

# Table des Matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>
0.1 Note historique . . . . .	5
0.2 Problématique . . . . .	6
0.3 Contribution . . . . .	6
<b>1 Rappels et problématique</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Rappels des concepts généraux . . . . .	10
1.2.1 Equations de Maxwell . . . . .	10
1.2.2 Equations de conservation . . . . .	10
1.2.3 Force de LORENTZ . . . . .	12
1.2.4 Equations de l'hydrodynamique . . . . .	12
1.3 Problématique . . . . .	18
1.3.1 Position du problème . . . . .	18
<b>2 Résolution du problème et discussion</b>	<b>22</b>
2.1 Introduction . . . . .	22
2.2 Résolution du problème . . . . .	23
2.2.1 Un milieu conducteur . . . . .	23
2.2.2 Plasma . . . . .	24
2.2.3 Base de la Magnétohydrodynamique . . . . .	29

2.2.4	Equilibre magnétohydrostatique: . . . . .	33
2.3	Linéarisation des équation MHD, ondes MHD . . . . .	34
2.3.1	Linéarisation: . . . . .	34
2.3.2	Dérivation de l'équation d'onde linéarisée . . . . .	36
2.3.3	Ondes Magnétohydrodynamiques . . . . .	41
2.4	Discussions des résultats . . . . .	46
2.4.1	Les ondes MHD dans la structure coronale . . . . .	46
2.5	Conclusion . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Production d'énergie électrique par confinement magnétique d'un plasma</b>	
	<b>dans un tokamak</b>	<b>54</b>
3.1	Introduction . . . . .	54
3.2	Confinement d'un plasma . . . . .	55
3.2.1	Confinement magnétique . . . . .	55
3.2.2	Présentation de la géométrie tokamak . . . . .	57
3.2.3	Equilibre 2D pour configurations axisymétrique . . . . .	59
3.3	L'équation de Grad-Safranov dans l'espace des flux . . . . .	63
3.4	Discrétisation du problème . . . . .	64
3.5	Procédure variationnelle . . . . .	66
3.6	Orthogonalisation d'un domaine 2D . . . . .	69
3.6.1	Orthogonalisation en domaine 2D discret . . . . .	69
3.7	Formulation du problème . . . . .	71
3.8	Conclusion . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Résolution numérique de problème de confinement</b>	<b>74</b>
4.1	Introduction . . . . .	74
4.1.1	La résolution numérique du problème . . . . .	74
4.1.2	La résolution du problème pour une géométrie d'un disque . . . . .	76
4.2	Conclusion . . . . .	80

<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>83</b>
5.1	Annexe1 . . . . .	83
5.1.1	Champ potentiel . . . . .	83
5.1.2	Champ sans-force . . . . .	84
5.2	Annexe2 . . . . .	85
5.2.1	Formules . . . . .	85
5.2.2	Lemmes . . . . .	86
5.3	Annexe3 . . . . .	87
5.3.1	MHD idéale appliquée aux plasmas . . . . .	87
5.3.2	Equilibre 2D en MHD idéale . . . . .	87
5.3.3	Les quantités de surfaces . . . . .	88
5.4	Annexe4 . . . . .	91
5.4.1	Définition de l'espace des flux . . . . .	91
5.5	Annexe5 . . . . .	92
5.5.1	Orthogonalisation en domaine 2D continu . . . . .	92
	<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>

## **Introduction Générale.**

# Introduction

## 0.1 Note historique

L'interaction électromagnétique est à l'origine de tous les phénomènes électriques et magnétiques. La première grande étape dans la compréhension de l'électromagnétisme vient de l'unification de l'électrodynamique et du magnétisme en une seule et même interaction par J. C. Maxwell en 1860[3].

Les recherches effectuées dans le cadre de l'interaction onde électromagnétique-plasma ont notamment pour tâche de décrire le comportement collectif des électrons et des noyaux chargés positivement qui constituent les plasmas lorsque ceux-ci sont soumis à de forts champs magnétiques. Des phénomènes complexes de transport de matière et d'énergie se produisent alors au sein du plasma.

Les particules composant un plasma satisfont aux équations électromagnétiques de Maxwell et aux équations hydrodynamiques. Sous certaines hypothèses les équations citées précédemment définissent la magnétohydrodynamique (MHD).

La magnétohydrodynamique(MHD) est un domaine très vaste de la physique qui concerne l'interaction entre un champ électromagnétique et un fluide conducteur de l'électricité. Ainsi, on conçoit aisément que, suivant le type d'interaction, on puisse trouver la magnétohydrodynamique liée aux problèmes apparemment disjoints de la couronne solaire, de la magnétosphère, de la conversion d'énergie fossile en énergie électrique, de la fusion thermonucléaire de la propulsion ou encore aux techniques industrielles de la métallurgie.[1] [2] [7]

## 0.2 Problématique

Notre problème consiste à l'étude de l'interaction d'un champ d'induction magnétique variable  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  dérivant du potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  avec un plasma infiniment conducteur et parfaitement compressible. Le but est de donner une approche qui permet de faire la description de l'équilibre magnétique d'un plasma, en utilisant les équations de Maxwell et les équations hydrodynamiques.

## 0.3 Contribution

Dans notre travail nous avons fait un couplage entre les équations de Maxwell et hydrodynamiques, ce qui nous amène à l'approche magnétohydrodynamique (MHD). Cette approche permet de décrire l'évolution du champ magnétique dans un plasma parfaitement conducteur et infiniment compressible. La linéarisation de ces équations montre que trois types de modes d'oscillation existent dans le plasma sous l'effet du champ magnétique, les ondes d'Alfvén et les ondes magnétoacoustiques lentes et rapides. Celles-ci jouent un rôle important pour le confinement d'un plasma.

La magnétohydrodynamique (MHD) est un outil de modélisation très puissant lorsqu'il s'agit de contrôler le confinement du plasma.

Dans notre mémoire, on considère que le plasma est entouré d'une certaine épaisseur de vide, lequel (plasma) est entouré d'une paroi conductrice, auquel nous appliquons un fort champ magnétique.

Plus précisément, pour l'étude du confinement du plasma, les équations MHD associées à des conditions aux limites adéquates, conduisent à l'équation de Grad Shafranov. Sa résolution se fait dans un espace orthogonal où elle se réduit à un Laplacien.

Il est difficile de résoudre de telles équations même numériquement. C'est pour cela que nous proposons un modèle mathématique qui permet de faire l'étude du confinement d'un plasma et qui se traduit par l'équivalent d'un problème à frontière libre.

Ce mémoire est configuré de la manière suivante :

1. Dans le premier chapitre, nous faisons des rappels sur les phénomènes d'un milieu conducteur en mouvement en présence d'un champ magnétique et nous posons la problématique.

2. Le deuxième chapitre est consacré à la résolution du problème posé. Une discussion est abordée mettant en valeur les résultats obtenus.

3. Dans le chapitre trois, est présentée une application montrant l'importance de la production d'énergie électrique par le confinement du plasma

4. Enfin le dernier chapitre aborde l'aspect numérique. Finalement, une conclusion termine notre travail.

Enfin les travaux présentés ici ont été exposés dans plusieurs articles: un article "Etude de l'Interaction d'une Onde Electromagnétique avec un plasma-Cas des Ondes Magnétohydrodynamique" a été publié dans un proceeding de "First International Symposium On Electromagnetism, Satellites and Cryptography IEEE , June 19-21-2005 in Jijel."

Deux communications actuellement soumises :

"Elaboration d'un Modèle Mathématique pour l'Etude de l'Equilibre Magnétohydrodynamique (MHD) d'un plasma de Tokamak" dans le 8ème Séminaire International sur la Physique Energétique, 11-12 Novembre à Bechar.

" Production d'énergie électrique par confinement magnétique d'un plasma de Tokamak " dans "the First International Meeting on Electronics & Electrical Science and Engineering, IMESE'06, November 4-6, 2006, University of Djelfa."

