire optimale y (d0) et le comparer avec sel du système non linéaire y (snl). Ces évaluations avec l'erreur absolue sont données dans le tableau 2.

| <i>Année</i> | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| t | 0.23 | 0.46 | 0.69 | 0.92 | 1.15 |
| $x_{snl} \times 10^{-1}$ | 8.5131 | 8.0714 | 7.6672 | 7.2947 | 6.9494 |
| $y_{snl} \times 10^{-1}$ | 4.0960 | 4.2850 | 4.1944 | 4.3673 | 4.4412 |
| $x_{do} \times 10^{-1}$ | 8.5426 | 8.1129 | 7.7091 | 7.3293 | 6.9722 |
| $y_{do} \times 10^{-1}$ | 4.1296 | 4.2502 | 4.3535 | 4.4407 | 4.5131 |
| Err_x | 0.295 | 0.514 | 0.545 | 0.474 | 0.328 |
| Err_y | 0.82 | 0.233 | 0.16 | 0.175 | 0.162 |

Remarques

- Dans l'équation logistique $x(1-x)$, 1 représente la densité totale démographique de la population de Canada.

-Les valeurs de y (snl) et y (D.O) sont multipliées par le nombre totale de la population.

L'utilisation de la méthode de la dérivation optimale pour la modélisation du système de **B.D.Aggarwala** permette l'estimation du nombre de personnes infectées dans la société Canadienne avec une erreur inférieure à 0.31 %.

4.7 Conclusion

Les résultats obtenus, à partir d'une analyse numérique du modèle de **B.D.Aggarwala**, montrent que l'évolution des solutions au court du temps dépend des valeurs des paramètres et peuvent changer d'une manière essentielle avec un changement de ces paramètres.

Il paraît clairement qu'une bonne utilisation de la méthode de linéarisation optimale (choix des conditions initiales et des paramètres adéquats) permet de confirmer numériquement la nature de l'origine qui peut être un point selle ou un noeud stable.

Cette méthode peut être utilisée comme un outil numérique essentiel et puissant pour la modélisation du système de **B.D.Aggarwala** et permette la description quantitative du comportement des populations dans une société.

Conclusion générale.

Conclusion générale

Dans cette thèse nous présentons une étude concernant la dynamique d'un modèle proie prédateur de type ratio dépendant au voisinage de l'origine, sachant que ce modèle n'est pas définie au point $(0, 0)$. Nous étudions le comportement analytique autour de ce point pour un modèle ratio dépendant appliqué au développement d'HIV /sida. Pour faire l'analyse paramétrique de la stabilité et des régimes dynamiques de ce modèle, on utilise la dérivée optimale. Cette méthode nous permet d'analyser la stabilité de l'origine.

Les principaux résultats se résument comme suit

Dans le cas général d'une classe de modèle ratio dépendant proposé par Arditi et Ginzburg (1989) on a confirmé toutes les structures topologiques au voisinage de l'origine et aussi pour les autres points d'équilibres. Nous avons observé le comportement dynamique intéressant comme l'existence d'un attracteur multiple et un cycle de limite.

Les structures au voisinage de l'origine dans le premier quadrant dépendent des valeurs des paramètres et peuvent changer d'une manière essentielle avec un changement de ces paramètres.

Pour différentes valeurs positive des paramètres a, b, c, d et f , il existe trois type de structures topologiques au voisinage de l'origine : secteur hyperbolique, secteur parabolique et secteur elliptique.

L'utilisation de la dérivée optimale nous permet de donner la nature de l'origine qui peut être un point selle ou un attracteur pour certaines trajectoires.

- Secteur hyperbolique dont l'origine est point selle.
- Secteur parabolique dont l'origine est un nud stable.
- Secteur elliptique dont l'origine est un foyer instable.

Sur le plan quantitatif, le calcul d'erreur quadratique montre l'avantage de la dérivation optimale pour les approximations le long d'une trajectoire, tandis que sur le plan qualitatif l'application de la méthode met en évidence l'influence du choix des conditions initiale.

Dans le cas de l'application de ce modèle à l'évolution du sida dans une société, le point

(0,0) représente l'annulation de la société, l'étude du comportement au voisinage de ce point est très important.

D'après l'étude de B.D.Aggrawalla les solutions tendent à l'origine avec une pente $m = \tan(\theta)$ et cet équilibre peut être un point selle dans le secteur $0 < \theta < \theta_1$ et un noeud stable dans le secteur $\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

La linéarisation de ce modèle autour de ce point d'équilibre par la méthode de la dérivée optimale nous permet d'étudier le comportement analytique autour de l'origine et de confirmer leur stabilité. Donc l'aspect qualitatif (comportement des solutions, type de l'origine) peuvent être retrouvé par cette méthode.

Nous avons discuté un grand nombre de cas qui peuvent se présenter lors de la convergence des solutions vers les trois point d'équilibres et en particulier pour l'équilibre (0, 0) pour différentes valeurs de a, k et α .

Pour $\alpha \geq 1$, où l'espace de proie à la chance maximale de survivre, les solutions ne tendent pas à l'origine et on ne peut pas avoir le cas de l'annulation de la société.

Deux cas peuvent se présenter:

- L'extinction des prédateurs et la survie de la population de proie ($k < a$), c'est le cas de l'élimination de la maladie.
- La coexistences des deux populations malgré l'augmentation du nombre de personnes infectées ($k > a$).

Pour $\alpha < 1$, c'est le cas le plus intéressant tenir compte d'une grande variété des solutions ou les différentes situations peuvent se présenter.

- L'extinction des deux populations où le grand nombre de prédateurs infecte tous les proies et se disparaissent ensuite. De telle situation ramène la société à l'annulation.
- L'extinction des prédateurs ce qui implique la survie de la proie seulement. Ainsi la maladie étant éliminer.
- La coexistence des deux populations proie et prédateurs du faite que les proies se produisent assez rapidement pour composer leurs taux de mortalité.

L'application du modèle de **B.D.Aggarwala** à la diffusion du sida dans la société Ca-

nadienne et les résultats trouvés par la linéarisation de ce modèle par la méthode de la dérivée optimale, montre que le nombre de personnes infectées par le virus HIV commence à se développer beaucoup plus rapidement que le moment actuel, ce qui implique que la forme et l'intensité de l'épidémie du sida sont étroitement liées à l'augmentation de ce nombre. Donc la prise en charge de l'infection par le HIV s'inscrit de plus en plus autour de la gestion d'une maladie au long cours.

Visiblement, il reste beaucoup à faire pour comprendre le rôle important que jouent les interactions dans la dynamique de population.

- Evolution de la taille d'une population.
- Coexistence de différentes espèces.
- Relation de prédation.
- Mécanisme d'interaction.
- Stabilités des populations.