

## **Introduction Générale.**

# Introduction générale

## 0.1.Note historique

Les équations différentielles ordinaires modélisent une grande famille de phénomènes qui se manifestent dans plusieurs domaines (électronique, biologie, mécanique,...etc)[23]. Elles sont souvent non linéaires et innombrables et présentent en général des effets complexes et surprenants, en particulier des comportements chaotiques et des dynamiques transitoires.[26]

La seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle a été caractérisée par le développement de méthodes mathématiques destinées à la modélisation des systèmes biologiques. L'accumulation des données expérimentales en Biologie nécessite de construire des modèles dynamiques permettant de comprendre et de décrire l'évolution au cours du temps de certaines variables biologiques. Les premiers efforts de modélisation en dynamique des populations se sont concentrés vers des modèles où l'on manipule une variable agrégée caractéristique de la population considérée dans son ensemble, par exemple la densité. Ces modèles sont appelés modèles agrégés de dynamique des populations. Ils s'appuient sur une équation différentielle ou sur plusieurs équations différentielles couplées (modèle logistique, modèle de Lotka-Volterra). Donc, la modélisation des systèmes biologiques peut se faire à l'aide de systèmes d'équations différentielles ou bien en utilisant des modèles de simulation. Ces modèles permettent de prendre en compte chaque individu d'une population et de simuler son comportement et son interaction avec les autres individus.[28]

Par ailleurs, la construction et l'étude d'un modèle proie prédateur sont demeurées dans un domaine important en écologie théorique depuis les célèbres équations de Lotka (1924) et Volterra (1926). Ils ont prévu que la coexistence était une propriété normale. Malheureusement, Gause (1934) ne pouvait pas valider ces prévisions, il a produit seulement la coexistence de la proie et de prédateurs. Presque 40 ans après, Lukinbill (1973) a démontré que la coexistence peut être produite en diminuant le taux prédateur d'interaction et en limitant la disponibilité de nourriture de proie. Six ans après Veilleux (1979) a amélioré le travail de Lukinbill, prouvant que l'extinction prédatrice, la coexistence, et

la co-extinction peuvent tout être produites par des changements des paramètres fondamentaux de l'interaction.

En effet, R. Arditi et ses collaborateurs ont introduit une notion d'invariance du modèle par l'identification d'espèces; cela consiste à dire que, si l'on identifie deux espèces comparables d'un même niveau trophique (deux prédateurs sur une même proie par exemple), on doit obtenir la même équation qu'en partant d'une seule espèce.

En modélisation mathématique de phénomènes biologiques, on ne dispose en général pas de lois rigoureuses comme celles de la physique: pour être plus précis, il n'existe pas de "loi" donnant la forme analytique d'une relation proie prédateur. On est donc amené à utiliser des raisonnements de logique et de bon sens, ou alors, quand on dispose de mesures, des formules reproduisant le mieux et le plus économiquement possible la forme des courbes expérimentales.[27][28][29]

L'hypothèse fondamentale que nous ferons est que les deux proies sont du même type, c'est à dire qu'un prédateur peut manger l'une ou l'autre, éventuellement avec des paramètres différents: ce sont des ressources de type substituables, et pas complémentaires (Leon and Tumpson 1975). De même, les deux prédateurs sont du même type. Cela veut dire en particulier qu'on va les modéliser par le même modèle, mais avec des paramètres différents. Il s'en suit qu'Arditi et Ginzburg (1989) précédent une dialectique du système ratio dépendant, au terme de laquelle le système tel qu'il est modélisé, peut être conçu comme une abstraction de la dynamique de ces deux populations. Cette évolution permet d'aider et de comprendre le fonctionnement et le comportement de ce système au cours de temps et à appréhender certaines de ses caractéristiques dynamiques dans l'objectif d'évaluer différentes décisions. Il ne s'agit cependant que des simplifications empiriques, ne pouvant s'appliquer qu'aux modèles à formalisme purement mathématique. C'est pourquoi Arditi et Ginsburg ont proposé que les propriétés essentielles de la prédateur dépendance pourrait être rendus à une forme plus simple qui s'est appelée La ratio dépendance.[1]

## 0.2. Contribution

L'incroyable complexité que présente le fonctionnement de notre système donné par Arditi et Ginzburg (1989) à l'origine, ne peut pas être saisie par la simple acquisition de l'ensemble des paramètres qui le caractérise, comme cela a longtemps été le cas lorsque l'écologie se confinait à une démarche descriptive. Seule une modélisation par la dérivée optimale peut faire apparaître les comportements émergents. Elle a été introduite par Benouaz-Arino, basée sur le principe des moindres carrés qui permet d'associer une application linéaire. Celle-ci étant conçue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable au cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivable.

Au delà d'un certain point, la présence de beaucoup de paramètres ou l'ajout de paramètres supplémentaires ne fait qu'augmenter la complexité du modèle et accumuler les incertitudes. Il se peut même que ces accroissements d'incertitude fassent alors radicalement diverger le modèle par rapport au système réel en fonctionnement. Il convient souvent de préférer un nombre réduit de paramètres dont les incertitudes ne peuvent qu'oblitérer la qualité du modèle; on parle aussi dans ce cas d'agrégation. Il va de soi, par ailleurs, qu'accroître la complexité du modèle, ajouter des difficultés concernant la mise en oeuvre numérique. La simplification dans certaines limites est une vertu en modélisation.

Dés lors, les modèles proie prédateurs ratio dépendant peuvent montrer les propriétés dynamiques originales qui n'ont été jamais observées dans les modèles bidimensionnels simples de proie prédateur. Par exemple, l'origine peut être simultanément un noeud attractif et répulsif. L'hypothèse ratio dépendante ici a réveillé une polémique situation et reste toujours une question épineuse à cause de la réponse fonctionnelle qui est indéfinie à l'origine.[1]

Cette thèse aborde l'étude de la stabilité des modèles proie prédateurs ratio dépendant d'Arditi et de Ginzburg (1989) par la dérivée optimale. On verra en particulier dans quelle mesure cette dernière pourra contribuer à traiter la stabilité à l'origine. Pour cela,

on se propose:

-d'étudier le comportement des solutions du système ratio dépendant, même si ces modèles engendrent le phénomène de bifurcation.

-de tracer les lignes intégrales d'un champ de vecteur lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini.

On s'intéresse essentiellement au cas des systèmes linéarisés par la dérivée optimale. Dans ce cas, le comportement des solutions est gouverné par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice optimale associée.

Parmi aussi les objectifs principaux qui seront abordés pendant cette étude, l'analyse numérique d'un phénomène biologique obtenu dans une portion de l'espace paramétrique. Arditi et Ginzburg ont suscité une étude qui ne permet pas d'illustrer un résultat évoluant ce phénomène. (Eclatement de populations). Par contre nous, on prouve que, notre modélisation devient incontestablement l'outil mathématique principal pour décrire et déterminer les propriétés de la stabilité

-Dans un premier chapitre, on s'intéresse essentiellement à la stabilité des systèmes linéaires grâce aux concepts de stabilité donnés. Nous allons ensuite, rappeler la méthode de la dérivée optimale qui est en fait une approximation globale.

-Le deuxième chapitre est consacré à l'interaction proie prédatrice qui a été décrite originellement par deux chercheurs travaillant indépendamment, Lotka et Volterra. C'est pour cela que nous avons introduit des rappels sur ce modèle. La section 2-6 est réservée à l'identification et la présentation de notre système.

-Nous avons dans un troisième chapitre, donné succinctement une étude théorique dont le but est l'analyse paramétrique de la stabilité et des régimes dynamiques qui n'avait pas été réalisé jusqu'à 1989.

-Le dernier chapitre est consacré à l'aspect numérique, c'est à dire, la mise en oeuvre numérique de la synthèse de notre système en utilisant la dérivée optimale. Ces exemples sont destinés à montrer les possibilités que peut offrir cette méthode pour l'étude de la stabilité à l'origine. Finalement, une conclusion termine notre thèse.

# Chapitre I

Notions de stabilité et présentation  
de la dérivée optimale.

# Chapitre 1

## Notions de stabilité et présentation de la dérivée optimale

### 1.1 Introduction

En 1892, A.M.Lyapunov a publié sa thèse (Problème générale de la stabilité du mouvement) où il a introduit une définition très rigoureuse du problème de la stabilité du mouvement. Cette méthode est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeur réelle. Dans quelques classes de systèmes physiques, elle peut être choisie comme étant l'énergie du système. Malheureusement, la difficulté de la recherche, constitue un vrai handicap puisqu'on ne connaît pas de procédé pour la construction dans le cas général; cependant, il existe des techniques de constructions applicables seulement à des cas particuliers. Alors, on peut dire que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile; c'est pourquoi on utilise la méthode la plus classique basée sur la linéarisation (dérivée optimale). Il s'agit en fait une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés. Dans ce chapitre, on énonce les concepts de stabilité. On s'intéresse essentiellement aux systèmes linéaires.

Nous présentons aussi la dérivée optimale et ses propriétés principales.[18][23][26]

## 1.2 Concepts de stabilité

On se donne un système

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

tel que  $f(0) = 0$ , admettant  $x = 0$  comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

### Définition 1

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.1) est dit stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.1) on ait

$$\|x(0)\| < \eta \implies \forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable. Ceci s'exprime par la propriété qu'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe une solution  $x(t)$  de (1.1) telle que

$$\|x(0)\| < \eta \text{ et } \exists t \geq 0 \quad \|x(t)\| \geq \varepsilon$$

### Définition 2

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.1) est dit attractif s'il existe  $r > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.1) on ait

$$\|x(0)\| < r \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.1) est dit globalement attractif si pour toute solution  $x(t)$  de (1.1) on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

L'ensemble  $\beta$  défini par la propriété

$$x(0) \in \beta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

s'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi  $x = 0$  est attractif si  $\beta$  est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si  $\beta = R^n$ .

### Définition 3

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.1) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

### Définition 4

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.1) est dit exponentiellement stable s'il existe  $r > 0$ ,  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour toute solution  $x(t)$  on ait

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.1) est dit globalement exponentiellement stable s'il existe  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour toute solution  $x(t)$  de (1.1) on a

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On montre que, en général,

-stable n'implique pas attractif.

-attractif n'implique pas stable.

-exponentiellement stable implique asymptotiquement stable.

-asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable. [30]

### 1.3 Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, attractif implique stable (donc asymptotiquement stable équivaut à attractive) et asymptotiquement stable équivaut à exponentiellement stable. De plus, l'attractivité est toujours globale. En effet, considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.2}$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ . La solution de (1.2) s'écrit

$$x(t) = e^{tA}x(0) \tag{1.3}$$

La matrice exponentielle  $e^{tA}$  est définie par la série

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \dots$$

Pour calculer cette matrice exponentielle on cherche les valeurs propres de la matrice  $A$ , c'est à dire les racines du polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Considérons à nouveau le système:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= AM \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{array} \right. & \tag{1.4} \end{aligned}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On supposera  $\det(A) \neq 0$ , de sorte que le champ de vecteurs  $\vec{V}(M) = AM$  admet l'origine pour seul point critique. Comme le champ des tangentes est invariant par les homothéties de centre O, les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par homothéties. Distinguons maintenant plusieurs cas en fonction des valeurs propres de A.[30][31]

### 1.3.1 Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2$ de A sont réelles

**Cas où  $\lambda_1 \neq \lambda_2$**

Dans ce cas la matrice A est diagonalisable. Après changement de base on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réduit à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y \end{cases} \quad (1.5)$$

La solution du problème de cauchy avec  $M(0) = (x_0, y_0)$  est donc

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

de sorte que les courbes intégrales sont les courbes:

$$y = C |x|^{\lambda_2/\lambda_1}, C \in \mathfrak{R}$$

et la droite d'équation  $x=0$ . Distinguons deux sous cas:

\*  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de même signe et, disons,  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ . On a alors  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ . On dit qu'on a affaire à un noeud impropre:

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$  l'origine est un noeud impropre instable.

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  l'équilibre O dans ce cas est un noeud impropre stable.

\*  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de signes opposés, par exemple  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Il s'agit d'un col (instable).

**Les valeurs propres sont confondues:**  $\lambda_1 = \lambda_2$

Deux cas sont possibles:

\* A est diagonalisable. Les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$$

ce sont les droites  $y = \alpha x$  et  $x = 0$ . On dit qu'on a affaire à un noeud propre:  $\lambda > 0 \implies$  L'origine apparaît comme un noeud propre instable. Par contre, si  $\lambda < 0$ , l'équilibre O est un noeud propre stable.

\* A est non diagonalisable. Alors il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y \end{cases} \quad (1.6)$$

Les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t} \end{cases}$$

Comme toute courbe intégrale avec  $x_0 \neq 0$  passe par un point tel que  $|x(t)| = 1$ , on obtient toutes les courbes intégrales autres que  $x=0$  en prenant  $x_0 = \pm 1$ , d'où

$$\begin{cases} t = \frac{1}{\lambda} \ln |x| \\ y(t) = y_0 |x| + \frac{x}{\lambda} \ln |x| \end{cases}$$

On dit qu'il s'agit d'un noeud exceptionnel. Deux cas se présentent:

$\lambda > 0 \implies$  l'équilibre est un noeud exceptionnel instable.

$\lambda < 0 \implies$  l'équilibre ici est un noeud exceptionnel stable.

### 1.3.2 Les valeurs propres de $A$ sont non réelles

On a des valeurs propres complexes conjuguées  $\alpha + i\beta$ ,  $\alpha - i\beta$  avec disons  $\beta > 0$ , et il existe une base dans laquelle la matrice  $A$  et le système s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y \end{cases} \quad (1.7)$$

La manière la plus rapide de résoudre un tel système est de poser  $z = x + iy$ . On trouve alors:

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha + i\beta)x + (-\beta + \alpha i)y = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha + i\beta)z$$

de sorte que la solution générale est:

$$z(t) = z_0 e^{(\alpha + i\beta)t} = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$

En coordonnées polaires  $z = r e^{i\theta}$

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{cases}$$

soit

$$r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta - \theta_0)}$$

Il s'agit d'une spirale logarithmique si  $\alpha \neq 0$  et d'un cercle si  $\alpha = 0$  (noter que ce cercle donne en générale graphiquement une ellipse car la base utilisée ci-dessus n'est pas nécessairement orthonormée). On dit alors que le point singulier est un foyer, respectivement un centre:

Trois cas se présentent:

$\alpha > 0$  l'origine est un foyer instable.

$\alpha < 0$  l'origine est un foyer stable.

$\alpha = 0$  l'origine est un centre.

Si  $\alpha \neq 0$ , le rapport d'homothétie entre deux spires consécutives de la spirale est  $\exp(\frac{2\alpha\pi}{\beta})$ . [31]

Tous ces concepts et résultats seront utilisés dans l'étude de stabilité de la matrice optimale.

## 1.4 Présentation de la méthode

Nous allons rappeler la méthode de la dérivée optimale qui est en fait une approximation globale, qui se distingue de celle linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire. Agissant de l'étude de comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre dans les cas suivant:

1- Si  $DF(0)$  n'existe pas (cas où la fonction non linéaire définissant l'équation est non régulière et donc non différentiable).

2- Si  $DF(0)$  est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

On considère l'équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$x \in R^n$ ,  $F$  est définie dans un certain ouvert  $\Omega$  à valeurs dans  $R^n$ , avec les hypothèses suivant:

H1)  $F(0) = 0$ .

H2) Le spectre  $\sigma(DF(x))$  est contenu dans l'ensemble  $\{z : \text{Re}z < 0\}$  pour tout  $x \neq 0$  dans un voisinage de 0, où  $DF(x)$  existe.

H3)  $F$  est continue. Lipschitzienne, de constante de Lipschitz  $\gamma$ .

Le problème que nous posons peut être traduit comme suit.

Trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

La méthode consiste à déterminer une application linéaire de la forme qui approche l'équation non linéaire dans les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrés de l'écart  $\varepsilon(t)$  entre l'équation non linéaire  $F(x(t))$  et l'équation linéaire  $Ax(t)$ , soit

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - \tilde{A}x(t). \quad (1.10)$$

Pour ce faire, on considère la fonctionnelle suivante

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (1.11)$$

La minimisation de celle-ci le long d'une solution donnée permet de construire une procédure itérative permettant de déterminer, une application linéaire définie comme étant la dérivée optimale de l'équation différentielle ordinaire non linéaire qui démarre avec la linéarisation par dérivation au sens de Fréchet  $DF(x)$  calculée en  $x_0$  si celle-ci existe en  $x_0$ .

En introduisant la fonction  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \quad (1.12)$$

la matrice optimale  $\tilde{A}$  s'écrit alors

$$\tilde{A} = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.13)$$

où  $\tilde{A}$  est définie et unique à condition que  $\Gamma(x)$  soit inversible.

### 1.4.1 Algorithme de la procédure

Considérons de nouveau le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

#### Première étape

Calcul de  $A_0 = DF(x_0)$

#### Deuxième étape

Calcul de  $A_1$  à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt \quad (1.15)$$

où  $A_1$  est déterminée de manière unique par la formule

$$A_1 = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.16)$$

Où  $x$  est la solution de l'équation. On voit ainsi que mis à part la matrice initiale, les matrices déterminées par la procédure ne sont pas les matrices Jacobienne de  $F$  en un point donné.

### Troisième étape

Pour calculer  $A_j$ , à partir de  $A_{j-1}$ , on doit d'abord résoudre

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{j-1}] y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

On note  $y_j(t)$  la solution de l'équation.

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t)) - Ay_j(t)\|^2 dt \quad (1.18)$$

conduit à  $A_j$ .

En supposant encore que  $\Gamma(y_j)$  est inversible.

$$A_j \Gamma(y_j) = \int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt. \quad (1.19)$$

$A_j$  s'écrit

$$A_j = \left[ \int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt \right] [\Gamma(y_j)]^{-1}. \quad (1.20)$$

Si la suite  $A_j$  converge, alors la limite  $\tilde{A}$  est appelée la dérivée optimale de  $F$  en  $x_0$ .

de[11] → [15] + de[17] → [23]

## 1.4.2 La dérivée optimale dans le cas scalaire

Considérons une équation différentielle scalaire non linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

avec  $x \in R, f: R \rightarrow R$

Le problème est d'approcher par une équation différentielle linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{a}x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(a) = \int_0^{+\infty} |f(x(t)) - ax(t)|^2 dt. \quad (1.23)$$

dans ce cas les hypothèses sur  $f$  sont les suivantes:

- i)  $f(0) = 0$ .
- ii)  $f'(x) < 0$ , en tout point où  $f'$  existe dans l'intervalle  $]-\alpha, \alpha[$  avec  $\alpha > 0$ .
- iii)  $f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le calcul se fait d'une manière analogue à celle du cas vectoriel, on commence par le calcul de  $a_0 = f'(x_0)$  puis on calcule  $a_1$  en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$a_1$  est donnée par (1.24) en substituant  $F$  par  $f$  :

$$a_1 = \frac{\int_0^{x_0} f(x(t)) x(t) dt}{\int_0^{x_0} x^2(t) dt} \frac{1}{x_0} \quad (1.24)$$

en changeant la variable  $t$  par  $x(t) = \exp(a_0 t) x_0$ , il vient

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\int_0^{x_0} f(x) dx}{\int_0^{x_0} x dx} \\ &= \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \end{aligned} \quad (1.25)$$

$a_1$  ne dépend pas de  $a_0$ ; et par conséquent, la procédure de la dérivation optimale converge au premier pas, c'est à dire

$$\tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (1.26)$$

### 1.4.3 Quelques propriétés de la dérivée optimale

#### Cas où l'application est linéaire

Si  $F$  est linéaire et le spectre  $\sigma(F)$  est contenu dans le plan complexe à partie réelle strictement négative, alors la procédure donne  $F$  à la première itération

$$\tilde{A} = F \quad (1.27)$$

On peut donc affirmer que la dérivée optimale d'un système linéaire est le système lui-même.

#### Cas où $F$ est une somme de termes linéaires et non linéaires

Considérons un système général d'équation non linéaire avec une non linéarité de la forme:

$$F(x) = Mx + \hat{F}(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1.28)$$

où  $M$  désigne la partie linéaire, le calcul de la matrice  $A_0$  donne:

$$A_1 = \left[ \int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1}. \quad (1.29)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} A_1 &= M + \left[ \int_0^{+\infty} [\widehat{F}(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \\ &= M + \widehat{A}_1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

d'une manière générale, pour l'itération  $j$

$$A_j = M + \widehat{A}_j \quad (1.31)$$

avec

$$\widehat{A}_j = \left[ \int_0^{+\infty} [\widehat{F}(x_j(t))] [x_j(t)]^T dt \right] [\Gamma(x_j(t))]^{-1} \quad (1.32)$$

donc, si la composante  $f_k$  de  $F$  est linéaire alors  $\widehat{f}_k$  est nulle, la  $k^{ième}$  ligne de la matrice optimale  $A_j$  est égale à  $\widehat{f}_k$ . [16] [18] [23] [26]

## **Chapitre II**

**Rappels, présentation de modèle ratio  
dépendant d'Arditri-Ginzburg.**

# Chapitre 2

## Rappels, présentation du modèle ratio dépendant d'Arditri Ginzburg

### 2.1 Introduction sur les relations proies prédateurs

On désignera ici sous le terme de prédateurs, toute espèce qui se nourrit aux dépens d'une autre. Les phytophages et les parasites sont des cas particuliers de prédateurs.