## **Rappels et Problématique**

# Chapitre 1

## Rappels et problématique

### 1.1 Introduction

Afin d'étudier l'interaction d'un milieu conducteur en mouvement en présence d'un champ magnétique, on utilise une théorie qui décrit ce milieu comme une collection de particules en terme de moyenne sur de petits volumes dans l'espace des phases. Cette approche est rendu nécessaire par le nombre considérable de particules individuelles impliquées dans les processus physiques réels. Les quantités physiques obtenues de cette manière sont gouvernées par les lois de conservation, les équations fluides décrivant la dynamique des processus physiques sont les équations de l'hydrodynamique et les équations de Maxwell. Dans ce chapitre, nous abordons des rappels sur l'interaction d'un milieu conducteur en mouvement en présence d'un champ magnétique. Aussi, nous présentons la problématique.

## 1.2 Rappels des concepts généraux

### 1.2.1 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell représentent les bases de l'électromagnétisme, c'est à dire que ces équations permettent de décrire les évolutions spatio-temporelles du champ électrique et du champ magnétique[3].

Les équations de Maxwell prennent la même forme que dans le vide en changeant  $\varepsilon_0$  en  $\varepsilon$  et  $\mu_0$  en  $\mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \text{div } \vec{D} = \rho \\ (ii) \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ (iii) \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (iV) \quad \text{Rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Soient  $l_0$ ,  $t_0$  et  $V_0 = l_0 / t_0$ , la longueur, le temps et la vitesse caractéristique du plasma.

L'analyse dimensionnelle de l'équation (iii) de Maxwell montre que

$$\frac{E}{l_0} \sim \frac{b}{t_0}$$

Compte tenu de cette dernière relation et du fait que  $V_0 \ll c$  (c'est à dire que les vitesses des électrons et ions sont non relativistes, où la force de Lorentz est plus petite que la force électrique), le second terme de l'équation (iV)  $\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  de Maxwell est négligeable devant le terme magnétique  $\vec{Rot} \vec{B}$  et devant la distribution de courant c'est à dire:

$$\vec{Rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Equations de conservation

Les mouvements d'un milieu conducteur de densité  $\rho$  sont gouvernés par des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement ou l'énergie. Ces relations

sont déduites des différents moments de la fonction de distribution associée au plasma. L'équation de continuité ou de conservation de la masse s'écrivant:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (1.3)$$

Où  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  traduit le fait que la masse est distribuée continûment dans le milieu.

Pour un milieu électriquement neutre soumis aux seules forces de pression, de Lorenz, de gravité et de viscosité, l'équation du mouvement (ou conservation de la quantité de mouvement) s'écrit:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = - \vec{\text{grad}}(p) + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho \vec{g} + \vec{F}_v \quad (1.4)$$

Où  $p$  représente le champ de pression cinétique,  $\vec{g}$  est le champ de gravité. La force de viscosité s'écrit

$$\vec{F}_v = \rho \nu \left( \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{\text{grad}} \left( \text{div}(\vec{v}) \right) \right)$$

Où  $\nu$  est le coefficient de viscosité cinématique.

Suivant les mêmes hypothèses et en négligeant la viscosité, l'équation de conservation de l'énergie cinétique s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \text{div} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) = \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(p) + \rho \vec{g} \cdot \vec{v} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.5)$$

Ainsi l'équation de conservation de l'énergie interne  $U$  est

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} \left( (U + p) \vec{v} \right) = \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(p) \quad (1.6)$$

Comme nous avons négligé ici la viscosité et les pertes de chaleur, nous nous situons dans l'hypothèse adiabatique qui nous permet de réécrire l'équation (1.4) sous la forme.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Où  $\gamma$  est le coefficient adiabatique (rapport des chaleurs spécifiques  $c_p$  et  $c_v$ ). L'équation de conservation de l'énergie totale est alors la somme des équations de conservation de l'énergie cinétique et de l'énergie interne.

D'autre part, la densité de charge  $\rho_c$  dans un plasma se conserve et on a :

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (1.8)$$

Dans un milieu électriquement neutre, la conservation de la densité de charge se réduit à

$$\text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (1.9)$$

### 1.2.3 Force de LORENTZ

la force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F} = -q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Et puisque

$$\vec{j} = nq \vec{v}$$

Alors la force de Lorentz pour les électrons, par unité de volume est :

$$\vec{F}_{\text{lorentz}} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.10)$$

### 1.2.4 Equations de l'hydrodynamique

Les lois de l'hydrodynamique permettent d'établir un certain nombre d'équations. Ces équations seront ensuite complétées par une équation de conservation de l'énergie faisant intervenir toute une gamme de phénomènes, champ électromagnétique, échanges d'énergie sous forme radiative, échanges de chaleur ...

## Equation de la continuité hydrodynamique

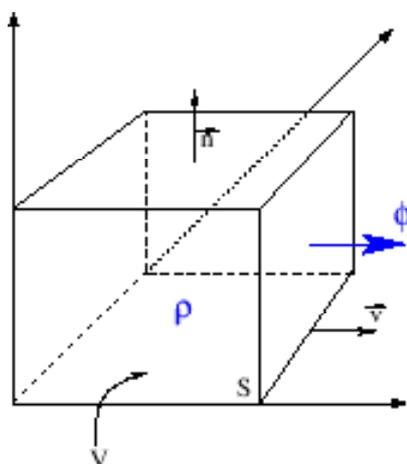


Figure 1.1: équation de la continuité hydrodynamique

On appelle débit du fluide le flux de masse à travers une surface  $d\Phi = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ , les surfaces étant orientées vers l'extérieur. La conservation de la quantité de matière pour un élément de volume de surface s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Or  $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \int_V \vec{A} \cdot d\vec{S}$ , et si l'on considère que le volume ne varie pas au cours du temps alors on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.11)$$

Ceci signifant que la variation de matière dans un volume donné est uniquement produite par la matière qui entre ou qui sort de ce volume.

### Force de frottement visqueux

Une force de viscosité est une force le plus souvent de cisaillement s'exerçant à l'intérieur d'un fluide. En utilisant un modèle de fluide sous forme de "strates" solides, modélisant

un fluide incompressible, dans ce cas, la force exercée à la surface de contact entre deux strates s'écrit

$$\vec{F} = \rho \nu S \vec{\text{grad}}(v)$$

Dans le cas d'un mouvement purement monodimensionnel, cette formulation est satisfaisante. Par contre dans le cas d'un mouvement plus complexe, il se peut qu'il y ait un gradient de vitesse sans pour autant qu'il y ait de force de frottements visqueux. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser une expression sous forme de laplacien de la vitesse :

$$\vec{F} = \rho \nu S \nabla^2 (v) \quad (1.12)$$

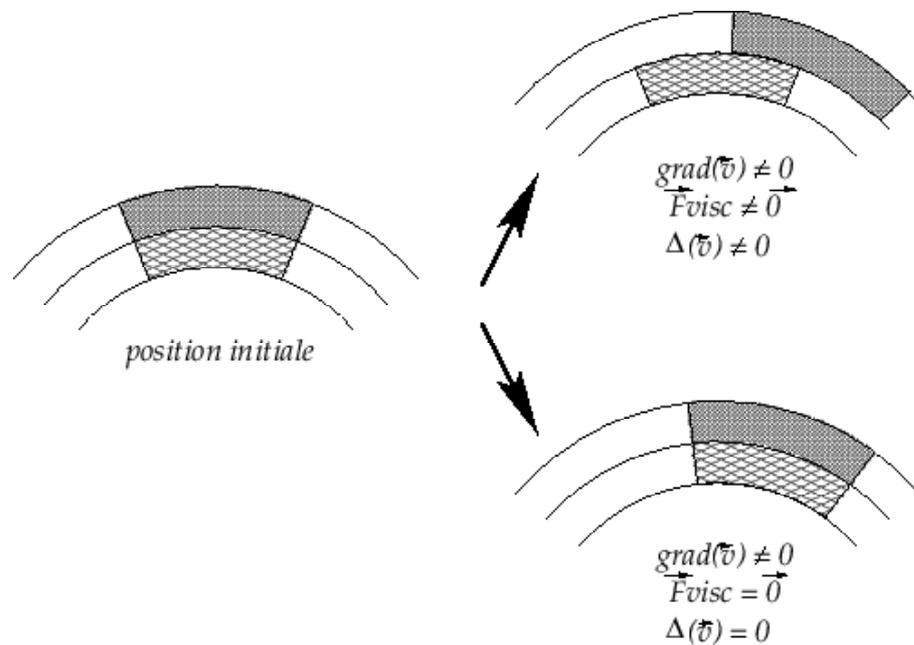


Figure 1.2. force de viscosité

La force de viscosité varie en fonction du modèle utilisé. Il est possible de définir une viscosité pour un plasma, en considérant le plasma comme un gaz de particules ayant des vitesses différentes en fonction de leur position. Ainsi, si le gradient de vitesse est dirigé selon  $z$ , des particules de faible vitesse vont se déplacer vers les endroits où les particules

ont des vitesses supérieures (et inversement pour les particules de vitesse élevée), entrer en collision avec des particules de vitesse différente, et de cette façon changer la vitesse moyenne de cette couche de plasma.

### Force due à la pression

Considérons un petit élément de fluide monodimensionnel, compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  et de section  $dS$ . La force globale s'exerçant sur cet élément est donc

$$F = \left( \vec{P}(x) - \vec{P}(x + dx) \right) S$$

Ceci peut alors se généraliser à

$$\vec{F}_{pression} = - \text{grad} \left( \vec{P} \right)$$

### Conservation de la quantité de mouvement

D'après les équations (1.10) et (1.12), le principe fondamental de la dynamique s'écrit (par unité de volume) :

$$m \vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{extérieures}$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \right) \vec{v} = - \text{grad}(P) + \rho \nu S \nabla^2 (\vec{v}) + \rho_e \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (1.13)$$

Le principe fondamental de la dynamique pour une particule chargée nous permet de faire une simulation, qui permet de tracer la trajectoire d'une particule soumis à un champ

magnétique :

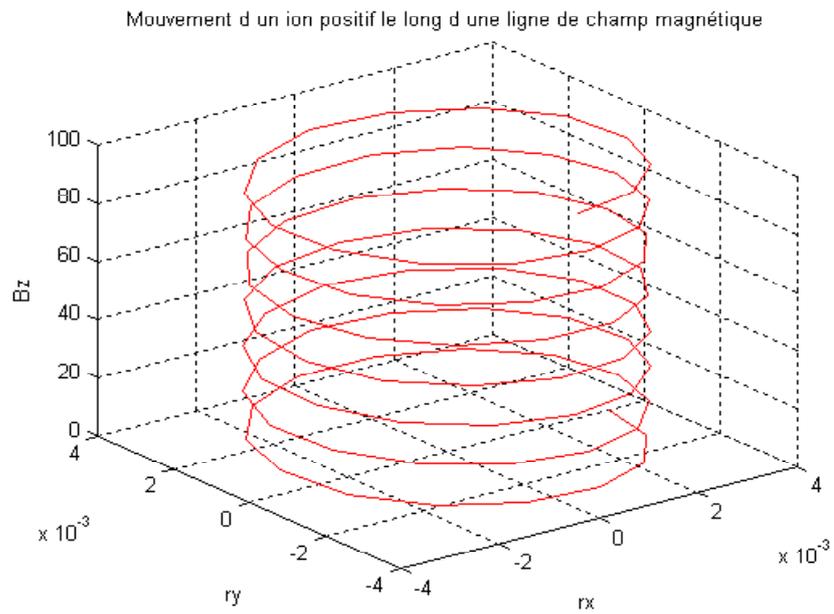


Figure.1.3 Mouvement d'un ion positif le long d'une ligne de champ magnétique

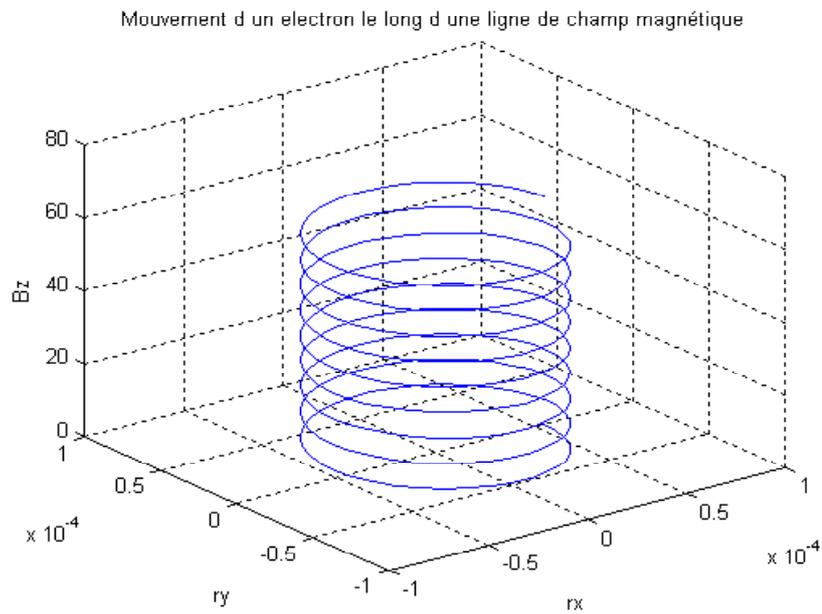


Figure.1.4 Mouvement d'un electron le long d'une ligne de champ magnétique

Le mouvement d'un electron et d'un ion le long d'une ligne de champ magnétique  $B=(Bz)u_z$

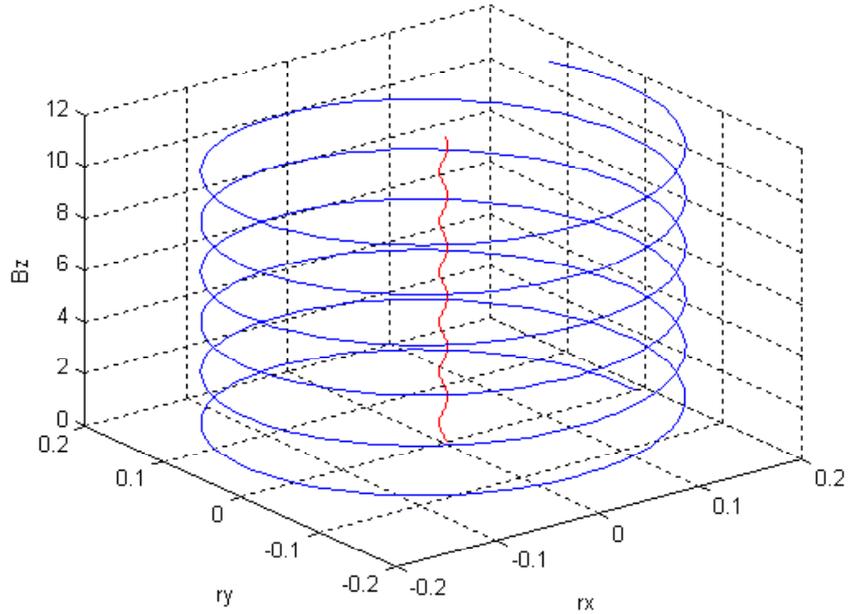


Figure.1.5 Mouvement d'un electron et d'un ion le long d'une ligne de champ magnétique  $B = B(z) u_z$

Si l'on considère le plan orthogonal à  $z$ , le mouvement est circulaire de rayon  $R$ . Ce dernier est appelé rayon de Larmor.

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{v_0 \sin(w_0 t)}{w_0} \\ r_y &= \frac{v_0 \cos(w_0 t)}{w_0} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Donc

$$r_x^2 + r_y^2 = R^2 \quad (1.15)$$

Par identification

$$R = \frac{mv_0}{eB} \quad (1.16)$$

Où

$$w_0 = \frac{qB}{m} \quad (1.17)$$

tel que

$B$  : Champ magnétique,

$q$ : charge de l'électron,

$m$  : masse de l'électron( $m_e$ ) ou masse de l'ion ( $m_i$ ).

Les ions, plus lourds, sont beaucoup plus lents que les électrons, donc le rayon de Larmor d'un ion est donc plus grand que celui d'un électron, ainsi la fréquence de giration autour des lignes de champ est différente selon l'espèce. Les électrons tournent donc à une fréquence supérieure à celle des ions.