Un prédateur peut se définir en fonction du nombre de proies consommées:

-monophagie: une seule proie (le panda géant et les feuilles de bambous; le koala et les feuilles d'eucalyptus).

-oligophagie: vie aux dépens de quelques espèces proches (doryphore).

-polyphagie: nombreuses espèces proies ingérées.

Le régime alimentaire peut changer avec l'âge ou le stade de développement. Exemple: (Poisson Sparidae, *Sarpa salpa*).

Dans les relations proies prédateurs, il convient de distinguer:

- 1- les réponses du prédateur vis à vis d'une proie,
- 2- les effets de la prédation sur les populations de proies et
- 3- les rôles de la prédation.

### 2.1.1 Réponses d'un prédateur aux variations d'abondance d'une proie

On peut distinguer avec Holling deux types de réponses:

**-réponse fonctionnelle:** augmentation du nombre de proies consommées lorsque la densité de proie augmente.

**-réponse(s) numérique(s):** changement de densité du prédateur lorsque le nombre de proie augmente.

Cela revient à dire que le nombre de proies disponibles augmente, un prédateur peut d'abord réagir en modifiant son taux de prédation (réponse fonctionnelle) et ensuite augmenter ses effectifs (réponse numérique).

Quatre types de réponses fonctionnelles sont reconnus:

-nombre de proies est rapidement constant (Thompson)-exemple. Crustacés;

-nombre de proies augmente proportionnellement (Nicholson et Bailey)-exemple. Insectes parasites;

-nombre de proies augmente puis se stabilise (curvilinéaire -Holling)-exemple. La plupart des Arthropodes étudiés;

-réponse sigmoïde: prédation importante au-delà d'un certain seuil, puis stabilisation-exemple. Vertébrés et Insectes parasites. Cette réponse implique souvent un changement de comportement du prédateur vis à vis de la proie.

### 2.1.2 Autre type de réaction fonctionnelle

Intervenir des proies secondaires -Effet de bascule ou Switching: si une proie n'est pas fortement disponible, une proie secondaire est préférée.

Consommation de Proies =  $C_1$  et  $C_2$

Nombre de Proies =  $N_1$  et  $N_2$

$$\text{Absence de Switching : } \frac{C_1}{C_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\text{En cas de Switching : } \frac{C_1}{C_2} = p \frac{N_1}{N_2}$$

avec p variable:  $p = f(N_1, N_2)$

### **2.1.3 Autre type de réponse du prédateur à la densité des proies (Réponse agrégative)**

Ce type de réponse n'est pas toujours mentionné dans les autres livres classiques d'écologie (en français). S'apparente à la théorie anglaise très en vogue, celle de l'optimal foraging. Quand les proies ont une distribution groupée, les prédateurs sélectionnent de préférence les zones où la densité des proies est maximale (réponse agrégative).

La théorie de l'optimal foraging, complète cette réponse en lui associant une notion énergétique: le prédateur doit optimiser son gain d'énergie (nourriture) en fonction de ses dépenses (exemple: trajets réalisés sans se nourrir, pour aller chercher de la nourriture). Ce type de comportement subit les pressions de sélection et le comportement optimal est sélectionné.

### **2.1.4 Réponses numériques**

En réponse aux variations d'abondance des proies, la population de prédateur peut voir ses effectifs variés. Il n'y a pas une réponse numérique et une seule, mais plusieurs éléments peuvent être modifiés pour déclencher une augmentation numérique de l'abondance de prédateurs:

- variations du taux de croissance individuel.
- variations de la durée de développement.
- variations de la fécondité (taille des pontes ou fréquence de la reproduction).
- variations des taux de mortalité.
- variations des taux d'émigration ou d'immigration.

## 2.2 Effets de la prédation sur les populations de proies

Si on prend en compte simultanément les réponses fonctionnelles et numériques, on peut décrire l'évolution simultanée des populations de proies et de prédateurs. De façon classique, on considère un système simple, avec une proie et un prédateur. Cela ne se rencontre que dans les systèmes avec monophagie. Cela décrit donc rarement la réalité. Le modèle le plus classique: modèle de Alfred Lotka et Vito Volterra (1925).

Système à deux équations différentielles décrivant l'évolution dans le temps de la densité de proie et de la densité de prédateur.

**Croissance de la population de proies (N) en cas d'absence de prédateurs:**

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \quad (2.1)$$

**En présence de prédateurs:**

$$\frac{dN}{dt} = (r_1 - k_1 P) N \quad (2.2)$$

**Croissance de la population de prédateurs en cas d'absence de proies:**

$$\frac{dP}{dt} = -r_2 P \quad (2.3)$$

**En présence de proies:**

$$\frac{dP}{dt} = (-r_2 + k_2 N) P \quad (2.4)$$

Alors le modèle générale d'interaction proies prédateurs qui a été proposé par Volterra après la première guerre mondiale est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = (r_1 - k_1 P) N \\ \frac{dP}{dt} = (-r_2 + k_2 N) P \\ N(0) = N_0, P(0) = P_0 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$r_1, r_2, k_1, k_2$  sont des constantes positives.

$r_1$  le taux de natalité des proies en l'absence des prédateurs. On a donc croissance exponentielle de ces dernières.

$k_1 P(t)$  est le taux de mortalité des proies dû à la prédation.

$r_2$  le taux de mortalité des prédateurs en l'absence des proies. On a alors décroissance exponentielle de ces prédateurs.

$k_2 N(t)$  le taux de natalité des prédateurs.

$K_1$  mesure l'habileté des proies à échapper aux prédateurs.

$K_2$  mesure l'habileté des prédateurs à capturer des proies.

### **Variantes au modèle de Lotka et Volterra**

Différentes variantes ont été proposées. Elles ne diffèrent entre elles que par la description de l'évolution dans le temps de la densité de proies et de prédateur. Modèle de Leslie, modèle de Schaefer, modèle généralisé de Pella et Tomlinson ...

Ces modèles reposent toujours sur la résolution de deux équations différentielles, l'une pour la proie, l'autre pour le prédateur.

## **2.3 Remarques importantes**

1- Un système proie prédateur peut montrer trois types d'évolution:

-oscillations entretenues indéfiniment avec amplitude constante;

-oscillations amorties aboutissant à un équilibre;

-oscillations amplifiées aboutissant tôt ou tard à la destruction du système par disparition d'un partenaire ou l'autre (d'après Frontier & Pichod-Viale, 1993).

2- Les deux populations évoluent de façon périodique et décalée.

3- Malgré les limites d'un tel modèle, ce type de modèle proie prédateur (Lotka Volterra ou autre comme Nicholson & Bailey ou Hassel & Varley) sont souvent utilisés en lutte biologique.

4- Ces modèles déterministes (les évolutions sont déterminées par des équations) sont

difficilement généralisables: ils ne sont valables que dans une gamme de valeurs précises (celles qui ont servies à son établissement).

5- Excepté dans les cas de monophagie, la proie n'est pas unique et le prédateur non plus!

Les interactions entre niveaux trophiques sont parfois indirectes:

Trois niveaux trophiques:

-super prédateur

-prédateur

-proie

Chaque niveau consomme préférentiellement le niveau inférieur. Si le super prédateur devient rare, le prédateur devient plus abondant et les proies (dernier niveau) deviennent rares à leur tour.

### **Exemples:**

-loutre, oursins et algues (Pacifique, USA).

-des oiseaux, leurs prédateurs (renard gris d'Amérique, moufette rayée, raton laveur, chat domestique) et un super-prédateur (coyote).

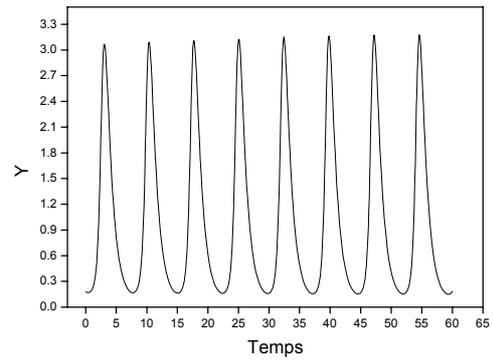
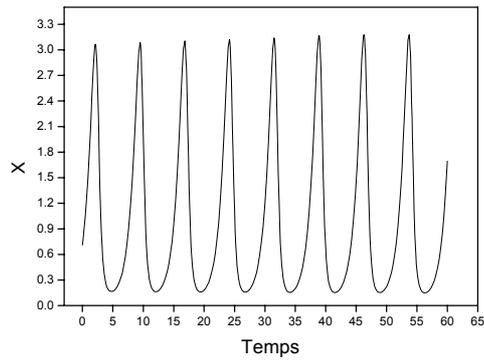
-en Méditerranée, poissons Sparidae (sar, daurade), oursins et algues (Cystoseires) (Sala, 1996).

## **2.4 Extensions des données précédentes**

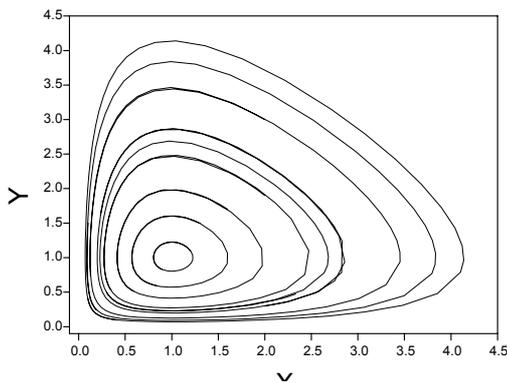
Tout ce qui vient d'être dit l'a été pour deux espèces. Les modèles mathématiques développés, à base d'équations différentielles, sont souvent difficiles à résoudre et nécessitent de nombreuses approximations (simplifications). Quand on passe à trois ou plus espèces, cela devient impossible à réaliser mathématiquement avec le même système d'équations différentielles. On a eu recours à la théorie de l'information. Actuellement une branche de l'écologie théorique en très fort développement.

### **Rôles de la Prédation**

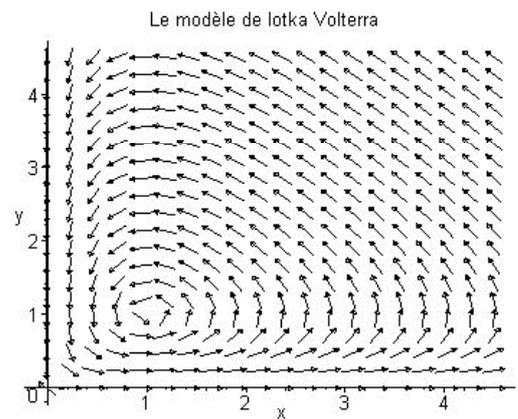
-Essentiellement la nutrition d'un prédateur aux dépends de proies, mais il existe aussi



**Figures-2.1-:** Comportement des deux populations proies ( $x$ ) et prédateurs ( $y$ ) décrivant Le modèle de Lotka Volterra pour des conditions initiales  $(0.71, 0.18)$ . (les valeurs de paramètres sont normalisées).



**Figure-2.2- :** Le modèle de Lotka Volterra pour différentes conditions initiales (les valeurs de paramètres sont normalisées)



**Figure-2.3-:** Champ de vecteurs associé au modèle de Lotka Volterra pour des valeurs de paramètres normalisées

d'autres rôles:

-Élimination des animaux malades:

\* ils sont les plus faciles à capturer (exemple avec trématodes parasites des podias d'oursins);

\* maintien de l'état sanitaire des populations de proies;

\* peut enrayer des épidémies.

-Prédation sélective: peut induire une sélection de certains individus et une évolution (spéciation); exemple des papillons, *Biston betularia*, atteint de mélanisme lors période de forte pollution en Angleterre au XIX /siècle.

-Organisation des peuplements: La prédation favorise une diversité élevée en maintenant les populations à un faible niveau et en empêchant certaines espèces de monopoliser les ressources disponibles à leur seul profit (Paine, 1966). [7], [32] → [37]

## 2.5 Types de bifurcation

On parle de la stabilité ou de l'instabilité locale ou globale, la stabilité locale signifiant la convergence des solutions avec des conditions initiales proches tandis que l'instabilité globale signifie la divergence de solutions en dehors de toute limite.

### 2.5.1 Bifurcations locales

Les bifurcations locales sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution.

#### **Bifurcation point selle noeud (fold)**

Dans un système de dimension 2, une selle entre en collision avec un noeud (stable ou instable), d'où le nom de cette bifurcation. Elle représente le mécanisme pour lequel les points d'équilibre sont détruits. Un exemple simple de dimension 1 d'équation pour

laquelle elle est observée est:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \mu \quad (2.6)$$

La variation de la dynamique dépend de  $\mu$ .

**1<sup>er</sup> cas:**  $\mu < 0$

Le système (2.6) ne possède aucun point d'équilibre.

**2<sup>ème</sup> cas:**  $\mu = 0$

L'origine est le seul point d'équilibre. L'analyse par la linéarisation classique ne permet pas de déterminer la stabilité, cependant, l'analyse par la dérivée optimale conduit à

$$\tilde{a} = \frac{2}{3}x_0 \quad (2.7)$$

qui est de type stable quand  $x_0 \in ]-\alpha, 0[$  et de type instable quand  $x_0 \in ]0, \alpha[$ ,  $\alpha \in R^+$ , l'origine est donc "demi stable".

**3<sup>ème</sup> cas:**  $\mu > 0$

Le système (2.6) possède deux points d'équilibre:  $x_{eq1} = -\sqrt{\mu}$  et  $x_{eq2} = \sqrt{\mu}$ , la linéarisation classique donne:

-Au voisinage de  $x_{1eq}$

$$f'(x_{1eq}) = -2\sqrt{\mu} \quad (2.8)$$

-Au voisinage de  $x_{2eq}$

$$f'(x_{2eq}) = 2\sqrt{\mu} \quad (2.9)$$

Donc, par la linéarisation classique  $x_{1eq}$  est asymptotiquement stable,  $x_{2eq}$  est instable.

### **Bifurcation transcritique (cas particulier de la bifurcation saddlenode ou fold)**

Certaines bifurcations, souvent considérées comme classiques, sont en fait des cas particuliers de cette bifurcation fold. Dans ce cas, elle est caractérisée par un échangeement dans la stabilité de l'équilibre. Une équation simple permettant d'observer ce phénomène

peut être:

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu x - 1 \quad (2.10)$$

On distingue deux domaines différents en fonction de  $\mu$ .

**1<sup>er</sup> cas:**  $|\mu| \geq 2$

Dans ce cas le système (2.10) possède deux points d'équilibre:  $\mathbf{x}_{1eq} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$  et

$$\mathbf{x}_{2eq} = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \text{ pour } \mu \neq \pm 2. \text{ Si } \begin{cases} \mu = 2 & \mathbf{x}_{eq} = 1 \\ \mu = -2 & \mathbf{x}_{eq} = -1 \end{cases}$$

L'analyse de la stabilité par la linéarisation classique donne:

-Au voisinage de  $\mathbf{x}_{1eq}$

$$f'(\mathbf{x}_{1eq}) = -\sqrt{\mu^2 - 4} \quad (2.11)$$

-Au voisinage de  $\mathbf{x}_{2eq}$

$$f'(\mathbf{x}_{2eq}) = \sqrt{\mu^2 - 4} \quad (2.12)$$

Donc,  $\mathbf{x}_{1eq}$  est asymptotiquement stable,  $\mathbf{x}_{2eq}$  est instable. Il s'est produit donc un échange de stabilité entre les deux points d'équilibre.

**2<sup>ème</sup> cas:**  $|\mu| < 2$

Le système (2.10) ne possède aucun point d'équilibre.

### Bifurcation Pitchfork (fourche)

On distingue dans ce cas trois types de différentes structures: Bifurcations pitchfork supercritique, subcritique et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système.

La distinction super/subcritique est intéressante du point de vue biologique car les deux bifurcations n'ont pas du tout la même signification. En effet, pour des valeurs décroissantes du paramètre, dans le cas de la bifurcation supercritique le système passe continûment d'un équilibre haut ou bas à un équilibre moyen. Au contraire, dans le cas de la bifurcation subcritique, le système est sur l'équilibre moyen et brusquement cet attracteur disparaît et la solution du système saute de manière discontinue vers un autre attracteur

ou diverge vers l'infini. Par exemple, si le système représente une population, il y a une différence énorme entre le passage doux d'un régime de croissance à un autre (bifurcation supercritique) et l'extinction brutale de la population (bifurcation subcritique). Nous allons nous contenter d'étudier la dégénérescence de la bifurcation fourche supercritique suivante:

$$\frac{dx}{dt} = 4\mu x - x^3 \quad (2.13)$$

Cette bifurcation présente une symétrie sous un changement de variable  $x \rightarrow -x$ .

**1<sup>er</sup> cas:**  $\mu < 0$

L'origine est le seul point d'équilibre. L'analyse par la linéarisation classique ne permet pas de déterminer la stabilité. L'analyse par la dérivée optimale se fait comme suit:

$$f(x) = 4\mu x - x^3 \Rightarrow f'(x) = 4\mu - 3x^2 < 0 \text{ pour tout } x \in R. \text{ Donc } \tilde{a} = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} f(x) dx$$

$$\tilde{a} = 4\mu - \frac{x_0^2}{2} \quad (2.14)$$

L'origine est donc asymptotiquement stable.

**2<sup>ème</sup> cas:**  $\mu = 0$

L'origine est toujours le seul point d'équilibre, il constitue un point d'équilibre dégénéré, la linéarisation classique ne permet pas de déterminer sa nature.  $f'(x) = -3x^2 < 0$ .

L'analyse par la dérivée optimale donne:

$$\tilde{a} = -\frac{x_0^2}{2} \quad (2.15)$$

Ainsi, l'origine est asymptotiquement stable.

**3<sup>ème</sup> cas:**  $\mu > 0$

Dans ce cas, en plus de l'origine, deux nouveaux points d'équilibre apparaissent:

$$x_{1eq} = -2\sqrt{\mu} \quad x_{2eq} = 2\sqrt{\mu}$$

En effectuant le changement de variable  $y = x \pm 2\sqrt{\mu}$ , on obtient:

-Au voisinage de  $x_{1eq} = -2\sqrt{\mu}$

On pose  $y = x + 2\sqrt{\mu}$  L'équation devient:

$$\frac{dy}{dt} = -y^3 + 6\sqrt{\mu} y^2 - 8\mu y \quad (2.16)$$

$f'(y) = -3y^2 + 12\sqrt{\mu} y - 8\mu \Rightarrow f'(y) < 0$  pour  $y \in ]-(2\sqrt{\mu} - \frac{2}{3}\sqrt{3\mu}), 2\sqrt{\mu} - \frac{2}{3}\sqrt{3\mu}[$ . C'est à dire que  $\alpha = 2\sqrt{\mu} - \frac{2}{3}\sqrt{3\mu}$ .

Alors, l'analyse par la dérivée optimale donne:

$$\tilde{a} = -\frac{y_0^2}{2} + 4\sqrt{\mu}y_0 - 8\mu \quad (2.17)$$

-Au voisinage de  $x_{2eq} = 2\sqrt{\mu}$

On pose  $y = x - 2\sqrt{\mu}$  L'équation devient:

$$\frac{dy}{dt} = -y^3 - 6\sqrt{\mu}y^2 - 8\mu y \quad (2.18)$$

$f'(y) = -3y^2 - 12\sqrt{\mu} y - 8\mu \Rightarrow f'(y) < 0$  pour  $y \in ]-(2\sqrt{\mu} - \frac{2}{3}\sqrt{3\mu}), 2\sqrt{\mu} - \frac{2}{3}\sqrt{3\mu}[$ . C'est à dire que  $\alpha = 2\sqrt{\mu} - \frac{2}{3}\sqrt{3\mu}$ .

L'analyse par la dérivée optimale cette fois ci donne:

$$\tilde{a} = -\frac{y_0^2}{2} - 4\sqrt{\mu}y_0 - 8\mu \quad (2.19)$$

-Au voisinage de l'origine

nous avons montré précédemment que (on choisi  $y_0 = x_0$ ):

$$\tilde{a} = \mu - \frac{y_0^2}{2} \quad (2.20)$$

donc, par la dérivée optimale,  $x_{1eq}$  et  $x_{2eq}$  sont asymptotiquement stables, l'origine est instable.

## **Bifurcation de Hopf**

Il existe évidemment deux versions subcritique et supercritique de cette bifurcation. Le cycle apparaît avec une amplitude infinitésimale mais une période finie.

Détection: Deux valeurs propres complexes conjuguées du Jacobien traversent l'axe des imaginaires. Le sens de traversée détermine le type (super ou subcritique) de bifurcation.