Le rayon de Larmor dépend de l'intensité du champ magnétique, de la masse et la charge de la particule, et de son énergie. Plus le champ magnétique est puissant, plus le rayon de Larmor est faible, la particule restant "scotchée" au voisinage de la ligne de champ, où on aura un bon confinement du plasma.

## 1.3 Problématique

Notre problème consiste à l'étude de l'interaction d'un champ d'induction magnétique variable avec un plasma infiniment conducteur et parfaitement compressible. Le but est de montrer l'approche qui permet de faire la description de l'équilibre magnétique d'un plasma, en faisant un couplage entre les équations de Maxwell et les équations hydrodynamiques (voir Rappels). Ainsi nous cherchons les solutions des équations obtenues.

### 1.3.1 Position du problème

#### Action du champ magnétique sur un milieu conducteur

Considérons un milieu conducteur, de conductivité électrique  $\sigma$ , en mouvement. On désigne par  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  la vitesse d'un élément du conducteur de position  $\vec{r}$  à l'instant

$t$  ( $|\vec{v}| \ll c$ ,  $c$  vitesse de la matière) dans une région de l'espace où règne un champ d'induction magnétique variable  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  dérivant du potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Le champ électromoteur d'induction est défini par la relation

$$\vec{E}_m = (\vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dans toute la suite, on négligera l'existence éventuelle de gradients de potentiel électrique. Quelle relation existe-t-il entre le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  ?

Dans le cas où la conductibilité est infinie (milieu parfaitement conducteur) en déduire une relation entre  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$ , puis une relation entre  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  (équation (1)).

### Evolution du champ magnétique dans un plasma

Le conducteur est un plasma dont la masse volumique moyenne est  $\rho_0$ ;  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  est la vitesse moyenne des ions positifs et molécules non ionisées en  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . Le plasma est supposé ici infiniment conducteur. Il est supposé aussi parfaitement compressible si bien que chaque élément de matière n'est soumis qu'à la force de Laplace.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à l'élément de matière de volume  $d\tau$ , trouver une relation entre les vecteurs  $\vec{v}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$ .

Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère en négligent le terme  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et en déduire une deuxième relation entre  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  (équation (2))

Le champ magnétique total  $\vec{B}$  est la somme d'un champ initial  $\vec{B}_0$  uniforme et constant, et du champ  $\vec{b}$  créé par le mouvement des charges du plasma. On cherche des solutions des équations (1) et (2) de la forme :

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}_0 \exp i(\vec{k} \vec{r} - \omega t) \\ \vec{V} = \vec{V}_0 \exp i(\vec{k} \vec{r} - \omega t) \end{cases}$$

(Ondes magnétohydrodynamiques) où  $\vec{b}_0$  et  $\vec{V}_0$  sont des vecteurs indépendants de  $\vec{r}$  et  $t$ .

En traitant  $\vec{b}_0$  et  $\vec{V}_0$  comme des infiniment petits, et en ne conservant que les termes du premier ordre, former les deux équations vérifiées par  $\vec{b}_0$  et  $\vec{V}_0$ .

On suppose  $\vec{k}$  colinéaire à  $\vec{B}_0$ . Montrer que  $\vec{V}_0$  et  $\vec{b}_0$  sont perpendiculaires au vecteur  $\vec{k}$  et préciser leurs directions respectives. Former la relation de dispersion et calculer la vitesse de phase.

## **Chapitre II**

### **Résolution du Problème et Discussion**

# Chapitre 2

## Résolution du problème et discussion

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons résoudre le problème, en traitant les caractéristiques d'un plasma chaud magnétisé et en supposant que les particules composant le plasma satisfont aux équations électromagnétiques de Maxwell et aux équations de conservation. Ainsi l'étude des états d'équilibre d'un plasma magnétisé se déduit des équations de la MHD en considérant les hypothèses du champ magnétique potentiel ou sans-force, tel que le principe de base utilisé en MHD n'est autre que la loi fondamentale sur l'induction électromagnétique qui fut découverte par Faraday.

Puis, nous cherchons les solutions des équations obtenues, en déduisant la relation de dispersion.

## 2.2 Résolution du problème

### 2.2.1 Un milieu conducteur

Dans les milieux contenant des charges libres (électron dans les métaux, ions dans les électrolytes) l'application d'un champ électrique produit une force sur chacune des charges  $q$  suivant la relation (2.1)

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \quad (2.1)$$

Tel que chaque conducteur est caractérisé par une conductivité  $\sigma$  et une vitesse  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  de chaque élément de position  $\vec{r}$  à l'instant  $t$

#### Potentiel vecteur

Soit une région de l'espace où règne un champ d'induction magnétique variable  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  dérivant du potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ .

Selon la relation  $\text{div } \vec{B} = 0$  qui entraîne l'existence d'un vecteur  $\vec{A}$ , tel que :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (2.2)$$

#### Loi d'Ohm

La loi d'Ohm pour un conducteur en mouvement dans un champ magnétique dans le cas général est donnée par:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_m) \quad (2.3)$$

#### Relation entre vecteur densité de courant et le champ $\vec{E}_m$

Lorsqu'on néglige l'existence éventuelle du gradient de potentiel électrique, c'est à dire le courant n'est pas provoqué par un gradient de potentiel (pas par un champ macroscopique  $\vec{E}$ ). Le champ électrostatique devient nul car  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , alors  $\vec{j} = \sigma \vec{E}_m$  et le courant qui

sera crée est un courant électromoteur.

### Un conducteur parfait

C'est un milieu dont la conductivité tend vers l'infini  $\sigma \rightsquigarrow \infty$ .

Toujours en négligeant l'existence du gradient de potentiel ( $\vec{E}=\vec{0}$ ), alors :

$$\sigma \rightsquigarrow \infty \Leftrightarrow \vec{E}_m = \frac{\vec{j}}{\sigma} \text{ et donc } \vec{E}_m = 0$$

Si  $\vec{E}_m$  est nul, on obtient la relation qui lie  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  et qui s'écrit :

$$\vec{V} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Sachant que

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

alors:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Il vient donc :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2.6)$$

### 2.2.2 Plasma

Le plasma, appelé aussi le quatrième état de la matière, représente un ensemble d'atomes ou de molécules en partie ionisé ou en totalité. l'ensemble reste électriquement neutre.

La création d'un plasma nécessite un apport d'énergie important.

Puisque, dans un plasma, les effets des interactions individuelles peuvent être négligés devant les effets collectifs, il est donc possible de décrire la dynamique d'un plasma en supposant que les ions et les électrons, pris individuellement, se meuvent indépendamment dans des champs macroscopiques, lentement variables. Ces champs, créés ou modifiés par

l'ensemble de toutes les charges au cours de leurs mouvements, devons donc satisfaire aux équations de Maxwell et hydrodynamiques.[11]

### La relation fondamentale de la dynamique

Le plasma est supposé ici infiniment conducteur et parfaitement compressible si bien que chaque élément de matière n'est soumis qu'à la force de Laplace :

$$\frac{d \vec{f}_{Lapl}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (2.7)$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique on obtient :

$$\rho \frac{d \vec{V}}{dt} = \rho_0 \vec{g} - \vec{grad} p + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (2.8)$$

Sachant que le plasma est électriquement neutre ( $\rho_0 = 0$ ) alors :

$$\rho_0 \vec{g} \cong \vec{0}$$

Et pas de forces de pression c'est à dire :

$$\vec{grad} p. = 0$$

Donc on aura la relation qui lie  $\vec{V}, \vec{j}$  et  $\vec{B}$  :

$$\rho_0 \frac{d \vec{V}}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (2.9)$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère(iV) et en négligeant le terme  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , en obtient une deuxième relation qui lie  $\vec{V}, \vec{j}$  et  $\vec{B}$  :

$$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{rot}\vec{B} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

D'où :

$$\rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \vec{rot}\vec{B} \wedge \vec{B}$$

Alors il vient :

$$\mu_0 \rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} = - \vec{B} \wedge \vec{rot}\vec{B} \quad (2.10)$$

### Equation d'induction

L'équation d'induction met en évidence le couplage entre le champ magnétique  $\vec{B}$  et le champ de vitesse  $\vec{V}$  [17], elle est déduite à partir de l'équation d'Ohm . Dans le cas général

$$\vec{j} = \sigma \left( \vec{E} + \left( \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \right) \quad (2.11)$$

Où  $\sigma$  est la conductivité électrique du plasma.

D'après l'équation de Maxwell-Ampère  $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , nous en déduisons l'équation qui définit l'évolution du champ magnétique dans un plasma.

$$\vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{rot}\vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{rot}\vec{j}$$

$$\vec{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \left( \vec{rot}\vec{E} + \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \right)$$

$$-\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \left( \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \right)$$

Cela donne l'équation (2.12)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B} \quad (2.12)$$

Avec  $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$  le coefficient de diffusion magnétique,  $\mu$  : perméabilité magnétique.

Les deux termes qui figurent au deuxième membre de l'équation (2.15) décrivent deux mécanismes différents qui font évoluer  $\vec{B}$  en un point donné : le premier dépend de la vitesse du fluide, le second est proportionnel à la résistivité. On peut les appeler, pour des raisons qui vont être développées:

$$\vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B})$$

terme de convection.

$$\eta \Delta \vec{B}$$

terme de diffusion

Supposons d'abord que le terme de diffusion soit nul, ceci donne:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2.13)$$

Ce cas limite est obtenu en considérant  $\sigma$  infinie: pour que  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$  restent finis on doit avoir :

$$\vec{E} + (\vec{V} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

On en déduit que le champ magnétique est entraîné par la matière. Ce résultat a été annoncé par le physicien Suédois Hannes Alfvén en 1942.[6].

Il a résumé cela en disant que le champ magnétique et la matière constituent deux fluides gelés l'un dans l'autre. On se place alors dans le cadre de la MHD idéale.

Considérons maintenant le cas limite opposé où le deuxième mécanisme d'évolution de  $\vec{B}$  est dominant. L'équation (2.12) se réduit à:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{B} \quad (2.14)$$

Sous cette forme, on reconnaît l'analogie vectorielle de l'équation classique de diffusion.. Cette équation exprime le fait que toute perturbation locale de  $\vec{B}$  tend à s'atténuer par diffusion selon le schéma indiqué sur la figure ci-dessous:

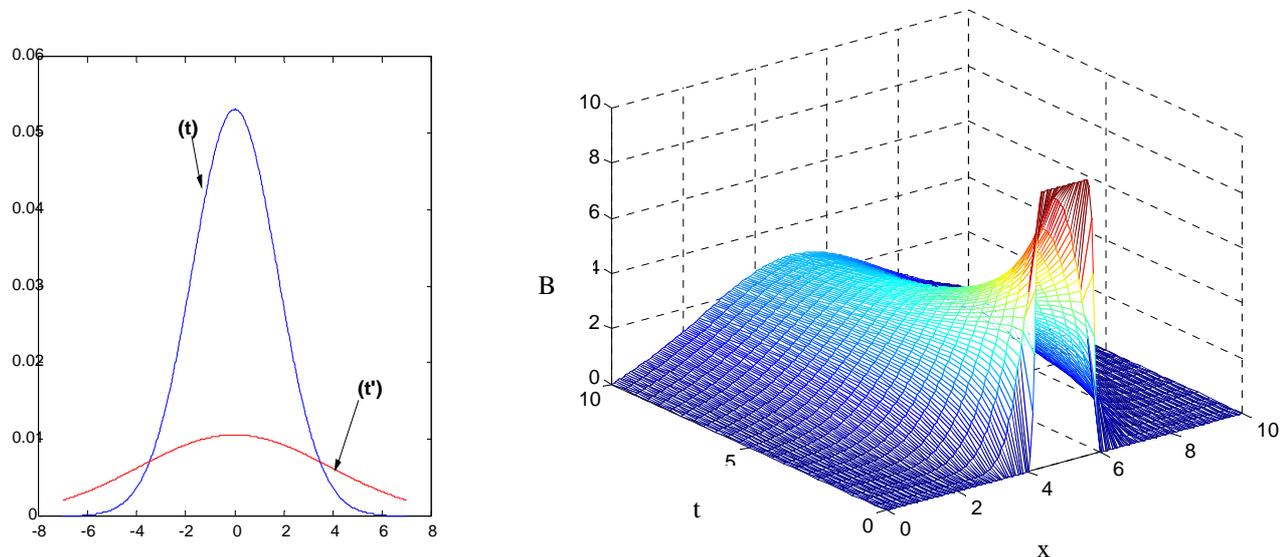


Figure.2.2: Diffusion du champ magnétique à travers un fluide ( $t > t'$ )

La vitesse de diffusion est inversement proportionnelle à la conductivité électrique.

Remarquons aussi que le phénomène de diffusion est indépendant de la vitesse du fluide qui ne figure plus dans la dernière équation.

Pour caractériser l'importance relative des deux termes, on forme le nombre sans dimension appelé le nombre de Reynolds magnétique:

$$R_B = \frac{Vl}{\eta} = \left[ \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} \right]$$

avec  $V$  la vitesse et  $l$  la longueur caractérisant l'écoulement.

Pour  $R_B \gg 1$  dans lequel la convection domine, c'est à dire on est dans le cadre de la MHD idéale où il existe un certain nombre de paramètre se conservant tels que le moment magnétique orbital  $\mu$  ou encore l'hélicité magnétique  $H_m$ . Cette dernière quantité donnée

par[9].

$$H_m = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Base de la Magnétohydrodynamique

Les équations de la MHD que nous utiliserons par la suite sont constituées des équations de Maxwell et des équations de conservation que nous résumons ci-dessous:[7]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} & \text{Loi d'Ampère} \\ E + v \times B = \begin{cases} 0 & \text{MHD idéal} \\ \eta j & \text{MHD résistive} \end{cases} & \text{Loi d'Ohm} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}) & \text{Equation d'induction} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 & \text{continuité} \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V} = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \vec{j} \wedge B & \text{Fluide(Newton)} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) = 0 & \text{Equation d'état} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Pour écrire ces équations, les hypothèses suivantes ont été appliquées:

- i) Le plasma est traité comme un fluide unique neutre;
- ii) Le plasma est considéré comme un milieu continu, c'est à dire que les échelles de longueur caractérisant l'évolution des grandeurs considérées (pression, densité,...) sont très grands devant les échelles de longueur interne au plasma comme le rayon de giration ionique;
- iii) Le plasma est en équilibre thermodynamique avec une fonction de distribution proche d'une Maxwellienne. Les temps caractéristiques d'évolution du plasma sont plus grandes que le libre parcours moyen ;
- iv) La viscosité est négligée. Les effets relativistes sont aussi négligés en supposant que les vitesses de propagation soient inférieures à la vitesse de la lumière.

## Nombre de Reynolds magnétique

Comme nous venons de voir, le nombre de Reynolds magnétique est un paramètre important qui détermine si le champ magnétique évolue dans le temps par convection ou par diffusion, ou bien par concurrence relative des deux.

Il peut s'avérer utile d'introduire d'autres nombres sans dimensions, qui par leur importance caractérisent et spécifient les phénomènes en jeu. Ainsi ces nombres permettent de justifier des simplifications sur le système d'équations fondamentales de la MHD afin de l'adapter au cas particulier qui nous intéresse.

**Le Beta du plasma:** Le Beta du plasma mesure le rapport des forces de pression aux forces magnétiques, il s'écrit :

$$Beta = \frac{p}{B^2/(2\mu)} = \frac{2c^2}{\gamma V_A^2}$$

Où  $c$ : vitesse du son dans le milieu considéré;

$V_A$ : vitesse d'Alfvén dans le milieu considéré.

Avec

$$c = \left( \frac{\gamma p}{\rho} \right)$$

Et

$$V_A = \frac{B}{(\mu_0 \rho)^{0.5}}$$

**Nombre de Reynolds** La valeur donnant le nombre de Reynolds est :

$$Re = \frac{Vl}{\varepsilon} = \frac{\text{convection}(\text{rot}(\vec{V}))}{\text{diffusion}(\text{rot}(\vec{V}))}$$

Avec  $\varepsilon$ : viscosité cinématique du fluide.