## **2.5.2 Bifurcations globales**

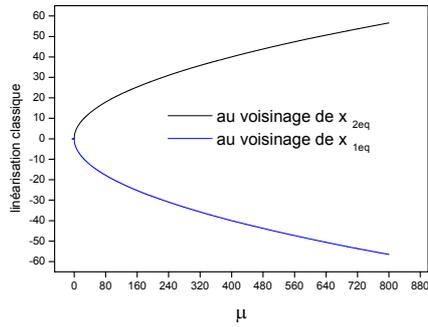
Ces bifurcations correspondent à des collisions de variétés et elles ne font donc pas forcément intervenir le voisinage de la solution. Ici les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées globales.

### **Orbite hétéroclinique**

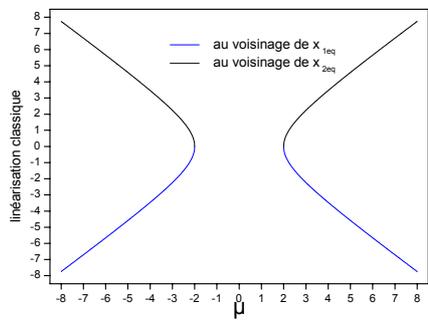
Cette bifurcation résulte de la collision de variétés stables et instables de deux selles séparées. C'est en fait un phénomène assez rare et de peu d'intérêt dans le cas des systèmes biologiques.

### **Orbite homoclinique**

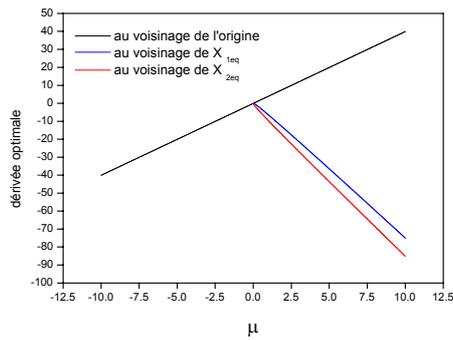
Ici, ce sont les variétés stable et instable d'une même selle qui entrent en collision. Selon le signe d'une certaine quantité, appelée quantité de selle et notée  $\sigma$ , deux types de cycles sont observés. [7] [8] [9] [10] [24] [25]



**Figure -2.4-:** Système linéaire en fonction du paramètre de bifurcation. Cas de la bifurcation point selle noeud.



**Figure -2.5-:** Système linéaire en fonction du paramètre de bifurcation. Cas de la bifurcation transcritique.



**Figure-2.6-:** Système linéaire en fonction du paramètre de bifurcation. Cas de la bifurcation fourche.

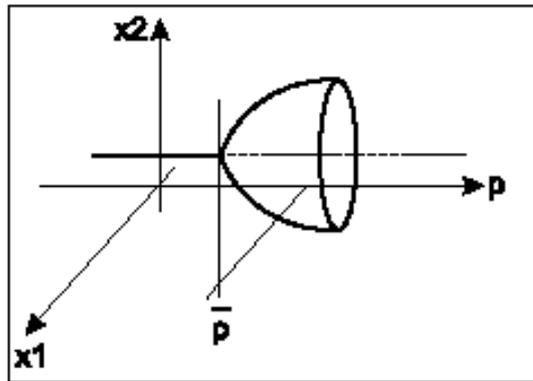


Figure 2.7: Bifurcation de Hopf (supercritique)

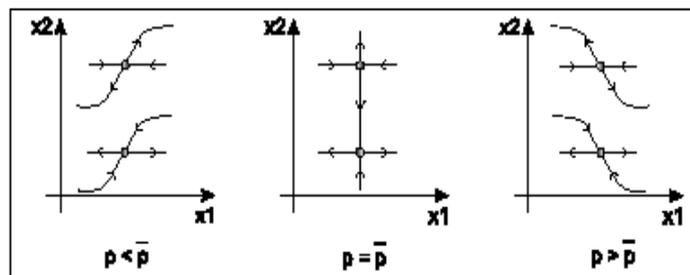


Figure -2.8-: Bifurcation hétéroclinique

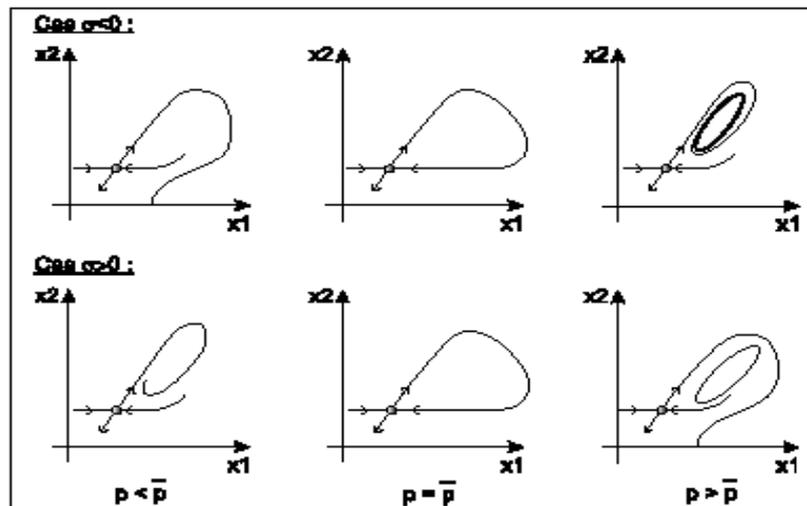


Figure -2.9-: Bifurcation homoclinique

## 2.6 Présentation du modèle proposé par Arditi et Ginzburg

Le modèle proie prédateur ratio dépendant général d'Arditi et de Ginzburg (1989) est le suivant:

$$\begin{cases} \frac{dN}{d\tau} = rN_{\varphi}(N) - g\left(\frac{N}{P}\right) \\ \frac{dP}{d\tau} = eg\left(\frac{N}{P}\right)P - qp \end{cases} \quad (2.21)$$

Là où la fonction  $rN_{\varphi}(N)$  caractérise la vitesse de la croissance de la proie en absence de prédateurs.

La fonction linéaire  $qp$  décrit la vitesse de la mort prédatrice en absence de proies.  $g(x) = g\left(\frac{N}{P}\right)$  représente la fonction trophique ou la réponse fonctionnelle, décrit le nombre de proies consommées par prédateur par unité de temps.

$e$  l'efficacité de la conversion prédatrice.

La forme la plus spécifique de ce modèle assume la forme logistique familière pour  $N_{\varphi}(N)$  et la forme hyperbolique de Monod-Holling pour la réponse fonctionnelle (la fonction trophique):

$$g(x) = \frac{\alpha x}{1 + \alpha h x} = \frac{\alpha \frac{N}{p}}{1 + \alpha h \frac{N}{p}} = \frac{\alpha N}{p + \alpha h N} \quad (2.22)$$

$$N_{\varphi}(N) = N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.23)$$

avec

$$\begin{cases} (N, p) \in [0, \infty)^2 \setminus (0,0) \\ G(N > 0, 0) = \frac{1}{h} \\ G(0, P > 0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, nous étudierons le système:

$$\begin{cases} \frac{dN}{d\tau} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\alpha NP}{P + \alpha h N} \\ \frac{dP}{d\tau} = \frac{e\alpha NP}{P + \alpha h N} - qP \end{cases} \quad (2.24)$$

Sans compter les densités des populations  $N$  et  $P$ , les paramètres du système sont les valeurs non négatives  $r$ ,  $K$ ,  $\alpha$ ,  $h$ ,  $e$  et  $q$ .

$r$ : le taux de croissance de la population de proie.

$K$ : la capacité de charge de la population de proies en absence de prédateurs.

$q$ : le taux prédateur de mortalité normale.

$e$ : l'efficacité de la conversion prédatrice.

Les paramètres  $\alpha$  et  $h$  caractérisent la fonction trophique ratio dépendante:

$h$ : le prédateur du temps.

$\alpha$ : le taux maximum de consommation de proie.

Avec les changements appropriés des variables  $(N, P, t) \longrightarrow (x, y, \tau)$  et des paramètres du système, le modèle peut être simplifié à une forme sans dimensions avec un nombre réduit de paramètres indépendants. Ceci permet une analyse mathématique plus facile tout en préservant les problèmes essentiels. Le choix de la forme et de la combinaison spécifique de  $r, K, \alpha, h, e$  et  $q$  en tant que nouveaux paramètres sont essentiellement définies par le but écologique de l'étude.

Le but actuel est l'étude du système ratio dépendant, principalement dans le cadre de la dépendance au niveau de la population prédatrice, c'est à dire, pour des changements de paramètres qui caractérisent les relations trophiques. Ceci mène à la réduction suivante du modèle:

$$N = KX, \quad P = K\alpha hy, \quad \tau = \frac{t}{r} \quad \text{avec les paramètres: } v = \frac{\alpha}{r}, \quad \mu = \frac{e}{rh}, \quad \gamma = \frac{q}{r}$$

Alors, les équations dynamiques deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(Kx)}{d\left(\frac{t}{r}\right)} = rKx(1-x) - \frac{\alpha Kxy}{x+y} \\ \frac{d(\alpha hKy)}{d\left(\frac{t}{r}\right)} = e\alpha K \frac{xy}{x+y} - q\alpha hKy \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{\alpha}{r} \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{e}{hr} \frac{xy}{x+y} - \frac{q}{r}y \end{array} \right.$$

Finalement, on aboutit au système d'équations dynamiques cohérent suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - v \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{d\tau} = -\gamma y + \mu \frac{xy}{x+y} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Les paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$  sont des valeurs strictement positives, ils ont la signification suivante:

$\gamma$ : représente le taux de mortalité de prédateurs.

Les composants trophiques sont caractérisés par les deux paramètres  $\mu$  et  $v$  qui représentent respectivement ce qui suit:

-le taux maximum (asymptotique) de prédateurs, ou bien les capacités croissantes prédatrices.

-le taux de mortalité maximum (asymptotique) de proies dû à la prédation (les capacités de consommation).

Le modèle (2.21) a été réduit à une forme différente, qui était approprié analysé principalement sous l'effet de ses caractéristiques (proies et les caractères trophiques fixes). Il est significatif que les deux réductions soient équivalentes mathématiquement en servant toujours les différents et les complémentaires buts écologiques. Le chapitre suivant contient la formulation des résultats mathématiques principales de recherche sur le système (2.25).

Les hypothèses sont formalisées dans le théorème, les interprétations des résultats et les discussions se trouvent dans les sections (3.6) et (3.7).[1] [2] [3]

## **Chapitre III**

**Etude théorique appropriée**

# Chapitre 3

## Etude théorique appropriée

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux résultats relatifs de l'étude mathématique du système (2.25), et à la description du comportement qualitatif dans le premier quadrant du plan  $(xoy)$ , et sa dépendance en fonction des paramètres positifs  $\mu$ ,  $\nu$  et  $\gamma$ . Pour ceux ci, nous allons diviser l'espace de paramètres en huit domaines correspondants. Chaque domaine doit être associé à un plan de phase d'une telle manière que les frontières entre les domaines correspondent aux bifurcations du système.

En effet, Le système (2.25) a dans le premier quadrant trois points d'équilibre:  $O(x = 0, y = 0)$ ,  $A(x = 1, y = 0)$  et un autre non trivial  $B(x = x^*, y = y^*)$ . (voir la section (3.3)).

D'ailleurs, un des particularités mathématiques principales des modèles ratio dépendants, la distinction de cette classe de beaucoup de modèles proies prédateurs. En particulier, l'origine  $O$  est un point d'équilibre compliqué. Comme nous montrons ci dessous, les particularités du système (2.25) sont essentiellement déterminées par les caractéristiques du point  $O$ .

## 3.2 Idée du problème

L'espace de paramètres  $(\gamma, \mu, v)$  est subdivisé en huit domaines de différentes phases pour un taux de mortalité de prédateurs  $\gamma$  arbitrairement fixé. (Figure 3.2.f).

$$\text{MM} : \begin{cases} \mu = \gamma + 1 \\ v < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{Figures (3.2.f) (3.2.d)}$$

$$\text{NN} : \begin{cases} v = \gamma + 1 \\ \mu < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{Figures (3.2.e) (3.2.f)}$$

$$\alpha : v = \mu = \gamma + 1 \quad \text{Figures (3.2.e) (3.2.f)}$$

$$\text{H} : \begin{cases} v = \frac{\mu \left( \gamma + \frac{\mu}{\mu - \gamma} \right)}{\mu + \gamma} \\ \gamma < \mu < \gamma + 1 \end{cases} \quad \text{Figures (3.2.e) (3.2.a) (3.2.f)}$$

$$\text{BA} : \mu = v \quad \text{Figures (3.2.f) (3.2.d)}$$

$$\text{BO} : v = \frac{\mu}{\mu - \gamma} \quad \text{Figures (3.2.e) (3.2.b) (3.2.f)}$$

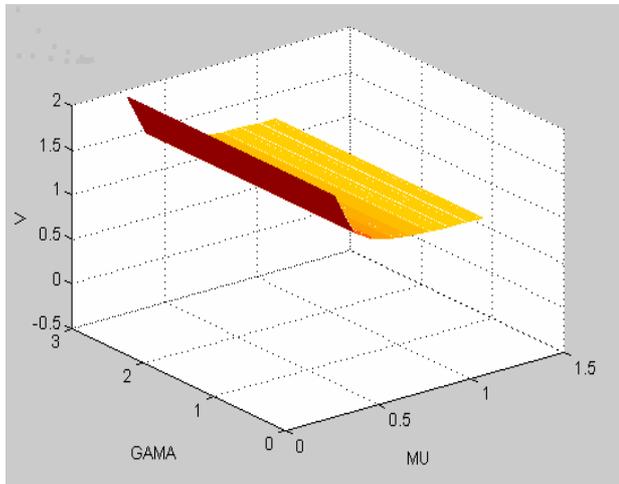
Pour MM et NN: Changement de structure topologique au voisinage du point d'équilibre O pour des valeurs de paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$  correspondant à ces surfaces. Voir les sections ((4.2.1) et (4.2.2)).

H: Bifurcation supercritique d'Andronov hopf. Figures (3.2.g) (3.2.h)

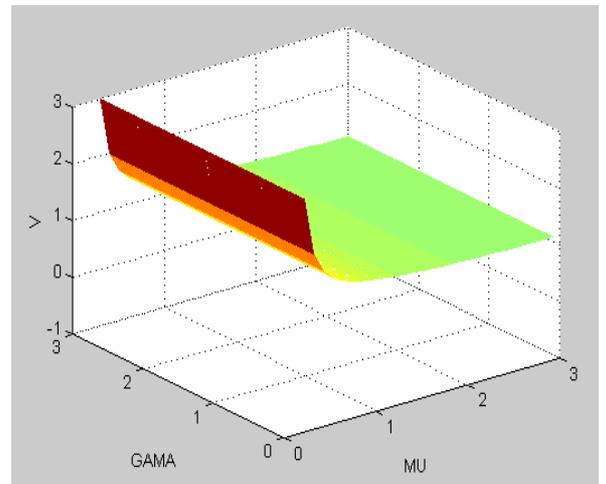
BO et BA: Apparition ou disparition de B.

L: Apparition ou disparition des contours hétéro cliniques. C'est à dire, ceux qui correspondent aux bifurcations hétéro cliniques, constitués par les séparateurs des points d'équilibres O et A. Cette frontière est associée à une bifurcation non locale. Figure (3.2.c).

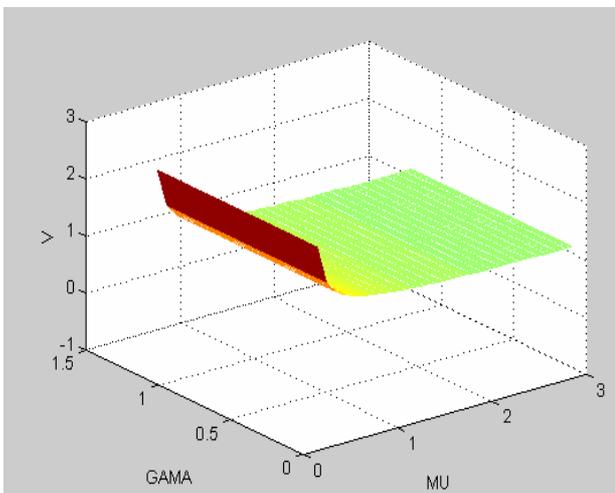
$\alpha$ : Le système (2.25) a une première intégrale de la forme:



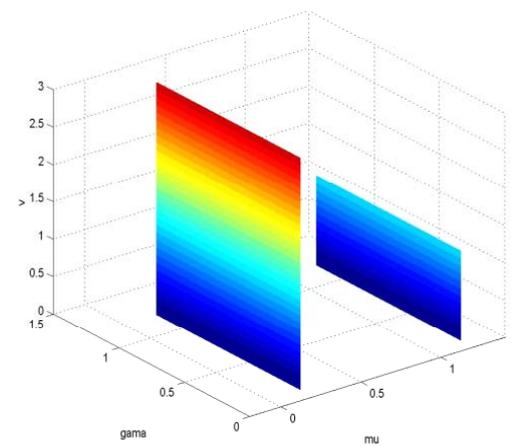
**Figure 3.2-a:** Surface de bifurcation:  
La frontière H.



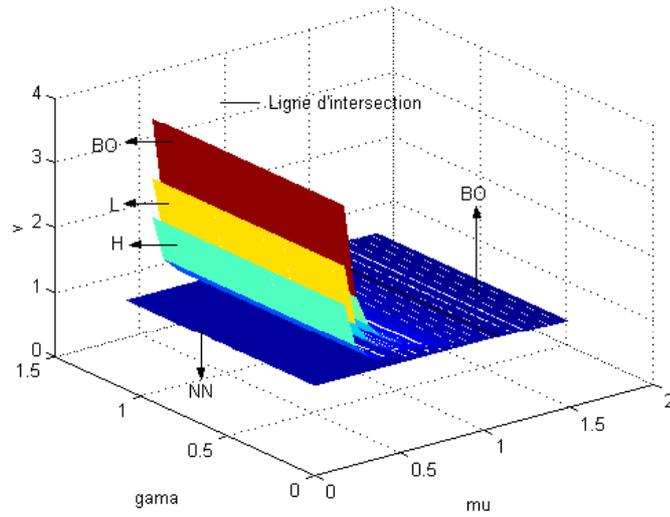
**Figure 3.2-b:** Surface de bifurcation:  
La frontière BO.



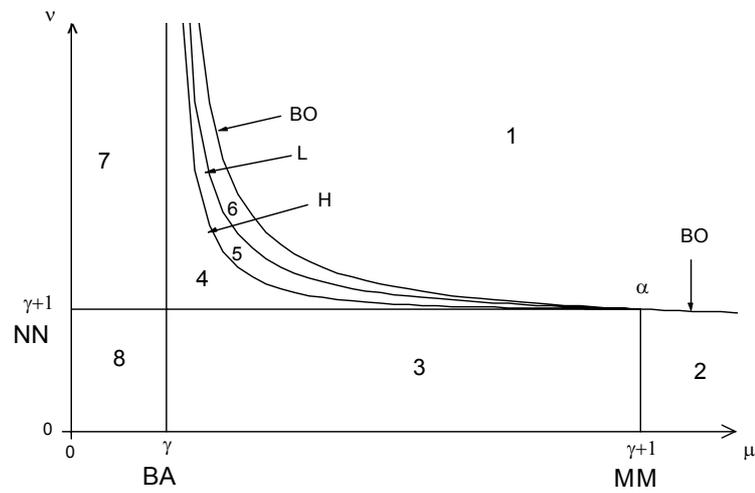
**Figure 3.2-c:** Surface de bifurcation:  
La frontière L.



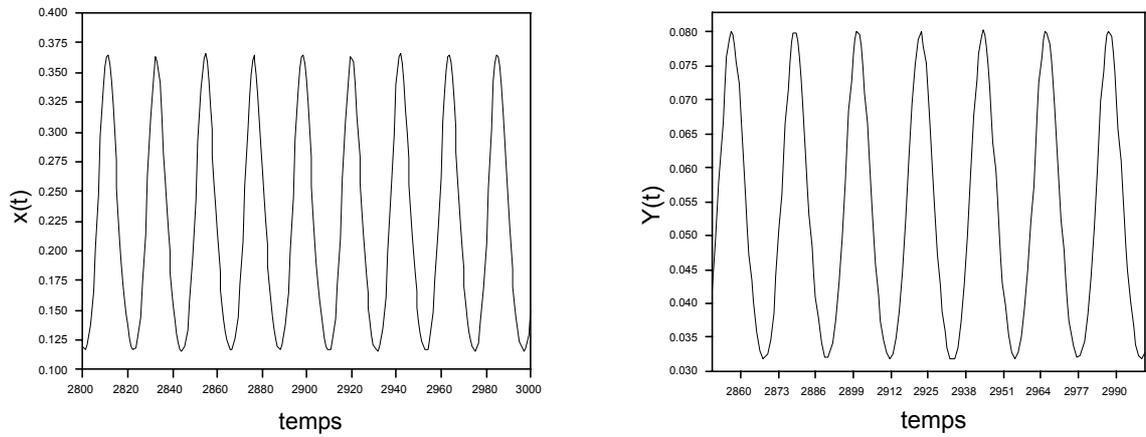
**Figure 3.2-d:** Surfaces de bifurcation:  
Les frontières MM et BA.