$R_e$  est analogue au nombre de Reynolds magnétique, il représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

**Nombre de Mach:**

$$M = \frac{V}{c}$$

Il existe d'autres nombres sans dimensions qui caractérisent le comportement du fluide étudié; mais les quatre nombres présentés plus haut sont les plus importants dans notre cas.

Les caractéristiques de milieu pour différentes valeurs de nombres sans dimensions sont:

- a) L'incompressibilité: cette approximation est valable pour  $M \ll 1$ .
- b) Le gel du champ dans le plasma c'est à dire que le champ magnétique évolue dans le temps par convection et ceci est vrai pour  $R_m \gg 1$ .
- c) La réaction du champ sur les mouvements: on trouve ici une variété de situations, selon les valeurs de Béta  $\beta$ :

\*Pour  $\beta \ll 1$ , toutes les forces sont négligeables devant la force magnétique, et alors l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \vec{0}$$

\*Entre les deux, où  $\beta \sim 1$ , les forces de pression et magnétiques sont de même ordre.

d) Turbulence: les valeurs élevées du nombre de Reynolds laissent prévoir que le milieu est turbulent.

e) Les valeurs élevées du nombre de Reynolds magnétique permettent de dire que le transport du champ magnétique  $\vec{B}$  se fait par convection.

f) A partir de ces considérations nous pouvons conclure que :

g) Le plasma considéré dans notre cas est compressible et nécessite que le nombre de Mach soit à valeurs élevées ( $M \gg 1$ ). Ainsi pour rester dans le cadre de la MHD, le champ magnétique devra évoluer dans le temps par convection, ce qui nécessite un nombre de

Reynolds  $\dot{R}_m$  élevé ( $\dot{R}_m \gg 1$ ).

### Conservation de l'énergie

A partir des équations de Maxwell dans le cadre de la MHD et l'équation du mouvement ( équation fluide des équations (2.16) ) nous dérivons une équation de conservation de l'énergie qui va satisfaire à une équation d'état adiabatique (les transformation se font sans échange de chaleur).

Pour un système isolé, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit comme:

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad (2.17)$$

Avec l'énergie totale donnée par:

$$W = \int \left[ \frac{1}{2} \rho |v|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|B|^2}{2\mu_0} \right] dV \quad (2.18)$$

On peut interpréter cette énergie totale de la manière suivante:

$$W = T + V$$

Avec l'énergie cinétique définie par:

$$T = \int \frac{1}{2} \rho |v|^2 dV$$

Et l'énergie potentielle  $V$  donnée par:

$$V = \int \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|B|^2}{2\mu_0} \right) dV$$

L'énergie potentielle contient un terme thermique  $\frac{p}{\gamma - 1}$  et un autre dû au champ mag-

nétique  $\frac{|B|^2}{2\mu_0}$

La loi de la conservation de l'énergie dans le cadre de la MHD idéale est utilisée dans l'étude de stabilité de configuration magnétiques pour le confinement du plasma.

#### 2.2.4 Equilibre magnétohydrostatique:

La MHD considère l'évolution temporelle et spatiale des différentes quantités telles que la densité ou le champ magnétique. Il est aussi intéressant d'étudier les variations lentes de ces paramètres (variations temporelles négligeables), c'est à dire de considérer que le plasma est en équilibre.

De l'équation fluide des équations (2.16) il en résulte que

$$\vec{0} = -\vec{grad}(p) + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (2.19)$$

C'est l'équation d'équilibre magnétohydrostatique entre le gradient de pression, la force de Lorenz et la force de gravité.

De l'équation (2.19), on peut déduire plusieurs cas simplifiés, dans le cas d'un plasma à faible ( $\beta \ll 1$ ), cette équation se réduit à:

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad (2.20)$$

Ce qui implique que le vecteur densité de courant est colinéaire au vecteur champ magnétique. Le champ magnétique vérifiant cette équation est appelé un champ sans-force. Dans le cas où la densité de courant est nulle, le champ magnétique est appelé un champ sans courant ou potentiel (Voir Annexe1)[5].

## 2.3 Linéarisation des équation MHD, ondes MHD

Nous restreindrons l'étude d'un plasma homogène infini soumis à un champ magnétique  $B_0$  avec une pression cinétique  $p_0$ , une densité  $\rho_0$  et sans gravité. Dans un tel plasma, trois types d'ondes existent: l'onde d'Alfven et les ondes magnétoacoustiques lentes et rapides. Ces ondes sont appelées les ondes MHD. Les vitesses caractéristiques de ces ondes sont la vitesse d'Alfven et la vitesse du son.

Le mode d'Alfven est dû aux forces de tension[2] (vitesse d'Alfven) et n'est pas associé à des perturbations de pression ou de densité. Les perturbations de vitesse ou de champ magnétique sont transverses à et au vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Dans le cas d'un champ magnétique incliné par rapport au vecteur d'onde, les mouvements des ondes d'Alfven sont perpendiculaires au plan défini par  $\vec{B}_0$  et  $\vec{k}$ .

Les modes magnétoacoustiques lents et rapides sont associés à des perturbations de tension (vitesse d'Alfven) et de pression (vitesse du son). Le mode lent ne se propage pas lorsque  $\vec{B}_0$  et  $\vec{k}$  sont perpendiculaires.

Un développement plus général des ondes MHD est nécessaire pour satisfaire aux conditions solaires.

En particulier, il est important de tenir compte des variations de densité et de champ magnétique (plasma non homogène et non isotrope), des ondes existantes aux interfaces entre deux plasmas distincts, ou de la gravité. Malheureusement la complexité de ces problèmes oblige à se restreindre à des cas plus simples.

### 2.3.1 Linéarisation:

Nous allons linéariser le système (2.16), en supposant de petites perturbations d'un équilibre pour un plasma uniforme et avec une vitesse fluide nulle à l'équilibre.[17]

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t) \\ \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1(\vec{r}, t) \\ p = p_0 + p_1(\vec{r}, t) \\ \rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

l'indice(0):indique l'état d'équilibre.

L'indice(1) est réservé aux perturbations qui sont petites devant les quantités à l'état d'équilibre.

Il reste à substituer ces grandeurs perturbées dans les équations de la MHD. En négligeant le produit des termes représentant les perturbations, et en exploitant les équations de la magnétohydrostatique, Ainsi en appliquant les conditions initiales suivantes:

$$V_0 = 0, p_0 = const, \rho_0 = const, B_0 = const, j_0 = 0$$

On aura :

a) Pour l'équation de continuité de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t))}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{V}_1(\vec{r}, t)) = 0$$

Sachant que:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

alors on aura:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \cdot \vec{V}_1) = 0 \quad (2.22)$$

b) Pour l'équation de mouvement:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V} = \rho \vec{g} - \nabla p + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

En substituant les grandeurs perturbées on aura:

$$\left(\rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_1(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{V}_1(\vec{r}, t) = -\nabla \left(p_0 + p_1(\vec{r}, t)\right) + \vec{j} \wedge \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)\right)$$

Et :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\nabla p_1(\vec{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}_1\right) \times \vec{B}_0 \quad (2.23)$$

c) Pour l'équation d'induction:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{V} \times \vec{B}\right)$$

On aura

$$\frac{\partial \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)\right)}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{V}_1(\vec{r}, t) \times \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)\right)\right)$$

et

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{V}_1 \times \vec{B}_0\right) \quad (2.24)$$

d) pour l'équation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p = \frac{\gamma p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho\right)$$

On a

$$\frac{\partial (p_0 + p_1)}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} (p_0 + p_1) = \frac{\gamma (p_0 + p_1)}{(\rho_0 + \rho_1)} \left(\frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} (\rho_0 + \rho_1)\right)$$

et

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} p_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} \rho_0\right) \quad (2.25)$$

### 2.3.2 Dérivation de l'équation d'onde linéarisée

Le champ magnétique total  $\vec{B}$  est la somme d'un champ initial  $\vec{B}_0$  uniforme et constant et du champ  $\vec{b}$  crée par le mouvement des charges du plasma.

Les équations (2.6) et (2.5) ont des solution de la forme

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}_0 \exp j(\vec{k} \vec{r} - wt) \quad (2.26)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \exp j(\vec{k} \vec{r} - wt) \quad (2.27)$$

Où  $\vec{b}_0$  et  $\vec{V}_0$  sont indépendants de  $\vec{r}$  et  $t$

En traitant  $\vec{b}_0$  et  $\vec{V}_0$  comme infiniment petits et ne conservant que les termes du premier ordre, on a

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{rot} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (2.28)$$

$$\mu_0 \rho_0 \frac{d \vec{V}}{dt} = - \vec{B} \wedge \vec{rot} \vec{B} \quad (2.29)$$

Sachant que

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad (2.30)$$

et on remplace l'équation (2.30) dans (2.28) on aura :

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{rot} (\vec{V} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{b}))$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{rot} ((\vec{V} \wedge \vec{B}_0) + (\vec{V} \wedge \vec{b}))$$

Où  $(\vec{V} \wedge \vec{b}) = \vec{0}$  car il est du deuxième ordre

Alors

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \vec{rot} (\vec{V} \wedge \vec{B}_0) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}_0) \quad (2.31)$$

Et

$$\mu_0 \rho_0 \frac{d \vec{V}}{dt} = - (\vec{B}_0 + \vec{b}) \wedge \vec{rot} (\vec{B}_0 + \vec{b})$$

Où

$$\vec{rot} \vec{B}_0 = \vec{0}$$

Alors, on aura

$$\mu_0 \rho_0 \frac{d \vec{V}}{dt} = - \vec{B}_0 \wedge \vec{rot} \vec{b} \quad (2.32)$$

Utilisant les solutions (2.26) et (2.27), tel que  $\frac{\partial}{\partial t} = -jw$  et  $\vec{\nabla} = j \vec{k}$

Alors les équations (2.27) et (2.28) se réécrivent sous la forme suivante:

$$-w \vec{b}_0 = \vec{k} \wedge (\vec{V}_0 \wedge \vec{B}_0) \quad (2.33)$$

$$\mu_0 \rho_0 w \vec{V}_0 = \vec{B}_0 \wedge (\vec{k} \wedge \vec{b}_0) \quad (2.34)$$

Supposant que le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est colinéaire à  $\vec{B}_0$ , alors  $\vec{V}_0$  et  $\vec{b}_0$  sont perpendiculaires à  $\vec{k}$ .

$\vec{b}_0 \perp \vec{k}$ , car  $\vec{b}_0 = \vec{k} \wedge \vec{V}$  et  $\vec{V}$  c'est le vecteur résultant qui est perpendiculaires aux deux vecteurs  $(\vec{V}_0 \wedge \vec{B}_0) = \vec{V}$ , et de même pour  $\vec{V}_0$ ,

Tanque  $\vec{k}$  est colinéaire à  $\vec{B}_0$ , alors ils sont portés par le même support et le même vecteur unitaire.

Donc

$$\vec{k} = k \vec{z}$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{z}$$

Si on remplace ces deux relations dans l'équation (2.27) et (2.28) on aura la relation de dispersion:

$$\begin{aligned} \vec{k} \wedge (\vec{V}_0 \wedge \vec{B}_0) &= k \vec{z} \wedge (\vec{V}_0 \wedge B_0 \vec{z}) \\ &= k B_0 \vec{z} \wedge (\vec{V}_0 \wedge \vec{z}) \\ &= k B_0 \vec{z} \wedge (V_{01} \vec{i} \wedge \vec{z} + V_{02} \vec{j} \wedge \vec{z} + V_{03} \vec{z} \wedge \vec{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= kB_0 \vec{z} \wedge (V_{01} \vec{j} - V_{02} \vec{i}) \\
&= kB_0 \vec{V}_0
\end{aligned}$$

Finalement :

$$-w \vec{b}_0 = kB_0 \vec{V}_0$$

On fait même calcul , il vient que :

$$\vec{B}_0 \wedge (\vec{k} \wedge \vec{b}_0) = -kB_0 \vec{b}_0$$

On substitue ce résultat dans l'équation (2.31) on aura

$$\mu_0 \rho_0 w \vec{V}_0 = -kB_0 \vec{b}_0$$

Nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{kB_0} \vec{V}_0 &= \frac{-1}{\mu_0 \rho_0 w} \vec{b}_0 \\
\frac{1}{kB_0} \vec{V}_0 &= \frac{-1}{\mu_0 \rho_0 w} \frac{-kB_0 \vec{V}_0}{w}
\end{aligned}$$

Cela donne la relation de dispersion:

$$w^2 - \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0 \rho_0} = 0 \quad (2.35)$$

Pour avoir la relation de dispersion dans le cas générale, On dérive par rapport au temps, l'équation de mouvement, sachant que les grandeurs à l'équilibre ne dépendent pas du temps.

Tel que en remplaçant  $p_1$  par:

$$p_1 = c_S^2 \rho_1$$

Tel que  $p_1$  c'est la perturbation adiabatique et  $c_S$  :la vitesse du son adiabatique (les

transformation se font sans échange de chaleur)

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} &= -\nabla c_S^2 \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \times \frac{\partial B_1}{\partial t} \right) \times B_0 \\
&= -\nabla c_S^2 (-\rho_0 \nabla V_1) + \frac{1}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \left( \vec{V}_1 \times B_0 \right) \right) \times B_0 \right) \\
\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} &= c_S^2 \nabla \cdot (\nabla \cdot V_1) + \left( \nabla \times \left( \nabla \times \left( V_1 \times \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \right) \times \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \\
\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} &= c_S^2 \nabla \cdot (\nabla \cdot V_1) + (\nabla \times (\nabla \times (V_1 \times V_A)) \times V_A)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Tel que  $V_A$  c'est la vitesse d'Alfven

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$$

Dans un milieu linéaire, homogène

$$V_1 = \exp(i(k \cdot x - wt))$$

La relation (2.35) sera réécrit comme suit:

$$w^2 V_1 = (c_S^2 + V_A^2) (k \cdot V_1) k + V_A \cdot k [(V_A \cdot k) V_1 - (V_A \cdot V_1) k - (k \cdot V_1) V_A] \tag{2.37}$$

On peut avoir la relation (2.35), si on suppose que

$$\nabla \cdot V = 0 \Rightarrow k \cdot V_1 = 0$$

$$\nabla \cdot B_1 = 0 \Rightarrow k \cdot B_1 = 0$$

### 2.3.3 Ondes Magnétohydrodynamiques

#### Ondes d'Alfven

La propagation des ondes d'Alfven se fait dans le cas où  $V_1 \perp (V_A, k)$ , alors la relation de dispersion (2.37) sera

$$w = \pm V_A k \cos \theta$$

Les ondes d'Alfven peuvent être décrites, on considérant les tubes de forces comme des cordes vibrantes par la tension magnétique  $T_m$  chargé par la matière entraînée par convection, tel que on peut les appeler aussi onde d'Alfven non-compressionnelle puisqu'il n'y a pas de perturbation de densité ( $\rho_1 = 0$ ).