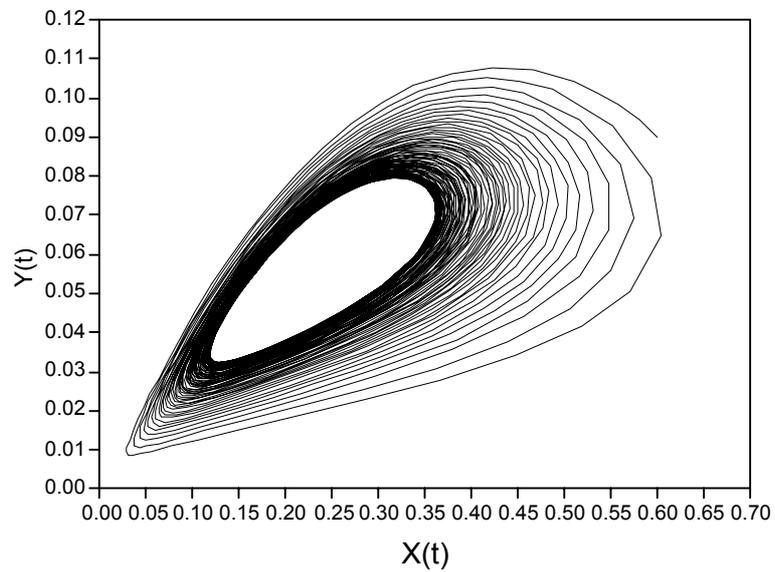
**Figure 3.2-e:** Ligné d'intersection  $\alpha$  des surfaces de bifurcation BO, L, NN, et H  $\alpha: \mu=\gamma+1, v=\gamma+1$ .



**Figure 3.2-f:** Diagramme de bifurcation pour un  $\gamma$  arbitrairement fixé.



**Figure 3.2-g-:** Variation des solutions  $x(t)$  et  $y(t)$  du système non linéaire (2.25).  
 (Bifurcation Hopf, solutions périodiques-). H:  $(\gamma, \mu, \nu)=(2, 2.5, 35/9)$ .  
 Les conditions initiales sont  $(0.6, 0.09)$ .



**Figure 3.2-h-:** Plan de phase associé.

$$(\gamma + 1) \ln \left( \frac{x + y}{x} \right) - y \left( 1 + \frac{\gamma}{x} \right) = C$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

Toutes les surfaces de frontières correspondent aux bifurcations de la Co-dimension 1. Les lignes de l'intersection ou de contact entre les surfaces de frontières correspondent aux bifurcations de la Co-dimension 2.

La figure (3.2.f) représente le portrait de paramètres du système (2.25) pour une certaine valeur de paramètre typique  $\gamma$  arbitrairement fixé.

La preuve du théorème est fournie par l'analytique et souvent par des méthodes numériques de la théorie de bifurcation. (Par exemple, Arnold, 1983; Khibnik et autres, 1993; Kuznetsov, 1995; Levitin, 1989). Le tableau contient des exemples des valeurs de paramètres  $(\mu, v)$  pour une valeur fixe de  $\gamma$  (1.5), correspondant aux huit domaines de l'espace de paramètres présenté par la figure (3.2.e).

domaine	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu$	3	3	2	2	2.1	2.2	1	1
$v$	2	1	1	2.7	2.92	2.92	2.7	1

### 3.3 Points d'équilibre du modèle

Pour déterminer les points d'équilibre, il suffit d'annuler les équations dynamiques:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1-x) - v \frac{xy}{x+y} = 0 \\ -\gamma y + \mu \frac{xy}{x+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \left( 1 - x - v \frac{y}{x+y} \right) = 0 \\ y \left( -\gamma + \mu \frac{x}{x+y} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } 1 - x - v \frac{y}{x+y} = 0 \\ y = 0 \text{ ou } -\gamma + \mu \frac{x}{x+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = \frac{x(1-x)}{x+v-1} \\ y = 0 \text{ ou } x = \frac{\gamma y}{\mu - \gamma} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\gamma}{(\mu - \gamma)} \frac{x(1-x)}{(x+v-1)} \Leftrightarrow (\mu - \gamma)(x+v-1) = (1-x)\gamma \text{ avec } x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\gamma - (\mu - \gamma)(v-1)}{\mu} \Leftrightarrow x = x^* = 1 - \frac{v(\mu - \gamma)}{\mu}$$

$$y = \frac{\mu - \gamma}{\gamma} x^* \Leftrightarrow y = \frac{\mu - \gamma}{\gamma} \left( 1 - \frac{v(\mu - \gamma)}{\mu} \right) \Leftrightarrow y = y^* = \frac{(\mu - v)(\mu - v(\mu - \gamma))}{\mu\gamma}$$

Alors, on peut déduire que:

$$\begin{cases} \text{si } x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (F n'est pas définie)} \\ \text{si } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (F n'est pas définie)} \\ \text{ou} \\ x = 1 \text{ A}(1, 0) \text{ est un point d'équilibre} \end{cases} \\ \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow \text{B}(x^*, y^*) \text{ est un point d'équilibre} \end{cases}$$

### Théorème

On considère une fonction  $F(x, y)$  définie dans un domaine  $\Omega$ , et non définie au point  $N(\alpha_1, \alpha_2)$ .

Si  $\lim_{(x, y) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(x, y) = l$  existe, on dit que  $F(x, y)$  admet un prolongement par continuité en  $N$ .

Soit la fonction  $G(x, y)$  telle que:  $G(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)} F(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (\alpha_1, \alpha_2) \\ l & \text{si } (x, y) = (\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$

Pour notre exemple, nous avons  $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_1(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x(1-x) - v \frac{xy}{x+y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} -\frac{vxy}{x+y} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x+y}. \text{ Or, } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

On pose  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ . Où  $r \rightarrow 0$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$  Alors:

$$\left| \frac{xy}{x+y} \right| = \left| \frac{r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r (\cos(\theta) + \sin(\theta))} \right| = |r| \left| \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right| \leq |r| \left| \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right|$$

$$|r| \rightarrow 0 \text{ et } \left| \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right| \in R \implies |r| \left| \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right| \rightarrow 0. \text{ Donc, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = 0$$

De même, nous prouvons aussi que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0$ .

Par conséquent, le système (2.25) possède les points d'équilibre:  $O(x=0, y=0)$ ,  $A(x=1, y=0)$  et  $B(x=x^*, y=y^*)$ .

À partir des expressions de  $x^*$  et  $y^*$ , nous obtenons les conditions de paramètres pour en lesquels le point  $B$  est à l'intérieur du premier quadrant: 
$$\begin{cases} \mu > \gamma \\ v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$$

Les égalités  $\mu = \gamma$ ,  $v = \frac{\mu}{\mu - \gamma}$  définissent respectivement les frontières  $BA$  et  $BO$  qui correspondent à la disparition du point  $B$  de notre plan. Dans le premier cas,  $B$  passe dans la région des domaines 7 ou 8 par le fusionnement avec le point  $A$ , tandis que dans le deuxième cas, il fusionne avec le point  $O$  et disparaît. La dernière bifurcation a une dégénérescence supplémentaire dans le cas où  $v = \mu = \gamma + 1$ .

## 3.4 Le point d'équilibre compliqué (O)

La particularité mathématique importante du système (2.25), est que l'origine est un point d'équilibre compliqué non analytique. Les structures au voisinage de l'origine dans le premier quadrant et les trajectoires qui tendent à cet équilibre lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$  dépendent des valeurs de paramètres et peuvent changer d'une manière essentielle avec un changement de ces paramètres.

### 3.4.1 Lemme 1

Pour différentes valeurs positives des paramètres  $\gamma, \mu$  et  $v$ , existent quatre types de différentes structures au voisinage du point  $O$ .

1- Un secteur dont l'origine est un point selle (figure (3.4.a)) lié par les droites séparatrices  $x = 0$  et  $y = 0$  pour les valeurs de paramètres:

$$\begin{cases} 0 < v < \gamma + 1 \\ 0 < \mu \leq \gamma + 1 \end{cases}$$

2- Un secteur dont l'origine est un point selle ayant le séparateur  $y = 0$ , (figure (3.4.b)), et un autre où l'origine est un noeud attractif contenant les trajectoires qui tendent à  $O$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (figure (3.4.d)) pour les valeurs de paramètres:

$$\begin{cases} 0 < \mu < \gamma + 1 \\ \gamma + 1 < v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$$

3- Un secteur dont l'origine est toujours un point selle mais ayant le séparateur  $x = 0$ , (figure (3.4.c)), et un autre où  $O$  est un noeud répulsif contenant les trajectoires qui proviennent de  $O$ , c'est à dire, qui tendent à  $O$  lorsque le  $t \rightarrow -\infty$ . (Figure (3.4.e)). Les valeurs de paramètres correspondant sont:

$$\begin{cases} \mu < \gamma + 1 \\ 0 < v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$$

4- Un secteur elliptique composé d'une trajectoire qui tendent à  $O$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$  (figure (3.4.f)) pour des valeurs de paramètres qui réalisent:

$$v \geq \frac{\mu}{\mu - \gamma}$$

Cette structure correspond à un éclatement des deux populations. Les comportements asymptotiques des trajectoires caractéristiques (ayant des courbes définies pour  $(x, y) \rightarrow$

$(0, 0)$ ) dans le cas non dégénéré

$$(\mu - \gamma - 1)(\gamma + 1 - \nu) \left( \nu - \frac{\mu}{\mu - \gamma} \right) \neq 0$$

sont décrits par Lemme 2. Notez que ces courbes peuvent être curviligne, ils ne sont pas nécessairement droits (lignes).

### 3.4.2 Lemme 2

Si  $\mu \neq \gamma + 1$ ,  $\nu \neq \gamma + 1$ , alors chaque trajectoire caractéristique du point O a une courbe qui appartient à un des trois types suivants. (Les formes des deux premières types dépendent d'une constante positive arbitraire C et une perturbation non linéaire  $o(1)$ ).

**Type 1:**

$$y = Cx^{\frac{\gamma}{\nu - 1}}(1 + o(1)) \quad (1)$$

Ce type existe si  $\nu > \gamma + 1$ , les trajectoires tendent au point O lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (figures (3.4.d) et (3.4.f)).

**Type2:**

$$y = Cx^{\mu - \gamma}(1 + o(1)) \quad (2)$$

Ici  $\mu > \gamma + 1$ , ce domaine couvre tous les trajectoires qui tendent au point O quand  $t \rightarrow -\infty$  (figures (3.4.e) et (3.4.f)).

Le système (2.25) a plusieurs trajectoires asymptotiques de troisième type.

**Type 3:**

$$y = kx(1 + o(1)) \text{ avec } k = \frac{\mu - \gamma - 1}{\gamma + 1 - \nu} > 0 \quad (3)$$

-Les séparateurs des trajectoires données par les figures (3.4.d) et (3.4.e) possèdent cette forme pour le domaine de  $v$  suivant:

$$\gamma + 1 < v < \frac{\mu}{\mu - \gamma}$$

Le secteur elliptique est obtenu pour:

$$v > \frac{\mu}{\mu - \gamma}, \quad \gamma + 1 > \mu > \gamma.$$

$$\frac{\mu}{\mu - \gamma} < v < \gamma + 1, \quad \mu < \gamma + 1$$

**Remarque:**

Sur la ligne de l'espace de paramètre  $\alpha : v = \gamma + 1 = \mu$ , le point O est un équilibre dont l'allure est un secteur elliptique dans son voisinage positif. Il est identifié par l'expression suivante:

$$y = Cx(1 + o(1)) \quad (4)$$

### 3.5 Les points d'équilibre A et B.

Le jacobien  $J = (a_{ij})$ , ( $i, j = 1, 2$ ) du système (2.25) a les éléments suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = P_x = ((1 - x) - \frac{v y}{x + y} + \left(-x + \frac{v x y}{(x + y)^2}\right) \\ a_{12} = P_y = -\frac{v x^2}{(x + y)^2} \\ a_{21} = Q_x = \frac{\mu y^2}{(x + y)^2} \\ a_{22} = Q_y = -\gamma + \frac{\mu x}{(x + y)} - \frac{\mu x y}{(x + y)^2} \end{array} \right.$$

Calculant le déterminant et la trace du jacobien aux points d'équilibre A et B, nous obtenons les résultats suivants:

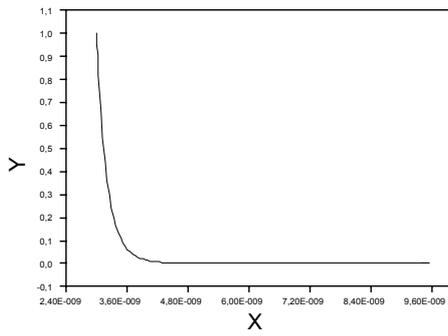


Figure 3.4 -a-

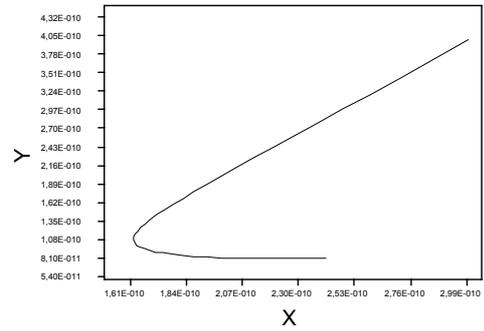


Figure 3.4 -b-

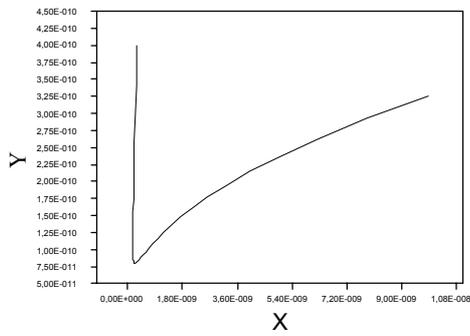


Figure 3.4 -c-

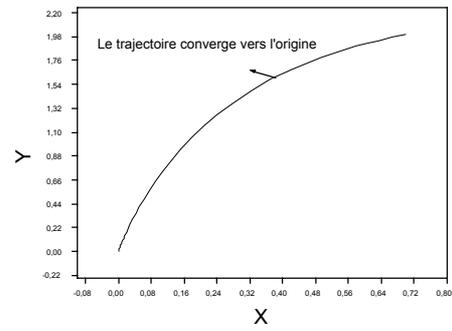


Figure 3.4 -d-

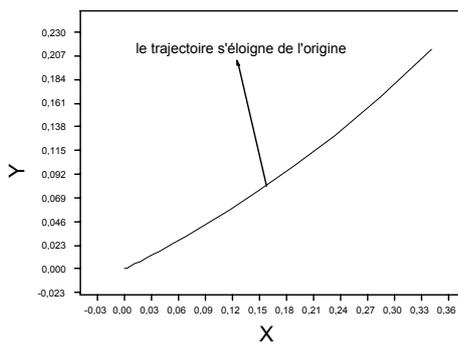


Figure 3.4 -e-

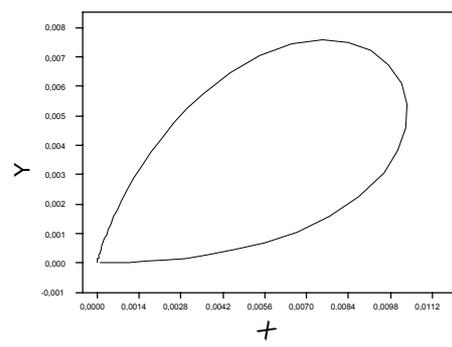


Figure 3.4 -f-

### 3.5.1 Au point A

$$\begin{cases} \det(J) = -\mu - \gamma \\ \text{tr}(J) = -1 + \mu - \gamma \end{cases}$$

#### Proposition

Le point A est un point selle si  $\mu > \gamma$  et un noeud stable si  $0 < \mu < \gamma$ . La plupart des trajectoires prennent la forme suivante:

$$y = k(x - 1)(1 + \sigma(1)), \text{ où } k = \frac{\gamma - 1 - \mu}{v} \quad (5)$$

### 3.5.2 Au point B

$$\begin{cases} \det(J) = \frac{\mu v (x^*)^2 y^*}{(x^* + y^*)^2} \\ \text{tr}(J) = -x^* + \frac{(v - \mu)(\mu - \gamma)\gamma}{\mu^2} \end{cases}$$

#### Proposition 1

Si  $\det(J) > 0 \Rightarrow B$  se trouve dans le premier quadrant du plan  $(xoy)$ . ( $x^* > 0$ ,  $y^* > 0$ ).

Par conséquent B est un noeud topologique ou un foyer.

$\text{tr}(J) < 0 \Rightarrow$  le point B est stable et si:

$\text{tr}(J) > 0 \Rightarrow$  le point B est instable.

L'intersection de la frontière paramétrique H avec celle de BO correspond en général, à la bifurcation d'Andronov Hopf à laquelle le point d'équilibre change sa stabilité avec apparition ou disparition d'un cycle de limite.

#### Proposition 2

Une bifurcation supercritique d'Andronov Hopf de la Co-dimension 1 se produit dans le système (2.25) sur la frontière H. Il découle de cette proposition que ce croisement H de

gauche à droite implique une perte de la stabilité du point d'équilibre B.

## 3.6 Evolutions du système sur les cycles de limite du modèle

Il est évident que le cycle qui apparaît à la frontière H (Bifurcation d'Andronov Hopf) se développe lorsque le paramètre  $\mu$  augmente.

Pour quelques valeurs de paramètres, le cycle se transforme en contour hétéro clinique et disparaît. Ceci signifie qu'une bifurcation hétéro clinique non locale se produit dans le système (2.25). Ce contour est constitué par le séparateur du point selle A (5), par le séparateur du point compliqué O (3), ainsi que les points d'équilibre A et O et leurs séparateur commun.

Le cycle de limite qui apparaît à la bifurcation locale d'Andronov Hopf disparaît à la bifurcation hétéro clinique non locale. Notez que l'amplitude et la période du cycle se développent avec un changement de paramètres, de telle manière que la période tend à l'infini lorsque le cycle tend au contour séparateur.

Les valeurs de paramètres pour lesquelles le contour hétéro clinique existe, définissent la courbe de bifurcation L dans le plan  $(\mu, v)$  qui est intersecté par la ligne BO au point  $\alpha : v = \gamma + 1 = \mu$  (Voir les figures (3.2.e) (3.2.e)).

### 3.6.1 Proposition 1

Laisser  $v > \gamma + 1$ . Changeant le paramètre  $\mu$ . Un cycle de limite stable apparaît pour des valeurs de paramètres  $(\gamma^*, v^*, \mu_H)$  correspondant à H, et disparaît pour des valeurs  $(\gamma^*, v^*, \mu_L)$  correspondant à L.  $\mu_L > \mu_H$ .

Il faut mentionner aussi que le contour hétéro clinique existe pour quelques valeurs de paramètres appartenant au domaine lié par la ligne NN et la partie supérieure du BA (domaine 7).

### 3.6.2 Proposition 2

Le contour hétéro clinique sera stable, et constitué par les points d'équilibre O et A et leurs séparateur commun si: 
$$\begin{cases} \gamma < \mu < \gamma + 1 \\ \gamma + 1 < v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$$

## 3.7 Interprétation des portraits de phase

Donnons une interprétation écologique des divers comportements du système ratio dépendant de proies prédateurs, en réponse aux changements de paramètres écologiques suivants: La capacité de consommation de proies  $v$ , la capacité croissante prédatrice  $\mu$  et le taux de mortalité prédateur  $\gamma$ . Nous employons essentiellement le diagramme de bifurcation donné par la Figure (3.2.f). Il montre huit types de systèmes dynamiques selon les valeurs de  $v$  et  $\mu$  pour une valeur fixe de  $\gamma$ .

Le paradigme fondamental de l'écologie théorique est que tout les systèmes proies prédateurs peuvent exister seulement avec des valeurs de paramètres fournissant des oscillations stables (portrait 5) ou des régimes stables comme les états d'équilibre présentés dans les portraits (2, 3 et 4). Les changements des valeurs de paramètres provoqués par les changements des conditions d'environnement ou d'autres raisons, peuvent mener le système dans des domaines paramétriques où une ou les deux populations vont à l'extinction dans différentes manières. Notre analyse laisse décrire les domaines paramétriques de la coexistence stable et prévoir ce qui peut se produire si le système sort de ces domaines. Là, existent trois intervalles principaux de la capacité croissante prédatrice  $\mu$  :  $0 < \mu < \gamma$ ,  $\gamma < \mu < \gamma + 1$  et  $\mu > \gamma + 1$  qui correspondent aux différents comportements du système.

### 3.7.1 Petites capacités croissantes prédatrices : $0 < \mu < \gamma$

Dans ce cas, le système appartient aux domaines 7 ou 8. Les plans des phases respectifs donnés montrent l'extinction des prédateurs de la population  $y$  dans les deux domaines, puisque les points d'équilibre  $O(x = 0, y = 0)$  et  $A(x = 1, y = 0)$  sont les seules

états d'équilibre. Les prédateurs ne peuvent pas se reproduire assez rapidement pour compenser leurs taux de mortalité  $\gamma$ .  $\mu < \gamma$ . De tels prédateurs sont inadaptés à la proie. Notez une différence essentielle entre les domaines 7 et 8. Dans le domaine 8 ( $v < \gamma + 1$ ), les capacités de consommation de proies  $v$  sont petites, et en conséquence la population de proie survit (figure (3.7.1 -a-)). Dans le domaine 7 ( $v > \gamma + 1$ ), les capacités de consommation de proies  $v$  sont assez hautes, peuvent conduire tous les deux populations à l'extinction (les figures (3.7.1 -b-) et (3.7.1 -c-)). Ceci se produit seulement dans une région donnée des états initiaux.

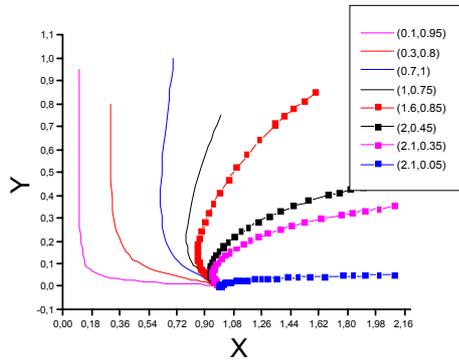
### 3.7.2 Les capacités croissantes prédatrices intermédiaires: $\gamma < \mu < \gamma + 1$

Celles-ci correspondent aux domaines 3, 4, 5, et 6. Si les capacités de consommation de proies ne sont pas très grandes (domaine 3:  $0 < v < \gamma + 1$ ), les deux populations (proies et prédateurs) coexistent à l'état d'équilibre régulier (la figure (3.7.2 -a-)):

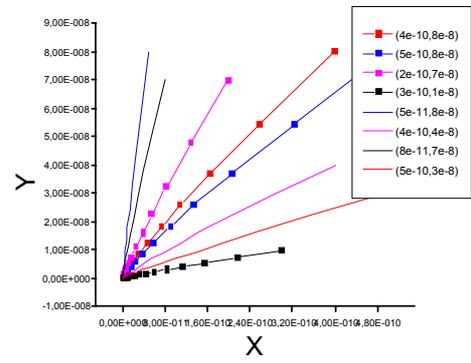
$$B \left( x^* = 1 - \frac{v(\mu - \gamma)}{\mu}, y^* = \frac{(\mu - \gamma)(\mu - v(\mu - \gamma))}{\mu\gamma} \right)$$

Ici, les capacités de consommation de proies  $v$  et les capacités croissantes prédatrices  $\mu$  sont produites de la dynamique équilibrée des deux populations. Notez qu'un tel comportement a été également décrit par plusieurs modèles de proies prédateurs incorporant la forme logistique familière de proie. Le taux de croissance et les fonctions trophiques proies dépendants coïncident avec les fonctions de Lotka Volterra ou de Holling (exemple, Bazykin, 1998).

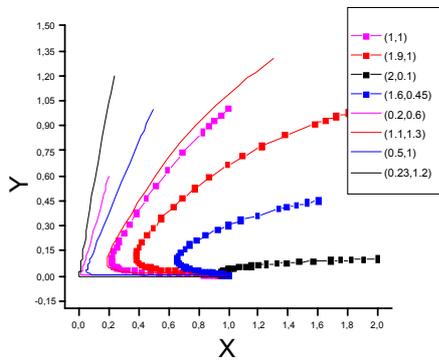
Les particularités de notre modèle sont indiquées plus clair si les prédateurs sont plus en activité (domaines 4, 5 et 6:  $v > \gamma + 1$ ). Dans le domaine 4 les populations atteignent la coexistence ou la co-extinction selon leurs conditions initiales (les figures (3.7.2-b-) et (3.7.2-c-)). En effet, se manifeste aussi dans le domaine 5 sous une croissance d'un paramètre toujours suivant les populations initiales (les figures de (3.7.2-d-))



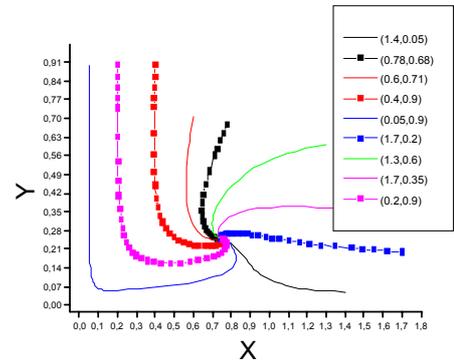
**Figure 3.7.1-a-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 8).



**Figure 3.7.1-b-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 7).



**Figure 3.7.1-c-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 7).



**Figure 3.7.2-a-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 3).

jusqu'à (3.7.2-h-))

Nous avons montré (lemme 2) que les trajectoires d'extinction forment une famille des courbes de type(1). En général, le séparateur du point compliqué O possède l'allure de type (3). Ces particularités de la dynamique de notre système concernent les domaines 4 et 5.

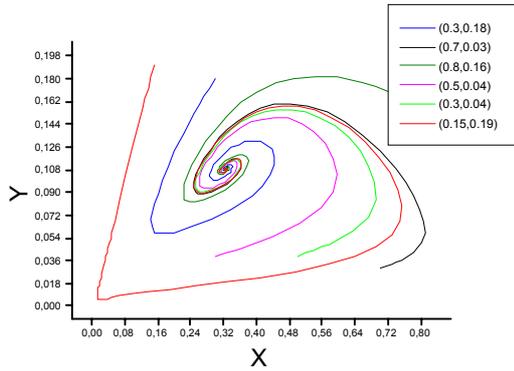
Pour des valeurs fixes  $\mu < \gamma + 1$ , l'exposant des courbes (1) diminue quand  $v$  augmente. Ceci signifie que les prédateurs vont plus rapide (éteint) que la proie. La tangente  $k$  du séparateur (3) diminue lorsque  $v$  et  $\mu$  diminuent. Le secteur disparaît lorsque les paramètres  $(\mu, v)$  appartiennent au domaine 6. (Figure (3.7.2-i-)).

Ainsi, nous allons voir que le modèle ratio dépendant (2.25) démontre dans les domaines 4, 5, et 6 de l'espace de paramètres un comportement unique qui le distingue des modèles proies dépendants standards de proies prédateurs. Dans ces domaines, l'origine O possède son propre bassin d'attraction. L'existence d'une telle région de la co- extinction a été prévue par Arditi et Ginzburg (1989) avec la méthode d'isocline, ses bases écologiques ont été discutés par Akçakaya et autres (1995) et lui ont été également prouvés par Jost et autres (1999).

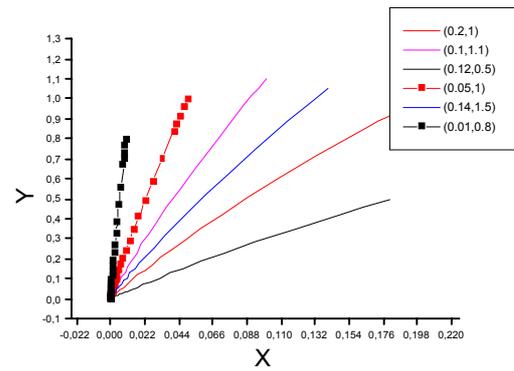
### 3.7.3 Capacités croissantes prédatrices élevées: $\mu > \gamma + 1$

Deux situations différentes sont possibles ici, domaines 1 et 2. Le domaine 1 correspond à la condition  $v > \frac{\mu}{\mu - \gamma}$ , et les deux populations vont à l'extinction de toute condition initiale (les figures (3.7.3-a-) et (3.7.3-b-)). Dans ce cadre, une interprétation peut se faire en raison de la haute capacité de consommation de proies et les capacités croissantes prédatrices élevées (comparées au taux de mortalité de prédateurs  $\gamma$ ), augmentation prédatrice qui est tellement rapide que toute les proies. De tels prédateurs sont excessivement efficaces. Il est intéressant que dans cette condition existent deux types différents d'extinction des populations.

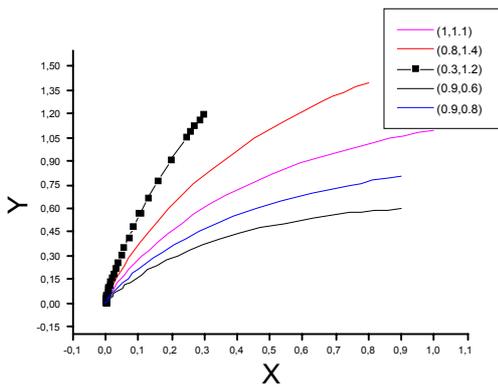
Le premier correspond à un secteur elliptique (figure (3.7.3-b-)) qui tend à l'origine O lorsque  $(t \rightarrow \pm\infty)$ . Ceci est réalisé pour des petites valeurs initiales arbitraires. Les



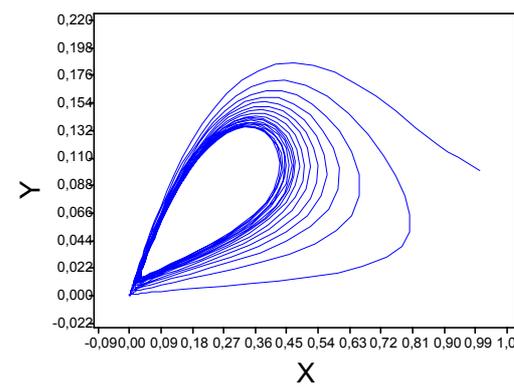
**Figure 3.7.2-b-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 4).



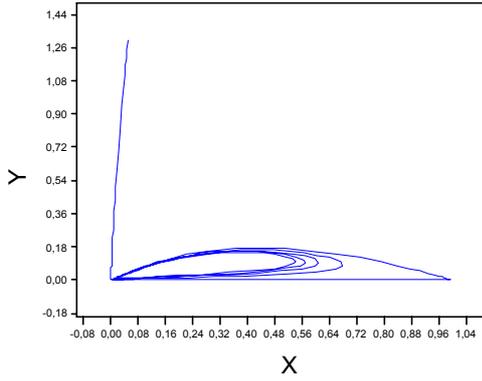
**Figure 3.7.2-c-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 4).



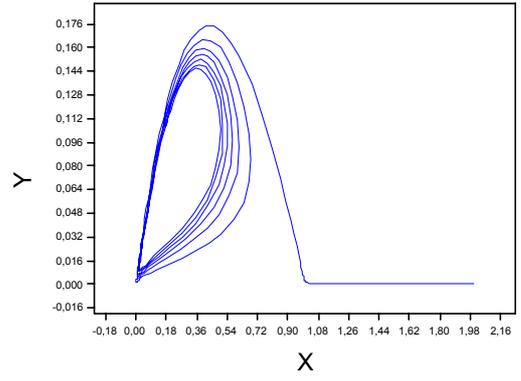
**Figure 3.7.2-d-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 5).



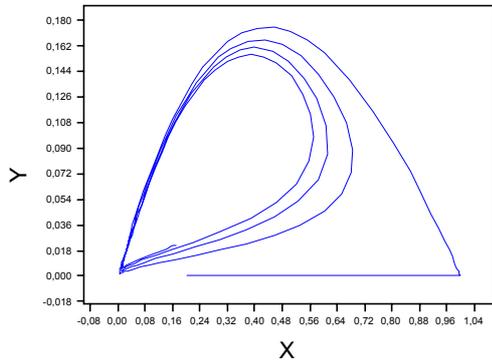
**Figure 3.7.2-e-:** plan de phase correspond aux conditions initiales (1,0,1) pour les valeurs de paramètres  $(\gamma, \mu, \nu)=(1.5, 2.1, 2.92)$ , (Domaine 5).



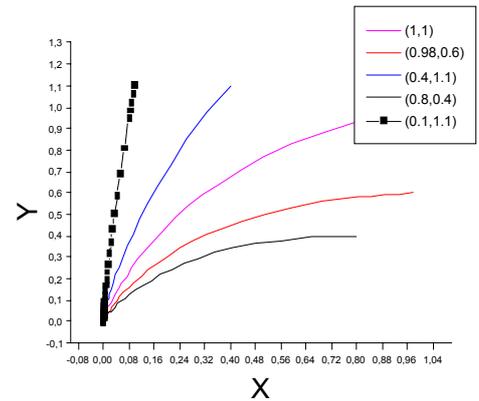
**Figure 3.7.2-f:** plan de phase correspond aux conditions initiales  $(0.05, 1.3)$  pour les valeurs de paramètres  $(\gamma, \mu, \nu) = (1.5, 2.1, 2.92)$ , (Domaine 5).



**Figure 3.7.2-g:** plan de phase correspond aux conditions initiales  $(2, 12e-5)$  pour les valeurs de paramètres  $(\gamma, \mu, \nu) = (1.5, 2.1, 2.92)$  (Domaine 5).



**Figure 3.7.2-h:** plan de phase correspond aux conditions initiales  $(2, 3e-10)$  pour les valeurs de paramètres  $(\gamma, \mu, \nu) = (1.5, 2.1, 2.92)$ , (Domaine 5)



**Figure 3.7.2-i:** Plan de phase du système non linéaire (2.25) pour différentes conditions initiales. (domaine 6).

deux populations commencent à se développer pendant un certain temps, et après une certaine période, commencent à diminuer et devenir simultanément éteintes.

L'autre type associé correspond les trajectoires présentées par la figure (3.7.3-a-):

$$y = k(x - 1)(1 + o(1)) \text{ où } k = \frac{\gamma - 1 - \mu}{v}$$

Pour ces dernières, le nombre de proies diminue monotoniquement quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Il est maintenant possible de répondre à un des premiers arguments qui a été élaboré dans les modèles proies prédateurs. Dans certaines conditions, le modèle peut prévoir que les deux variables obtiennent l'extinction (Freedman et Mathsen, 1993) qui était considéré comme " pathologique " dans un sens mathématique. En termes biologiques, le terme "pathologique" désigne que la dynamique signifie que les deux populations augmentent au commencement, alors des prédateurs consomment toutes les proies, ce qui amène les deux populations à l'extinction. C'est tout à fait des résultats raisonnables pour les biologistes, comme il était démontré par les expériences de Gause (voir les Akçakaya et autres 1995). Il est facile de voir que celle ci (la dynamique) correspond exactement à la trajectoire elliptique. Notre recherche analytique a montré que le secteur elliptique est réalisé dans le modèle avec tout les valeurs de paramètres appartenant au domaine 1. Les équations de ces trajectoires sont données par les formules (1, 2 et 3). Des changements de la trajectoire elliptique sont provoqués par des changements de paramètres du modèle. Considérons maintenant le domaine 2, caractérisé par  $v < \frac{\mu}{\mu - \gamma}$ . Ici, la proie et les prédateurs coexistent dans un état d'équilibre pour tous nombres initiaux (figure (3.7.3 -c-)). Ainsi, le seuil  $v = \frac{\mu}{\mu - \gamma}$  a une importance critique pour la coexistence des populations.

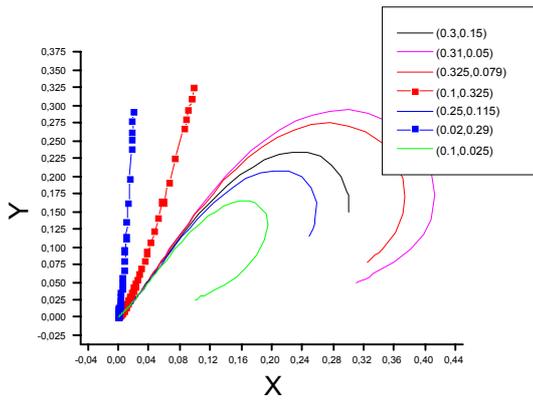
Comparons maintenant les caractéristiques de différents comportements de notre système dans le domaine 2 à ceux dans le domaine voisin 3. Dans le deuxième domaine, le plan de phase admet un voisinage positif de l'origine, consiste deux secteurs: un secteur de point selle et un secteur de noeud instable. Ces trajectoires incitent les deux populations

à tendent vers l'équilibre  $B \left( x^* = 1 - v + \frac{\gamma v}{\mu}, y^* = \frac{(\mu - \gamma)x^*}{\gamma} \right)$

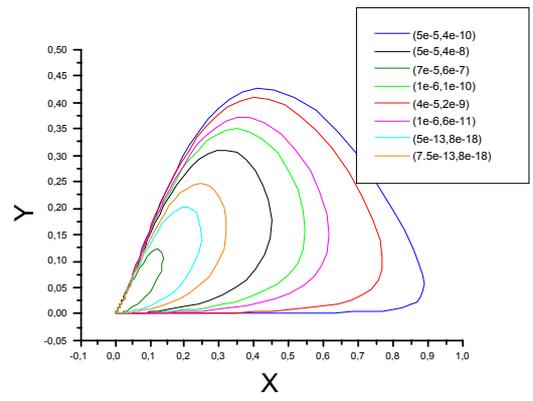
Notez que ce résultat est vérifié pour  $v \leq 1$ , l'état d'équilibre B existe pour n'importe quel  $\mu > \gamma$ . Pour des capacités de consommation de proies fixes  $v$ , l'augmentation de la capacité croissante mène à une diminution de  $x^*$  en même temps qu'une augmentation de  $y^*$ .

Avec des changements de paramètres, le point  $(\mu, v)$  peut se déplacer du domaine 2 au domaine 3 ou au domaine 1. Dans le premier cas, croiser la frontière MM ne change pas les caractéristiques qualitatives cruciales du comportement de système, tandis que dans le deuxième cas, croiser la frontière BO a comme conséquence l'extinction des deux populations.

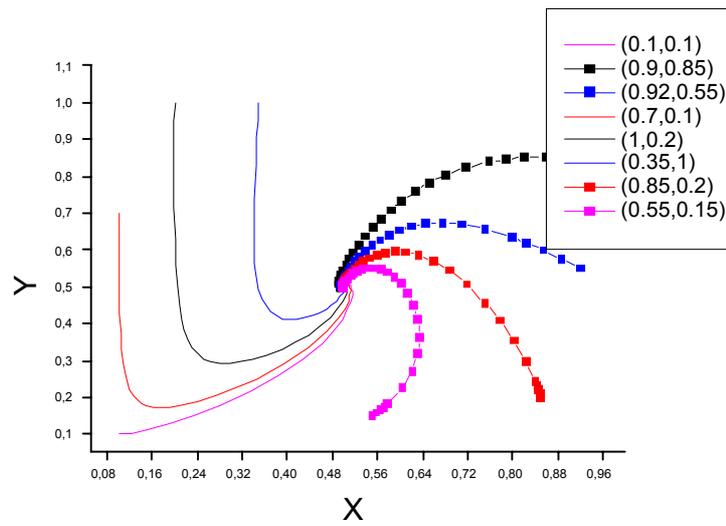
En conclusion, il est approprié de discuter plus la particularité du modèle. Habituellement, dans les modèles proies prédateurs, on assume que si les capacités croissantes prédatrices des modèles  $\mu$  sont moins que les capacités de consommation de proies  $v$ . Ceci suit de la supposition que la proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$ . Remarquez que ces types de comportement de système (excepté le domaine 2) sont réalisés pour le paramètre  $\mu \leq v$ . Cependant, le domaine des paramètres  $\mu \geq v$  est intéressant. Par exemple, c'est le cas de l'alimentation des prédateurs  $y$  sur d'autres ressources, de telle manière que la proie soit un facteur limité. Selon le principe de Liebig qui concerne les facteurs limités, la capacité croissante prédatrice  $\mu$  est proportionnelle par rapport au  $\min\{av, b\rho\}$ , là où  $\rho$  est la capacité de consommation sur d'autres ressources et  $a, b$  sont "des facteurs stoechiométriques" (Poletaev, 1966). Pour de telles valeurs de paramètres avec  $\mu \geq v$  le système doit appartenir aux domaines 2, 3 ou 1.



**Figure 3.7.3-a-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 1).



**Figure 3.7.3-b-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 1).



**Figure 3.7.3-c-:** Plan de phase du système non linéaire pour différentes conditions initiales (domaine 2).

### 3.8 Etats récapitulatifs de la coexistence et de l'extinction

Les deux populations atteignent la coexistence si le système appartient aux domaines 2 et 3. La différence dans la dynamique est indiquée seulement pour des petites valeurs de nombre de prédateurs parce que le système est reconstitué plus rapidement dans le domaine 2 que dans le domaine 3. Nous pouvons considérer que la frontière MM qui divise ces deux domaines est "doux" et nous pouvons mettre les domaines 2 et 3 en commun.

Selon les conditions initiales, les populations de prédateurs et de proies peuvent obtenir l'extinction dans les deux domaines 4 et 5. Cette caractéristique importante de la dynamique de système suggère à mettre ces deux domaines en commun dans une région unique spécifiée par la coexistence conditionnelle des populations. La différence étant dans le domaine 4, les populations coexistent dans un régime régulier tandis que dans le domaine 5 coexistent sur un cycle de limite. La frontière H entre les domaines 4 et 5 est aussi "doux" puisque le comportement du système ne change pas d'une manière essentielle.

Les deux populations deviennent éteintes dans les domaines 6 et 1. La frontière entre ces domaines est représentée par la partie supérieure de la courbe BO. Alors, nous pouvons mettre les domaines 1 et 6 en commun dans un domaine d'extinction sans aucune condition. Après avoir mis ces domaines en commun du point de vue de la coexistence ou l'extinction des populations, nous obtenons le diagramme le plus simple de la figure (3.8). Elle contient seulement cinq domaines de paramètres  $(\gamma, \mu, v)$  correspondant à la dynamique du système.

-Dans le domaine A (l'union des domaines 1 et 6), les deux populations disparaissent pour toutes les valeurs initiales.

-Dans le domaine B (l'union des domaines 2 et 3), les deux populations survient pour toutes les valeurs initiales.

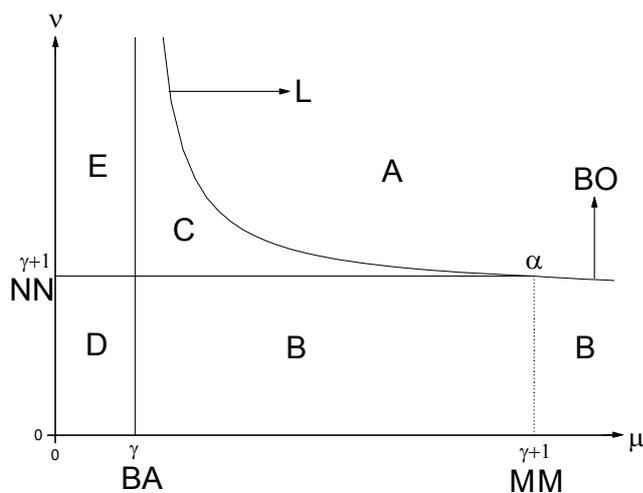
-Dans le domaine C (l'union des domaines 4 et 5), les populations atteignent la coexis-

tence ou l'extinction selon les valeurs initiales.

-Le domaine D est identique au domaine 8 et le domaine E est identique au domaine 7. Dans les deux cas, la population prédatrice devient éteinte de toutes les valeurs initiales. Dans le domaine D, la population de proie survit toujours tandis que dans le domaine E, elle peut devenir éteinte pour quelques valeurs initiales d'une manière analogue aux domaines B et C.

En termes plus biologiques, les domaines D et E correspondent aux prédateurs qui se reproduisent très inefficacement, incapables de survivre même avec l'abondance de la proie. Ceci mène normalement la proie à atteindre sa capacité de charge.

Avec des prédateurs qui se reproduisent plus efficacement, le système entre dans les domaines B et C. (2, 3, 4, et 5). Ces conditions permettent la coexistence dans la région C, les prédateurs sont sous une façon disproportionnée, des consommateurs efficaces peuvent mener la proie à l'extinction si leurs valeurs initiales sont défavorables.



**Figure 3.8:** Diagramme de bifurcation simplifié pour un  $\gamma$  arbitrairement fixé

En conclusion, les prédateurs les très efficaces se trouvent dans les systèmes de domaine A (domaines 1 et 6). Là, les prédateurs conduisent toujours la proie à l'extinction et par

conséquent, deviennent eux-mêmes éteints.

Comme déjà expliqué, tous ces comportements dynamiques ne sont pas observés dans de vraies populations, mais les modèles proie dépendants peuvent les produire. En particulier, le modèle ratio dépendant peut reproduire cette évolution des solutions (extinction ou la coexistence) qui dépend des conditions initiales (par exemple, Huffaker 1958, Luckinbill 1973). Cette dernière se produit aussi dans les domaines C et E.

De la perspective de la commande biologique pour laquelle l'extinction de proie (parasite) est souhaitable, on peut déduire que le domaine A est le plus intéressant. Dans ce cas-ci, les deux populations sont conduites à l'extinction de manière déterministe, des résultats que les modèles proie dépendants ne peuvent pas produire. Elles peuvent être aussi accompagnées par oscillations. C'est tout à fait naturelle, puisque ce comportement est obtenu grâceaux prédateurs pour des valeurs élevées de  $\mu$  et  $\nu$ .

De la perspective de la conservation biologique, pour laquelle la coexistence est souhaitable, les domaines B et C sont ceux qui doivent être maintenus. Les frontières de ces deux secteurs peuvent être considérer "dangereuses" parce qu'une ou les deux populations deviennent éteintes en croisant les paramètres de la frontière. Quand elles sont approchées, on peut observer:

- une augmentation de la période des oscillations en approchant vers la frontière L (dans le domaine C),
- un déclin (une diminution) de l'état d'équilibre de proies en approchant vers la frontière BO (dans le domaine B),
- un déclin de l'état d'équilibre prédateur en approchant vers la frontière BA de (dans les domaines B ou C).

Si on observe ces phénomènes dans les populations biologiques, cette situation peut être interprété par le système qui approche des conditions dangereuses. Supposant que l'espèce dangereux est le prédateur, l'extinction peut se produire pour deux raisons:

\*Si la capacité croissante  $\mu$  diminue pour quelques raisons (par exemple, en raison de la fragmentation d'habitant menant aux déperditions d'énergie), le système peut passer par

la frontière BA et entre dans les régions D ou E.

\*Réciproquement, si le prédateur devient très efficace à la nourriture de serrage (par exemple, parce que la proie devient vulnérable) ou si ses capacités croissantes augmentent (par exemple, en raison de la température accrue), le système peuvent décrire la situation de la commande biologique.[1] [2] [3] [4] [5] [6]

## Chapitre IV

Mise en oeuvre numérique.

Applications de la dérivée optimale au  
système proposé par Arditri et Ginzburg.

# Chapitre 4

Mise en oeuvre numérique.

## Applications de la dérivée optimale au système proposé par Arditri et Ginzburg

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'aspect numérique. Dans un premier lieu, on donne une modélisation analytique (approchée) par la méthode de dérivation optimale. Puis, on se propose d'étudier la stabilité à l'origine pour différentes valeurs de paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $\nu$ .

Pour ce faire, il faut d'abord réaliser toutes les solutions possibles données par Arditri et Ginzburg au voisinage de l'équilibre  $O(x = 0, y = 0)$  de ce type d'équations dynamiques qui décrivent l'interaction proie prédateur. On a présenté également:

- Une étude comparative entre les comportements des solutions du système ratio dépendant et ceux obtenus par la procédure de dérivation optimale.
- Des différentes configurations des lignes intégrales au voisinage de l'origine d'un champ de vecteur plan.

En effet, les méthodes de linéarisation jouent un rôle très important dans l'étude des équations différentielles ordinaires non linéaires, dont on peut dire que tout système linéaire n'est que le modèle simplifié de notre système non linéaire exact que l'on veut prendre comme repère. C'est pourquoi, il est souvent indispensable d'évaluer l'erreur quadratique afin de juger la qualité de l'approximation et voir si les incertitudes ne peuvent qu'oblitérer la qualité du modèle.

Le calcul de l'erreur quadratique se fait en utilisant la relation suivante:

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \left\| x_i(t) - \tilde{y}_i(t) \right\|^2$$

où

$x(t)$  représente la solution du système non linéaire.

$\tilde{y}_i(t)$  représente la solution du système linéaire.

Avant d'entamer les exemples et les commentaires, je tiens à rappeler une deuxième fois que, dans les modèles proie prédateurs, la proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$  si les capacités croissantes prédatrices  $\mu$  sont inférieures ou égales aux capacités de consommation de proies  $v$ . ( $\mu \leq v$ ). Sauf si les valeurs de paramètres appartiennent au

domaine 2:  $\begin{cases} \mu > \gamma + 1 \\ v < \frac{\mu}{\mu - \gamma} \end{cases}$

## 4.2 Cas où l'équilibre est un col (point selle)

Dans ce cas, les trajectoires seront liées par la droite séparatrice  $x = 0$ ,  $y = 0$  ou les deux en même temps.

### 4.2.1 Exemple 1: $(\gamma, \mu, v) = (3, 4, 0.8)$

Les valeurs de paramètres appartiennent au surface de bifurcation MM.

Le système s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 0.8\frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -3y + 4\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.1)$$

La procédure de calcul de la dérivation optimale pour des conditions initiales  $(x_0, y_0) = (3e - 9, 1)$  donne:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.2001 & 0 \\ 3.9995 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Dont les valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = 0.2001$$

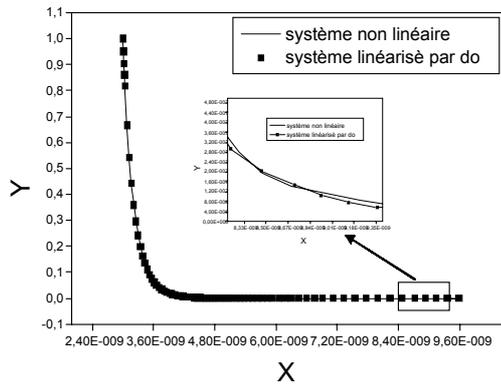
$$\lambda_2 = -3$$

La matrice optimale présente des valeurs propres de signe différente  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , ce qui implique que le système linéarisé par la dérivée optimale est instable et fait apparaître l'origine comme un point selle. Alors, il est lui même instable.

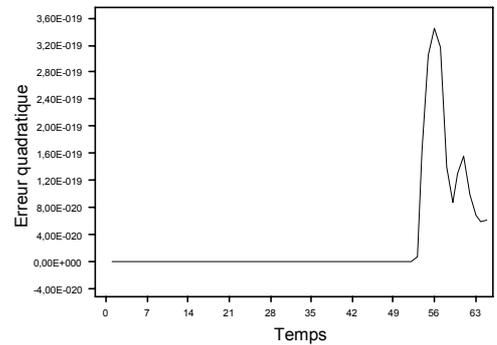
Les figures (4-1-c) et (4-1-d) représentent respectivement les champs de vecteurs du système non linéaire ratio dépendant et celui de système linéarisé par la dérivée optimale. Tandis que, les figures (4-1-a) et (4-1-b) présentent respectivement les portraits de phase du système linéaire (4-2) obtenu comparé à celui de système non linéaire (4-1), et l'évolution de l'erreur quadratique associé à l'approximation en fonction du temps.

## 4.2.2 Commentaires

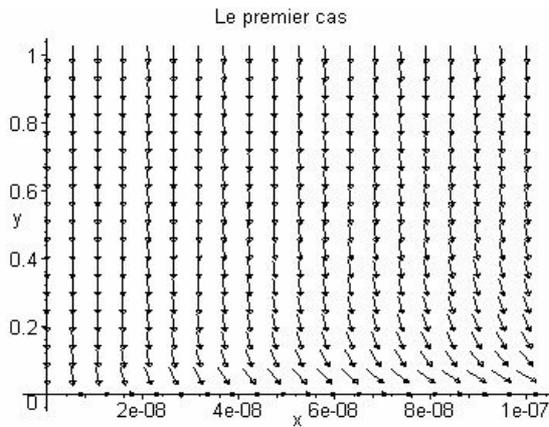
Les valeurs de paramètres appartiennent au surface de bifurcation MM. Alors, nous attendons que les deux populations de proies  $x$  et de prédateurs  $y$  coexistent pour toute condition initiale, puisque la surface de bifurcation MM divise les domaines 2 et 3 spécifiés par la coexistence de proies  $x$  et de prédateurs  $y$ . Dans ces conditions, on est sûr de dire que:



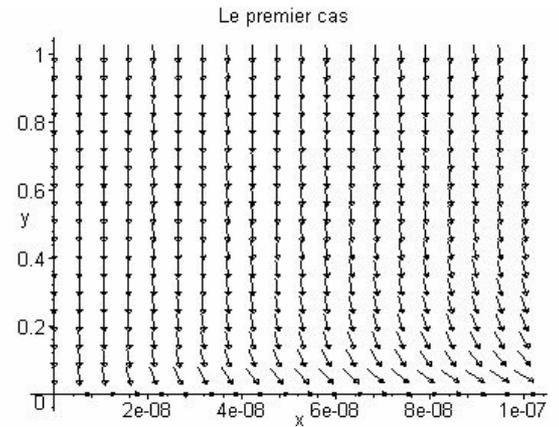
**Figure -4.1.a-** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (3e-9, 1)$ . Les valeurs de paramètres associées sont:  $(\gamma, \mu, \nu) = (3, 4, 0.8)$ .



**Figure-4.1.b-** Erreur quadratique dû au système linéaire (4.2) au sens de la D.O.



**Figure -4.1.c-** Champ de vecteurs du système non linéaire (4.1).



**Figure-4.1.d-** Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O de (4.2).

-On ne peut pas assumer que c'est le cas de l'alimentation de prédateurs  $y$  sur d'autres ressources ou non, parce que dans les deux cas, deux situations sont possibles:

\*La quantité de la nourriture est suffisante: ceci suit de la conclusion que les deux populations coexistent. (Contradiction).

\*La quantité de la nourriture est insuffisante: les deux populations atteignent la co-extinction, les prédateurs consomment toute la proie et deviennent eux mêmes éteints. (Contradiction).

-Les deux populations ne sont pas produites de la dynamique équilibrée des deux capacités. Pour ce faire, il faut que: 
$$\begin{cases} v < \gamma + 1 \\ \gamma < \mu < \gamma + 1 \end{cases}$$

-Une exception peut se produire dans le domaine B si les valeurs de paramètres appartiennent au surface de bifurcation MM. Ce résultat coïncide avec le théorème, où on a énoncé que pour des valeurs de  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$  correspondant à l'une des surfaces de bifurcation MM ou NN, on a affaire à un changement de structure topologique au voisinage de l'origine O.

-La population de proies  $x$  survie toujours. Ceci revient aux prédateurs  $y$  qui ne peuvent pas manger toute la proie  $x$  puisqu'on a déjà montré que cette dernière est la seule nourriture de prédateurs  $y$ . C'est pourquoi ils régressent continuellement sans aller vers l'extinction.

Des interprétations peuvent se faire en raison:

\*des prédateurs eux mêmes, qui sont la nourriture préférée de d'autres espèces. Il s'agit dans cette situation d'un troisième niveau trophique efficace qui s'appelle Super prédateur.

\*des prédateurs qui sont infectés par une maladie contagieuse Meurtrière.

\*de la non disponibilité de proies  $x$ . Exemple: difficulté de la chasse, l'immigration de proies...

### 4.2.3 Exemple 2: $(\gamma, \mu, \nu) = (1.5, 2, 2.5)$

Les valeurs de bifurcation appartiennent dans ce cas à l'autre surface de bifurcation NN. Considérant le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 2.5\frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -1.5y + 2\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.3)$$

La matrice optimale donne pour  $\varepsilon = 1e - 6$  et  $(x_0, y_0) = (3e - 10, 4e - 10)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.4312 & -0.6638 \\ 0.4551 & -0.969 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Dont les valeurs propres sont:

$$\lambda_1 = 0.1647$$

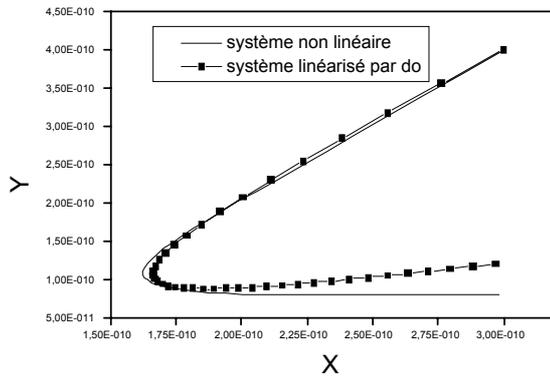
$$\lambda_2 = -0.7025$$

La matrice optimale dans ce cas prévoit un col à l'équilibre puisque les valeurs propres sont réelles de signes opposés. Les figures (4-2-a) et (4-2-b) présentent respectivement les portraits de phase des systèmes (4-3) et (4-4) ainsi que l'évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps.

Les champs de vecteurs non linéaires et linéarisés par la dérivée optimale sont tracés dans les figures (4-2-c) et (4-2-d).

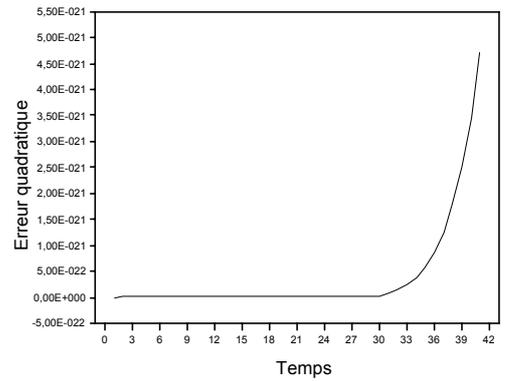
### 4.2.4 Commentaires

Nous avons une capacité de consommation de proies  $\nu$  plus grande que celle croissante prédatrice  $\mu$ . ( $\nu > \mu$ ). Ce qui assure que la proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$ . On remarque que la population de proies  $x$  diminue puis augmente. Cette décroissance est justifiée par le fait que les prédateurs se nourrissent aux dépens de proies  $x$ . On remarque aussi que les prédateurs  $y$  diminuent monotoniquement. Dans ces conditions,

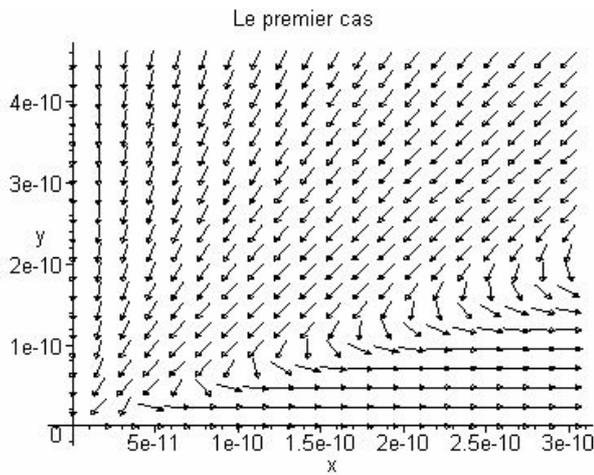


**Figure-4.2.a-** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (3e-10, 4e-10)$ .

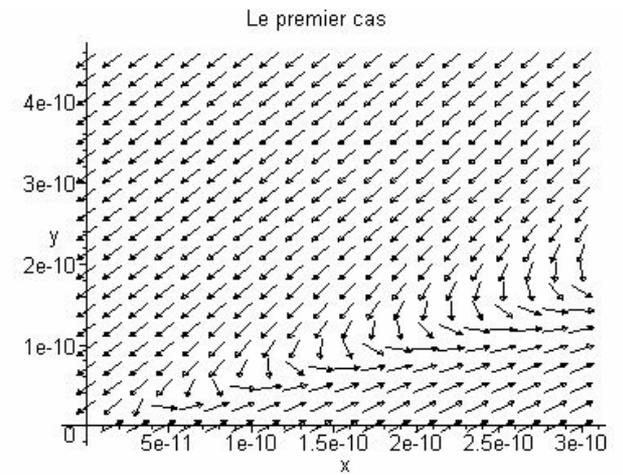
Les valeurs de paramètres associées sont:  $(\gamma, \mu, \nu) = (1.5, 2, 2.5)$



**Figure -4.2.b-** Erreur quadratique dû au système linéaire (4.4) au sens de la D.O.



**Figure-4.2.c-** Champ de vecteurs du système non linéaire (4.3).



**Figure-4.2.d-** Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O de (4.4).

il est tout à fait clair de conclure que la quantité de la nourriture n'est pas suffisante. Mais la question qui se pose: pourquoi la dynamique va changer complètement le comportement le long de la deuxième étape? C'est à dire pourquoi la régression de la population de proies  $x$  ne continue pas? La réponse c'est que par exemple, les prédateurs sont déjà touchés par une maladie contagieuse meurtrière, mais l'effet de cette dernière apparaît à ce moment. Ou bien, ils sont infectés à ce moment d'une telle manière que les symptômes de la maladie apparaissent directement.

Ces raisons ne favorisent pas la nourriture. (Symptôme de la maladie). Même si l'alimentation existe, le nombre de proies consommées sera négligeable par rapport au nombre de proies disponibles à cause de l'extinction de prédateurs  $y$ , et non pas tous les prédateurs. (On obtient pas l'extinction totale de prédateurs  $y$ ).

#### 4.2.5 Exemple 3: $(\gamma, \mu, \nu) = (1.5, 2, 2.6)$

En considérant le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 2.6 \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -1.5y + 2 \frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.5)$$

On obtient pour des conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.6e - 10, 1e - 10)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.3286 & -0.5875 \\ 0.5164 & -1.048 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\lambda_1 = 0.0531$$

$$\lambda_2 = -0.7725$$

La matrice optimale associée prévoit toujours un col à l'équilibre.

La similitude des champs de vecteurs est montrée par les figures (4-3-c) et (4-3-d), alors que l'évolution des systèmes (4-5) et (4-6) et l'erreur quadratique est présentée dans les

figures (4-3-a) et (4-3-b).

## 4.2.6 Commentaires

Le troisième exemple couvre le cas où la trajectoire est liée par la droite séparatrice  $X=0$ .

La capacité de consommation de proies  $\nu$  est supérieure que celle croissante prédatrice  $\mu$ . ( $\nu > \mu$ ). Ce qui implique que la proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$ . Les particularités de notre modèle ici sont indiquées d'une façon plus claire. (Domaine 4). C'est à dire on peut obtenir en plus de l'extinction des deux populations, la coexistence de ces dernières (notre cas) selon les populations initiales  $(x_0, y_0)$ . Dans ces conditions, on est incertain d'assumer que la population prédatrice est tellement rapide que la population de proies ( $\mu \not> \nu$ ). Le portrait de phase confirme la coexistence malgré la haute consommation de proies ( $\nu > \gamma + 1$ ). Ceci suit de la supposition de traduire cela par:

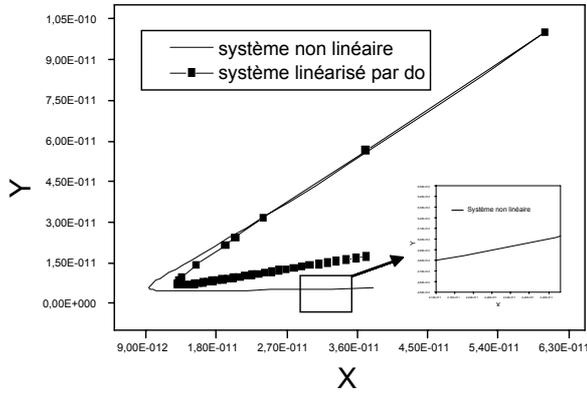
-la croissance de la population de proies qui est supérieure et rapide que celle de prédateurs.

-la suffisance de la nourriture consommée.

Si c'est le contraire, comment expliquer alors le changement de la dynamique des deux populations  $x$  et  $y$  qui s'effectue à partir de  $t \simeq 7$  et  $(x, y) = (13e - 12, 0.75e - 11)$ ? Cela consiste à dire que: pourquoi les populations régressent monotoniquement sans atteindre l'origine puis survient toujours?

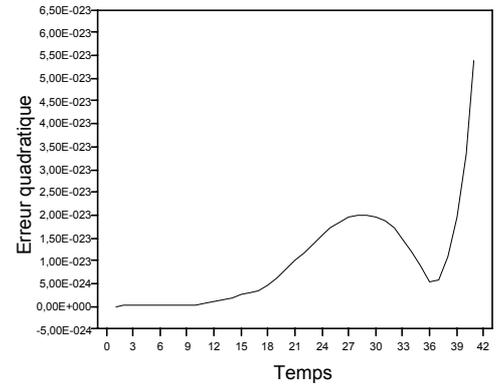
La réponse c'est que  $t \simeq 7$  est le temps nécessaire pour que le nombre de proies devient plus grand devant les besoins de nourriture des prédateurs  $y$ . En conclusion, il est approprié de dire que la diminution de  $y$  au commencement est due aux quelques prédateurs qui mouraient de faim. De même, la diminution de  $x$  est causée par la nutrition des prédateurs au dépend de proies.

En effet, si les prédateurs sont les reproducteurs et les consommateurs de proies  $x$ , la population initiale de proies  $x_0$  a comme origine la population de prédateurs  $y$  en raison de proies  $x$  qui sont la seule nourriture de prédateurs  $y$ . Par conséquent, le taux de

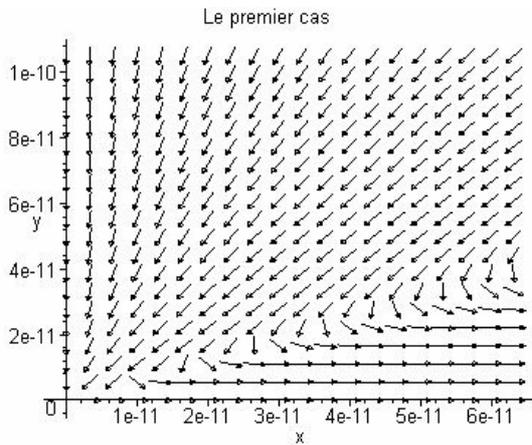


**Figure-4.3.a-** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0)=(0.6e-10, 1e-10)$ .

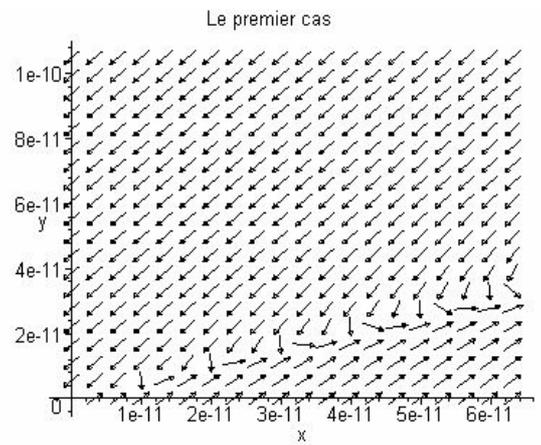
Les valeurs de paramètres associées sont:  $(\gamma, \mu, \nu)=(1.5, 2, 2.6)$



**Figure-4.3.b-** Erreur quadratique dû au système linéaire (4.6) au sens de la D.O.



**Figure-4.3.c-** Champ de vecteurs du système non linéaire (4.5).



**Figure -4.3.d-** Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O de (4.6).

reproduction doit être supérieur en lui comparant avec le taux de consommation de proies. Les exemples présentés montrent le bon accord de la dérivation optimale avec le système non linéaire puisque le tracé des solutions confirme la similitude des deux trajectoires. D'un autre côté, le calcul d'erreur montre que la dérivé optimale constitue une bonne approximation dans un voisinage du point de départ. Elle confirme aussi le type et la nature de l'origine.

### 4.3 Cas où l'équilibre $O(x=0, y=0)$ est un noeud stable

#### 4.3.1 Exemple 1

Pour les valeurs de paramètres  $(\gamma, \mu, \nu) = (0.5, 1, 1.6)$  et avec des conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.03, 0.9)$ , nous avons les équations d'état

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 1.6\frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.5y + \frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$A_0 = DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -0.5584 & -0.0017 \\ 0.9365 & -0.499 \end{bmatrix}$$

La matrice optimale donne après 7 itérations ( $\varepsilon = 1e - 6$ )

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.6056 & 0.0014 \\ 0.9446 & -0.4992 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ayant comme valeurs propres:

$$\lambda_1 = -0.6172$$

$$\lambda_2 = -0.4877$$

Les matrices optimales dans ce cas prévoient un noeud stable à l'origine, puisque leurs valeurs propres sont réelles négatives. Les solutions du système (4-7) et ses linéarisations au sens de la dérivation optimale (4-8) sont représentées dans le plan de phase de la figure (4-4-a). La figure (4-4-b) montre l'ordre de l'erreur quadratique due à l'approximation. Tandis que, les dernières représentent les champs de vecteurs.

### 4.3.2 Commentaires

Les valeurs de paramètres  $\gamma$ ,  $\mu$  et  $v$  correspondent au domaine 4. (Lemme 1-2). La trajectoire d'extinction est de type (1). (Lemme 2-1).

$$y = Cx^{\frac{5}{6}}(1 + o(1)) \quad C \in \mathfrak{R}$$

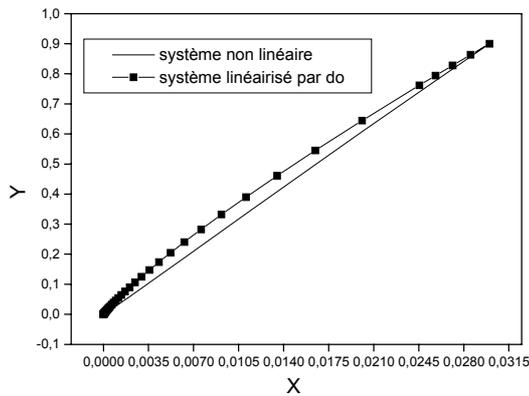
La proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$ . Les conditions initiales  $(x_0, y_0)$  cette fois ci permettent de prédire que les deux populations de proies  $x$  et de prédateurs  $y$  atteindront l'extinction. Elle est causée par la grande capacité de consommation de proies  $v$ . ( $v > \gamma + 1$ ). Les prédateurs consomment toute la proie et puis deviennent eux même éteints. Donc, la dynamique de solutions suggère à dire que:

-La quantité de la nourriture n'est pas suffisante.

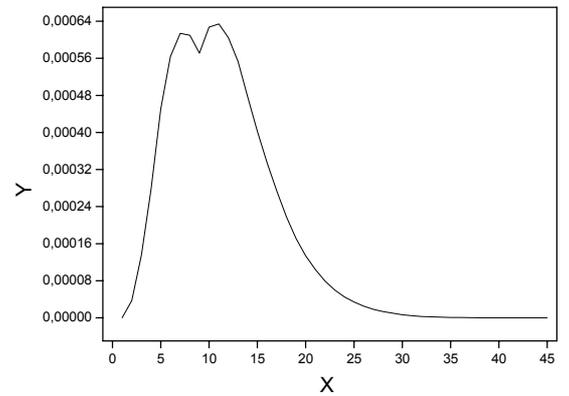
-Si les prédateurs sont les reproducteurs et les consommateurs de proies  $x$ , la population initiale de proies  $x_0$  ayant pour toujours comme origine les prédateurs  $y$ . Il consomment ce qui produisent avec un taux de reproduction inférieur au taux de consommation de proies.

### 4.3.3 Exemple 2

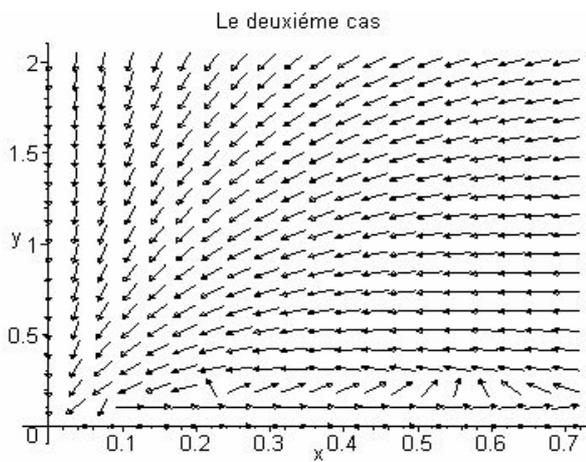
Nous avons appliqué la méthode de dérivation optimale en prenant par exemple le cas où  $(\gamma, \mu, v) = (1.5, 1, 2.7)$  avec les condition initiale  $(x_0, y_0) = (5e - 10, 8e - 8)$



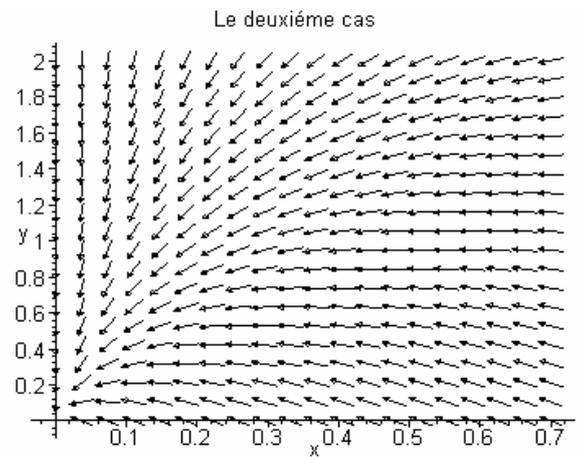
**Figure-4.4.a-** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (0.03, 0.9)$ . Les valeurs de paramètres associées sont:  $(\gamma, \mu, \nu) = (0.5, 1, 1.6)$



**Figure-4.4.b-** Erreur quadratique dû au système linéaire (4.8) au sens de la D.O.



**Figure -4.4.c-** Champ de vecteurs du système non linéaire (4.7).



**Figure -4.4.d-** Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O de (4.8).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 2.7 \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -1.5y + \frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.9)$$

La matrice initiale du système non linéaire (4-9) s'écrit:

$$A_0 = DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1.6666 & -0.0001 \\ 0.9876 & -1.5 \end{bmatrix}$$

La matrice optimale est obtenue après 3 itérations ( $\varepsilon = 1e-6$ ).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.6701 & -0.0001 \\ 0.9889 & -1.5 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Ses valeurs propres sont données par:

$$\lambda_1 = -1.6695$$

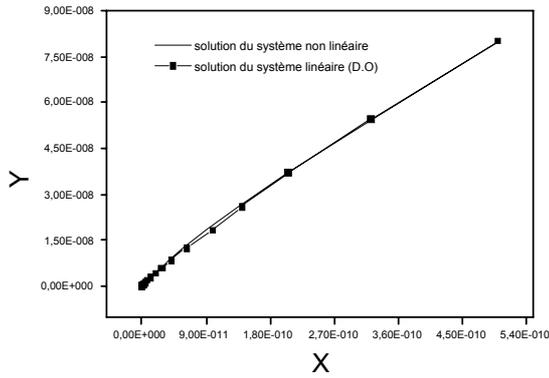
$$\lambda_2 = -1.5006$$

L'équilibre est toujours un noeud stable.

Les courbes des figures (4-5-a) et (4-5-b) représentent respectivement les variations des solutions du système linéaire optimal obtenu (4-10) en les comparant à celles du système non linéaire (4-9) et l'évolution de l'erreur quadratique associé en fonction du temps. Les champs de vecteurs non linéaires et ses linéarisés au sens de la dérivée optimale sont tracés dans les figures (4-5-c) et (4-5-d).

#### 4.3.4 Commentaires

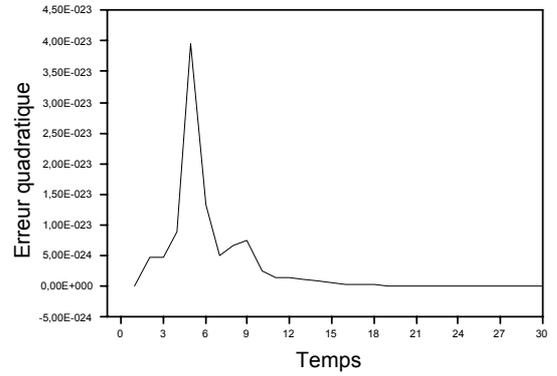
Le système appartient au domaine 7 de telle façon que les valeurs de paramètres de bifurcation vérifient les hypothèses de lemme 2-1. La courbe d'extinction possède la forme



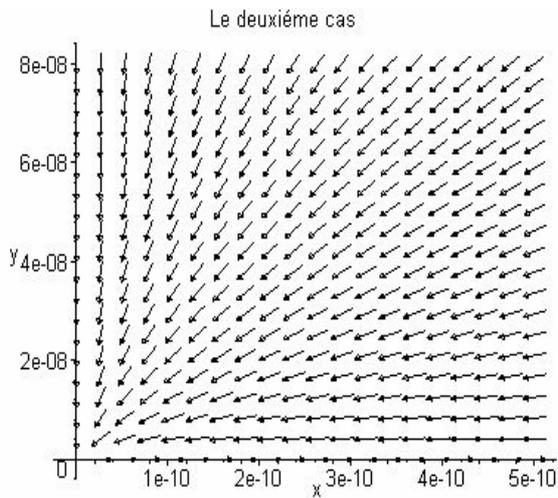
**Figure -4.5.a-**: Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0)=(5e-10, 8e-8)$ .

Les valeurs de paramètres associées

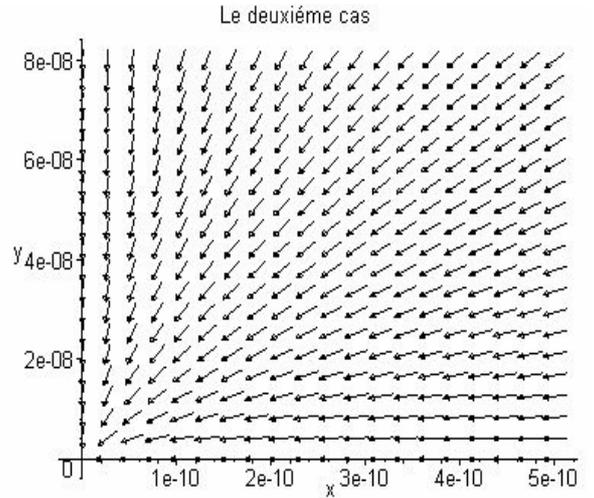
sont:  $(\gamma, \mu, \nu)=(1.5, 1, 2.7)$



**Figure-4.5.b-**: Erreur quadratique dû au système linéaire (4.10) au sens de la D.O.



**Figure -4.5.c-**: Champ de vecteurs du système non linéaire (4.9).



**Figure -4.5.d-**: Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O de (4.10).

de type (1).

$$y = Cx^{\frac{15}{17}}(1 + o(1)) \quad C \in \mathfrak{R}$$

On tire aussi que la proie  $x$  est la seule nourriture de prédateurs  $y$ .

A ce niveau, le plan de phase montre l'extinction de prédateurs parce qu'ils ne peuvent pas se reproduire assez rapidement pour compenser leurs taux de mortalité  $\gamma$ . ( $\mu < \gamma$ ). De tels prédateurs sont inadaptés à la proie. En plus, la capacité de consommation de proies est assez haute. ( $v > \gamma + 1$ ). Or, chaque prédateur consomme avant l'extinction un grand nombre de proies. Ceci explique que si le nombre de proies  $x_0$  n'est pas suffisant avant l'extinction (notre sas), la population de proies  $x$  va sans problème à l'extinction. Dans le cas inverse, on obtient l'état d'équilibre  $A(1,0)$ . En conclusion, tout dépend des conditions (populations) initiales  $(x_0, y_0)$ .

Visiblement, la similitude des champs de vecteurs d'une part, et la comparaison entre les systèmes non linéaires et ses linéarisée au sens de dérivation optimale dans les deux exemples précédents d'autre part, impliquent le bon accord de la dérivée optimale avec les systèmes non linéaires.

## 4.4 Cas où l'équilibre $O(x=0, y=0)$ est un noeud instable

### 4.4.1 Exemple

On va prendre  $(\gamma, \mu, v) = (0.1, 1.5, 0.21)$  ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 0.21\frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -0.1y + 1.5\frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.11)$$

On applique la méthode de la dérivée optimale. La linéarisation de  $F$  en  $(x_0, y_0) = (1.6e - 7, 4e - 8)$  donne:

$$A_0 = DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1.2779 & -0.1075 \\ 0.5487 & -0.4328 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.9402 & -0.0227 \\ 0.427 & 0.0623 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Ayant comme valeurs propres:

$$\lambda_1 = 0.929$$

$$\lambda_2 = 0.0735$$

Ces valeurs nous permettent de prédire que l'équilibre  $O$  est un noeud instable puisqu'elles sont réelles positives.

La figure (4-6-a) montre le plan de phase, la figure (4-6-b) représente l'évolution et la variation de l'erreur quadratique en fonction du temps, enfin les figures (4-6-c) et (4-6-d) montrent les champs de vecteurs.

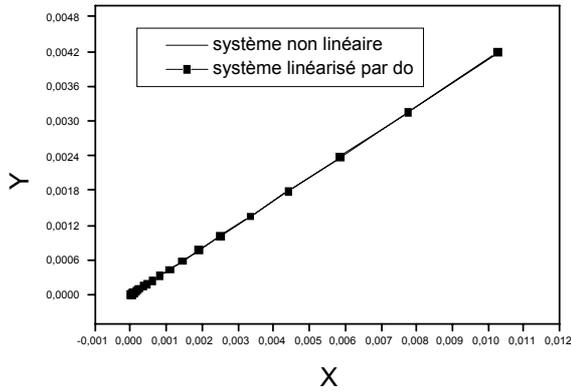
#### 4.4.2 Commentaires

Cette situation est réalisée pour une capacité croissante prédatrice élevée ( $\mu > \gamma + 1$ ) et une autre de consommation de proies  $v < \frac{\mu}{\mu - \gamma}$  (domaine 2- lemme 2-2 ). La trajectoire correspond au type (2):

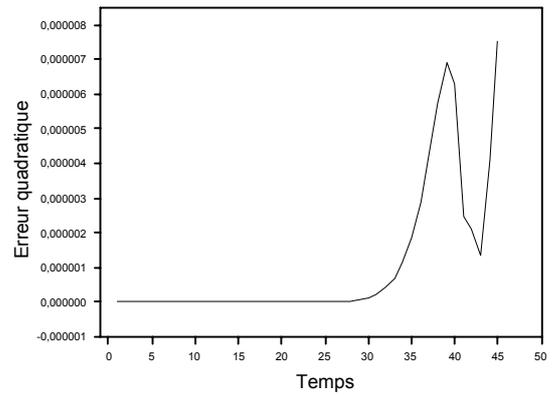
$$y = Cx^{1.4}(1 + o(1)) \quad C \in \mathfrak{R}$$

On remarque aussi que la capacité croissante prédatrice  $\mu$  est nettement supérieure à celle de consommation de proies  $v$ . ( $\mu \geq v$ ). Ces conditions provoquent une population prédatrice très rapide devant celle de proies. Alors, on a affaire automatiquement à une insuffisance du nombre de proies disponibles même si la consommation n'est pas importante ( $v < \gamma + 1$ ). Malgré celle-ci, on obtient la coexistence des deux populations.

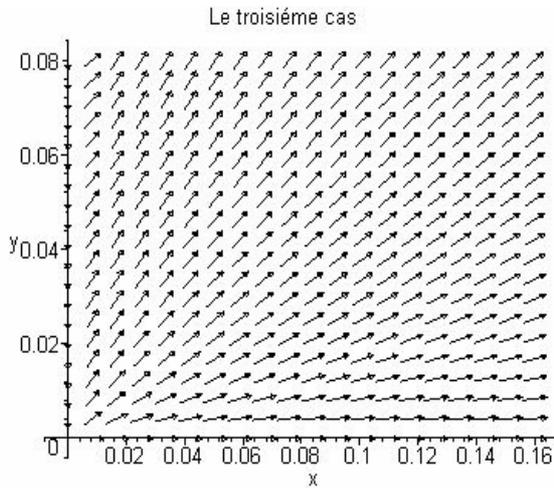
En effet, c'est le cas de l'alimentation de prédateurs  $y$  sur d'autres ressources (Le principe



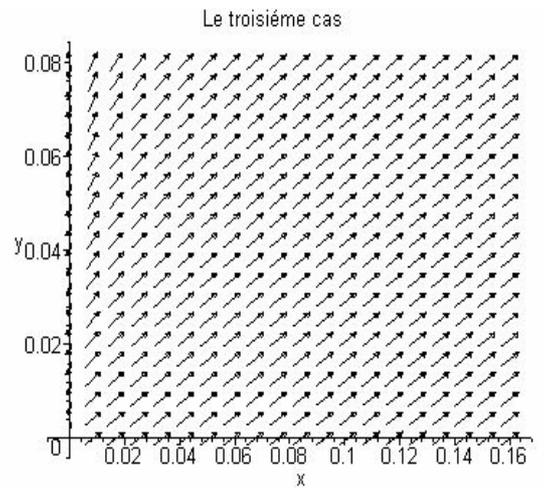
**Figure-4.6.a-:** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (1.6e-7, 4e-8)$ . Les valeurs de paramètres associées sont:  $(\gamma, \mu, \nu) = (0.1, 1.5, 0.21)$



**Figure-4.6.b-:** Erreur quadratique dû au système linéaire (4.12) au sens de la D.O.



**Figure-4.6.c-:** Champ de vecteurs du système non linéaire (4.9).



**Figure -4.6.d-:** Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O de (4.10).

de Liebig).

La capacité croissante prédatrice  $\mu$  sera proportionnelle par rapport au  $\min\{0.21a, b\rho\}$ .  
 $\rho$  la capacité de consommation de prédateurs y sur d'autres ressources.

$a, b$  sont des constantes stoechiométriques.

Cependant, toujours pas de problème concernant la similitude des champs de vecteurs, comparaison des solutions, type et nature de l'équilibre (noeud instable) et l'évolution de l'erreur quadratique en fonction du temps.

## 4.5 Cas où la trajectoire est sous une forme elliptique

### 4.5.1 Exemple

On prend l'exemple où  $(\gamma, \mu, \nu) = (2.9, 5.2, 4.1)$  et  $(x_0, y_0) = (4e - 5, 2e - 7)$

Les équations d'états sont:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - 4.1 \frac{xy}{x+y} \\ \frac{dy}{dt} = -2.9y + 5.2 \frac{xy}{x+y} \end{cases} \quad (4.13)$$

La matrice optimale s'écrit:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.2945 & -0.615 \\ 0.3621 & -1.077 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Possède comme valeurs propres:

$$\lambda_1 = -0.8888$$

$$\lambda_2 = 0.1062$$

et donc elle prédit un point selle.

La figure (4-7-b) montre une comparaison entre le système non linéaire (4-13) et son linéarisé au sens de la D.O. (4-14). La figure (4-7-a) décrit l'évolution des solutions du système non linéaire (4-13) des deux populations de proies  $x$  et de prédateurs  $y$ . Tandis que les champs de vecteurs sont tracés dans les figures (4-7-c) et (4-7-d).

## 4.5.2 Commentaires

Ce phénomène correspond à l'éclatement des deux populations. Notre recherche analytique a montré que le secteur elliptique est réalisé dans le modèle avec tous les valeurs de paramètres appartenant au domaine 1 pour des petites conditions initiales (lemme 1-4). Les paramètres répondent aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} v \geq v \frac{\mu}{\mu - \gamma} \\ v > \gamma + 1 \\ \mu > \gamma + 1 \end{cases}$$

Le secteur elliptique dans ce cas, possède deux formes de différents types:

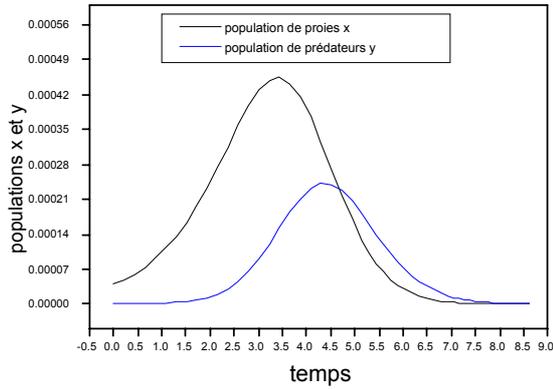
$$y = C_1 x^{\frac{29}{31}} (1 + o(1)) \quad C_1 \in \mathfrak{R} \quad \text{type(1)}$$

$$y = C_2 x^{2.3} (1 + o(1)) \quad C_2 \in \mathfrak{R} \quad \text{type(2)}$$

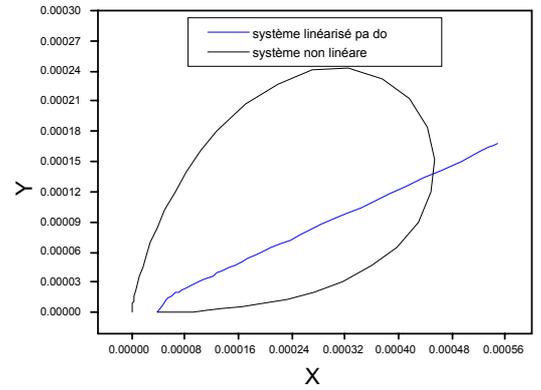
$$C_1 \neq C_2$$

Les deux populations se développent au commencement, et après un certain temps, diminuent simultanément d'une façon monotonique. Dans ce cadre des interprétations peuvent se faire en raison de:

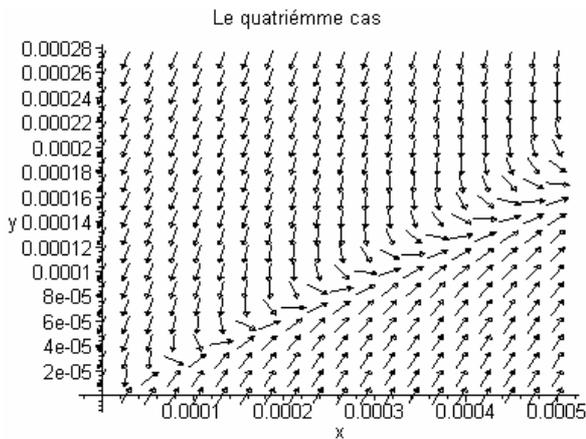
- la haute capacité de consommation de proies  $v$ .
- la capacité croissante prédatrice élevée  $\mu$ .
- L'augmentation des prédateurs qui est tellement rapide que toutes les proies consommées



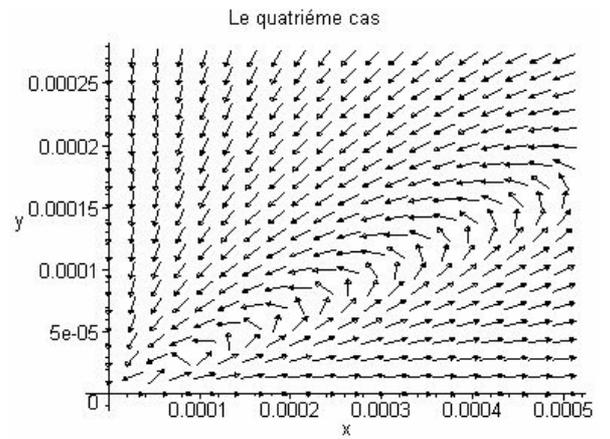
**Figure-4.7.a-** Solutions du système non linéaire (4.13) décrivant l'évolution des deux populations de proies  $x$  et de prédateurs  $y$ .



**Figure -4.7.b-** Plan de phase pour les conditions initiales  $(x_0, y_0)=(4e-5, 2e-7)$ . Les valeurs de paramètres associées sont:  $(\gamma, \mu, \nu)=(2.9, 5.2, 4.1)$



**Figure -4.7.c-** Champ de vecteurs du système linéarisé par la D.O de (4.14).



**Figure -4.7.d-** Champ de vecteurs du système non linéaire (4.13).

$(\mu > \nu)$ .

La figure (4-7-a) prouve que le nombre de prédateurs  $y$  augmente proportionnellement avec le temps. (De  $t=0$  jusqu'à  $t \simeq 4.3$ ). Ceci du à la disponibilité de la nourriture (proies) le long de cette période. Cependant, à partir de  $t \simeq 4.3$  la population prédatrice commence à diminuer jusqu'à l'extinction. Cette décroissance est due à la non disponibilité de proies consommées devant les besoins de consommation de prédateurs. C'est tout à fait logique puisque la croissance prédatrice est tellement rapide ( $\mu > \nu$ ) d'une part, et la capacité de consommation de proie  $\nu$  est grande de l'autre part. C'est à dire qu'en plus de la croissance des besoins de consommation qui deviennent très haute, chaque prédateur consomme un nombre important de proies.

De même, la solution  $x(t)$  de proies présente un comportement analogue à celui de prédateurs  $y$ .

\*  $t < 3.4$  : la quantité de proies consommées n'influe pas sur la croissance de la population  $x$ .

\*  $t > 3.4$  : diminution de la population de proies  $x$  jusqu'à l'extinction. Elle est due aux raisons citées précédemment..

En conclusion, il est approprié de dire que l'effet de la prédation apparaît sur:

-les prédateurs: à partir de  $t_1 = 4.3$ .

-les proies: à partir de  $t_2 = 3.4$ .

Logiquement, l'effet de la prédation sur les proies apparaît en premier lieu, puisque la quantité de proies  $x$  influe sur les prédateurs  $y$ .

Nous avons voulu montrer que le système non linéaire ici a la capacité de présenter un comportement complexe. C'est pourquoi l'évolution des solutions n'est pas la même. Malgré ça, la modélisation nous permet d'apprendre quelque chose d'utile sur l'aspect qualitatif (stabilité de système).

## 4.6 Conclusion

A la lumière de cette étude, nous voulons montrer qu'une bonne utilisation de la méthode de dérivation optimale (choix des conditions initiales et des paramètres adéquats), peut permettre la description qualitative du comportement des populations de différents espèces dans la nature. Cette technique peut être utilisée comme un outil numérique puissant pour l'analyse paramétrique de la stabilité de certains phénomènes biologiques.

Autrement dit, elle peut confirmer et assurer les rôles et les effets de la prédation. A titre d'exemple:

-la nutrition d'un prédateur aux dépens de proies.

-élimination des animaux malades et enrayment des épidémies parce qu'ils sont les plus faciles à capturer (si la consommation existe).

**Conclusion générale.**

# Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons présenté une analyse paramétrique de la stabilité à l'origine et des régimes dynamiques d'un modèle proie prédateur de type ratio dépendant d'Arditi Ginzburg (1989) régi par des équations différentielles ordinaires. Pour ce faire, on utilise la dérivée optimale puisque la dérivation classique est mise en défaut.

Nous arrivons donc à la conclusion que:

-Une efficacité faible signifie grossièrement un faible rendement à la digestion des proies, et il est logique de penser que si ce rendement est trop faible, les prédateurs vont finir par mourir de faim. (Domaines C et A).

-Une exception peut se produire dans le domaine E ( $0 < \mu < \gamma$ ,  $v > \gamma + 1$ ) dans le cas peu commun où les prédateurs sont les consommateurs les très efficaces et les très inefficaces de se reproduire. C'est conditions mènent normalement la proie à atteindre sa capacité de charge.

-Les prédateurs les très efficaces (consommation et reproduction) se trouvent dans le système de domaine A. [Deux situations différentes sont possibles: Le domaine 1 et le domaine 6 ( $v > \frac{\mu}{\mu - \gamma}$  et  $\mu > \gamma + 1$ )]. Là, les prédateurs conduisent toujours la proie à l'extinction et par conséquent, deviennent eux même éteints.

-Par ailleurs, l'activité de notre système semble pouvoir être déterminée complètement par les entrées. C'est à dire que l'on peut décrire le développement des populations en connaissant seulement la quantité de proies consommée, la capacité croissante prédatrice, le taux de mortalité des prédateurs  $\gamma$  et la condition initiale  $(x_0, y_0)$ . A y regarder de plus près, cette hypothèse doit être élever, car bien des facteurs varient aléatoirement, notamment, les paramètres climatiques, les attaques et les activités humaines et en particulier le cas de l'alimentation des prédateurs sur d'autres ressources. (Exemple 4-4).

-Quel est le temps final choisi? Voilà sans aucun doute l'une des questions les plus importantes ici. On est sensé de savoir le temps final convenable pour que  $x(t)$  et  $y(t)$  restent des quantités positives au cour de temps. Non seulement l'évolution de ces quantités peut devenir prohibitif, mais surtout la précision des calculs sur l'ordinateur restant limitée.

-Le facteur temps semble donc poser un problème important pour relier les résultats théoriques à la réalité biologique.

-La dérivée optimale constitue à l'heure actuelle un outil puissant et performant parce qu'elle peut en générale révéler et confirmer les propriétés et les résultats écologiques données par Ardit-Ginzburg, même si ces derniers engendrent un comportement particulier (bifurcation). Ceci est justifié par l'étude comparative basée sur le calcul de l'erreur quadratique. De même, les autres aspects qualitatifs (nature de système et type de l'origine) peuvent être retrouvés par cette technique.

-Cette dernière peut aussi déterminer la nature de l'équilibre à la valeur (aux valeurs) de bifurcation.

Parmi les prolongements possibles de notre travail, nous citons à titre d'exemple:

-L'utilisation de cette méthode pour l'étude de la stabilité de d'autres modèles biologiques.

-On peut voir aussi les possibilités offertes par cette technique au niveau des équilibres A et B.

-Il nous a paru essentiel de chercher autres méthodes de linéarisation qui doivent répondre le mieux possible au comportement du système qui engendre le phénomène d'éclatement des populations.

-On peut aussi généraliser l'application de cette méthode aux différents problèmes de bifurcation.

Nous souhaitons enfin, que ce travail puisse contribuer à sensibiliser d'avantage les étudiants sur l'intérêt de ce thème, et que notre modeste thèse trouvera sa place dans les laboratoires de notre université.

# Bibliographie

- [1] **F. Berezovskaya, G. Karev, R. Arditi**, (1989). Parametric analysis of the Ratio-Dependent Predator-Prey model, Institut national agronomique Paris-Grignon, Ecologie des populations et communautés, Accepted for publication in The Journal of Mathematical Biology November 2000.
- [2] **H.R.Akçakaya, R.Arditi, L.R Ginzburg**. (1995). Ratio-dependent predation: an abstraction that works, Ecology, 76, 995-1004.
- [3] **R.Arditi, L.R.Ginzburg**. (1989). Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence, J.Theor. Biol. 139, 311-326.
- [4] **C.Jost, O.Arino, R.Arditi**. (1999). About deterministic extinction in ratio-dependent predatorprey models. Bull. Math. Biol., 61, 19-32.
- [5] **Y.Kuang, A.Beretta**. (1998). Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey systems. J. Math. Biol.,35, 389-406.
- [6] **G.D.Ruxton, W.S.C.Gurney**. (1992). The interpretation of tests for ratio-dependence. Oikos, 65, 334-335.
- [7] **J.O.Irisson**. L'analyse de bifurcations et son application à l'évolution des systèmes biologiques à deux espèces.
- [8] **Y.A.Kuznetsov**, (1998). Elements of Applied Bifurcation Theory (Second Edition),Ed. Springer Volume 112 in Applied Mathematical Sciences.

- [9] **P.Glendinging**, (1994). Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of non linear differential equations, Ed. Cambridge Text In Applied Mathematics.
- [10] **U. Dieckmann, U. Marrow and R.Law**, (1995). Evolutionary cycling in predator prey interactions: Populations Dynamics and the Red Queen, Journal of Theoretical Biology vol. 176, pp. 91-102.
- [11] **S.M.A.Bekkouche, M.F.Bendahmane, T.Benouaz**. (10 – 12 *mai* 2003). Analyse Paramétrique de la Stabilité à l’Origine d’un Modèle Ratio-Dépendant par la Dérivée Optimale. Première Conférence Internationale sur les Modèles et Méthodes Mathématiques et Informatiques en Dynamique de Population.
- [12] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995) . Relation entre l’Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique, Publications de l’ U.A, CNRS 1204, N<sub>0</sub>.95/10.
- [13] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995). Existence, Unicité et Convergence de l’Approximation au Sens des Moindres Carrés d’une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [14] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995) . Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure, Appl. Math. and Comp sci., N<sup>o</sup> 1, Vol. 5, pp 33-48.
- [15] **T. Benouaz**, (16 – 20 *June* 1995). Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by an Optimal Procedure, Proceeding of the 2nd International Conference on Differential Equations in Marrakech, Maroc.
- [16] **T. Benouaz**, (13 – 17 *August* 1995). Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation : The Scalar Case, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp. 19-22 , Plovdiv, Bulgaria.

- [17] **T. Benouaz**, (3–5 *December* 1996). Lyapunov Function Generated by Least Square approximation, Deuxième Conférence Maghrébine sur l'Automatique Vol.1 pp.73-75, Tlemcen.
- [18] **T. Benouaz**, (1996). Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire, Thèse de Doctorat d'état, Tlemcen.
- [19] **T. Benouaz and O. Arino**, (1996). Least Square Approximation of a Non-linear Ordinary Differential Equation, Computers Math. Applic., Vol. 31, N° 8, pp 69-84.
- [20] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998). Optimal Approximation of the Initial Value Problem, Computers Math. Applic. vol. 36, N°1, pp.21-32.
- [21] **T. Benouaz, F. Bendahmane, A. Chikhaoui**, (1999). Generalisation of the Optimal Linearization of Nonlinear Ordinary Differential Equation, Submitted for Publication in Mathematics and Computer in simulation journal.
- [22] **T. Benouaz**, (2000). Optimal Derivative of a Nonlinear Ordinary Differential Equation, Equadiff 99, International Conference on Differential Equations, Vol. 2, pp 1404-1407, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [23] **A. Chikhaoui**, (2000). Contribution à l'Etude de la Stabilité des Systèmes Non Linéaires, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.
- [24] **T. Benouaz et F. Belkhouche**, (7 – 8 *mai* 2001). Etude Numérique des Bifurcations Elementaires par la Méthode de Dérivation Optimale – Linéarisation à la Valeur de Bifurcation, Deuxièmes Journées de Mathématiques, Tlemcen.
- [25] **T. Benouaz et F. Belkhouche** (4 – 6 *juin* 2001). Etude de la Bifurcation Engendrée par une Transition de Phase, Application à un Condensateur Non Linéaire, Congrès Euro-Méditerranéen de la Matière Condensée, Tlemcen.

- [26] **F. Belkhouche**, (2001). Contribution à l'Etude de la Stabilité asymptotique Dérivée Optimale, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.
- [27] **G.F. Gause**, (1934). The Struggle for Existence. Williams and Wilkins, Baltimor.
- [28] **L.S. Luckinbill**, (1973). Coexistence in Laboratory Populations of Paramecium aurelia and its Predator Dininium nasutum. Ecology 54: 1320-1327.
- [29] **B.G. Veilleux**, (1979). An Analysis of Predatory Interaction Between Paramecium and Dininium. Journal of Animal Ecology. 48: 787-803.
- [30] **T. Sari**, (26 avril – 8 mai 2003). Ecole CIMPA. UNESCO TLEMEN ALGERIE. Contrôle non linéaire et applications.
- [31] **J.P. Demailly**. (1991). Analyse numérique et équations différentielles.
- [32] **R. Arditi and J. Michalski**, (1995). Nonlinear food web models and their response to increased basal productivity. In: Food Webs: Integration of Patterns and Dynamics (Polis and Winemiller eds) Chapman and Hall.
- [33] **J.D. Lebreton et C. Millier**, (1982). Modèles dynamiques déterministes en biologie.
- [34] **J.A. Leon and D.B. Tumpson**, (1975). Competition between two species for two complementary or substituable ressources.
- [35] **J.D. Murray, Springer**. (1990) Mathematical biology.
- [36] **J. Guckenheimer, P. Holmes**, (1983). Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector elds, Springer, New York.
- [37] **Nicolas Vandenberghe** (2002). Bifurcations d'orbites quasi-homoclines spatialement étendues et de systèmes quasi-réversibles et applications, thèse: Institut de Nice.