La vitesse de propagation  $V_A$  est donnée par la formule classique des cordes vibrantes.

$$V_A = \left( \frac{T_m}{\rho} \right)^{0.5} = \frac{B_0}{(\mu\rho)^{0.5}}$$

Avec :

$$T_m = \frac{B_0^2}{\mu}$$

Des valeurs typiques de cette vitesse sont:

#### Magnetosphère:

$$V_A \sim \frac{5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1.7 \cdot 10^{-27} \times 10^6 \times 4\pi \cdot 10^{-7}}} \sim 10^6 \text{ m/s}$$

#### Tokamak:

$$V_A \sim \frac{3}{\sqrt{1.7 \cdot 10^{-27} \times 10^{20} \times 4\pi \cdot 10^{-7}}} \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Ainsi la vitesse de phase des ondes d'Alfven sera donnée par :

$$V = \frac{w}{k} = \pm V_A \cos(\theta) \quad (2.38)$$

### Champ magnétique incliné par rapport au vecteur d'onde.

Si le champ magnétique est incliné par rapport au vecteur d'onde c'est à dire  $(V_A, k) = \theta$ , la relation de l'équation de dispersion donne trois équations scalaires dont une la solution de l'équation d'Alfven, tandis que les deux autres décrivent les ondes magnétoacoustiques lentes et rapides.

$$V_{ph}^2 = \begin{cases} (V_A \cos \theta)^2 \\ \frac{1}{2} (c_S^2 + V_A^2) \pm \frac{1}{2} [(c_S^2 + V_A^2) - 4c_S^2 V_A^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \end{cases} \quad (2.39)$$

Tel que le mode d'Alfven est dû aux forces de tension, cependant les modes magnétoacoustiques lentes et rapides sont associés à des perturbations de tension et de pression. Les figures (2.3) et (2.4) sont obtenues à partir des relations de dispersion(2.38) et (2.39). Elles montrent l'évolution de vitesses de phase pour chaque mode en fonction de l'angle entre  $k$  et  $B_0$ , pour deux cas, quand  $V_A > V_S$  et  $V_A < V_S$ .

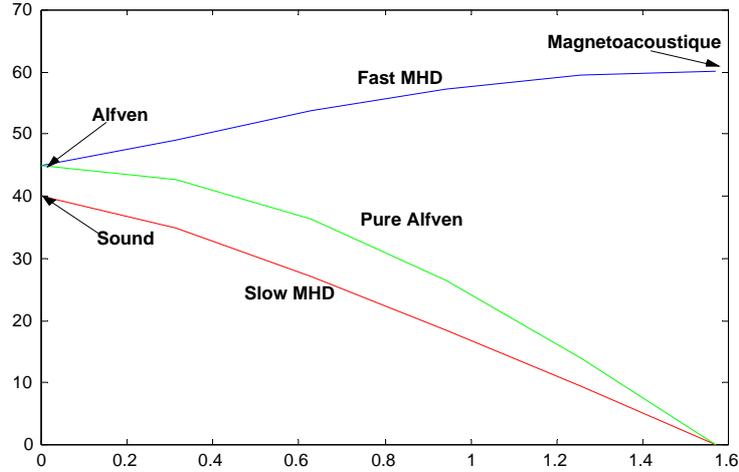


Figure 2.3: Représentation des vitesses de phase des modes magnétoacoustiques Fast, Slow et du mode d'Alfven pour  $V_A > V_S$

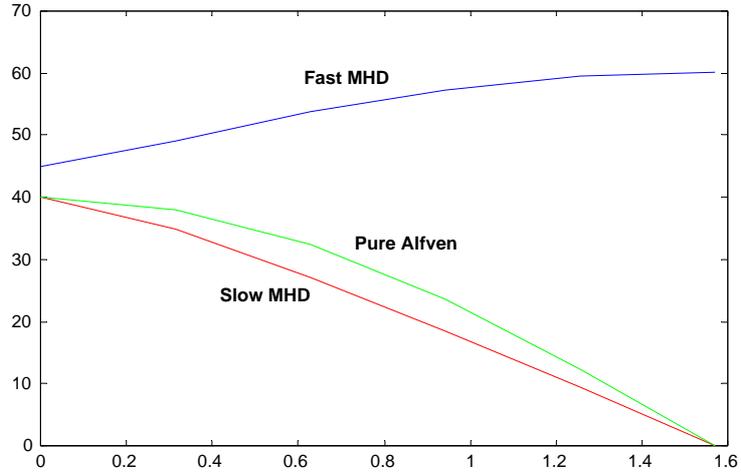


Figure.2.4: Représentation des vitesses de phase des modes magnétoacoustiques Fast, Slow et du mode d'Alfvén pour  $V_A < V_S$

On remarque que ,si  $V_A > V_S$  c'est à dire la vitesse du mode d'Alfvén est supérieure à celle de la vitesse du son, le mode rapide des ondes MHD devient un mode d'Alfvén pour  $\theta = 0$  et des ondes magnétoacoustiques pour  $\theta = 90^0$  , Tandis que le mode slow des ondes MHD devient un mode des ondes sonores pour  $\theta = 0$  et n'existe pas pour  $\theta = 90^0$  .D'autre par si  $V_S > V_A$  ,le mode fast des ondes MHD devient un mode des ondes sonores pour  $\theta = 0$  ,et des ondes magnétoacoustiques pour  $\theta = 90^0$  , tandis que le mode lent devient un mode d'Alfvén pour  $\theta = 0$  , et n'existe pas pour  $\theta = 90^0$  .

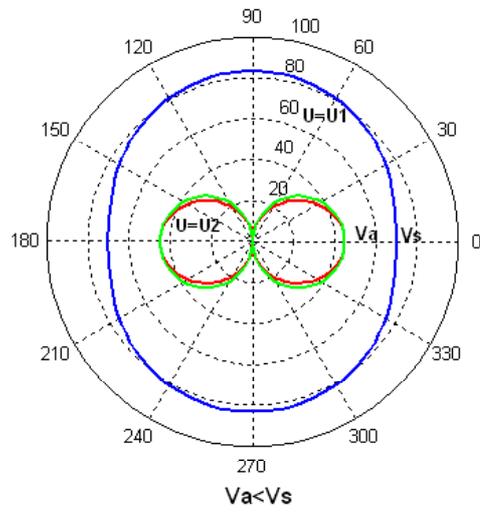


Figure.2.5.a

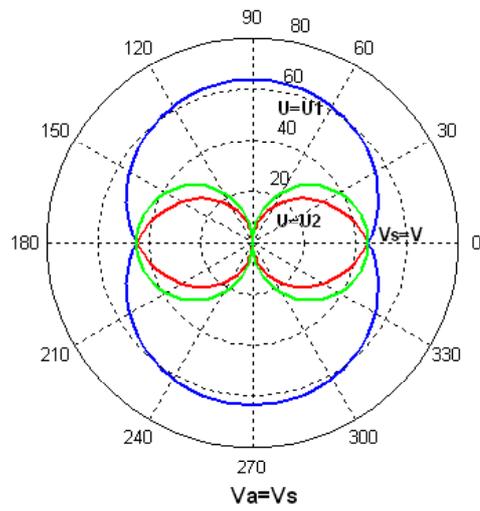


Figure.2.5.b

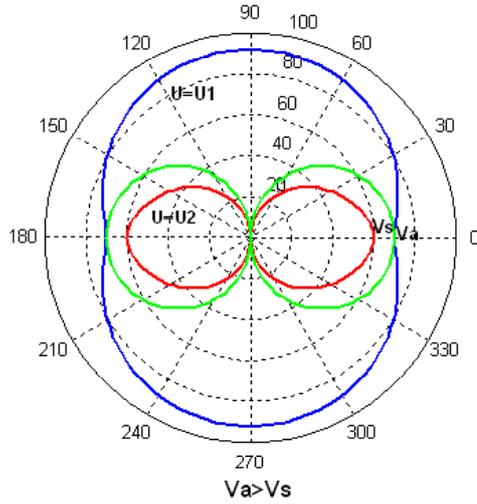


Figure.2.5.c

Les figures(2.5.a,b et c):Représentation en coordonnées polaires des vitesses de phase des modes magnéto-acoustiques Fast,Slow et du mode d'Alfven pour différentes valeurs de

$$V_A$$

$$\text{Tel que } U_1 \succ \max(V_A, V_S), U_2 \prec \min(V_A, V_S)$$

Les figures (2.5.a,b et c) indiquent les diagrammes des ondes normales pour la propagation du mode d'Alfven, et des ondes magnétoacoustiques lentes et rapides,pour deux cas  $V_A > V_S$  et  $V_A < V_S$  . La surface normale des ondes correspondant aux ondes rapides de MHD est une surfacelisse (smooth) fermé enfermant les deux sphères passant par l'origine  $O$  correspondant à l'onde d'Alfven. Dans chacune de ces sphères il y a une autre surface normale des ondes fisses et fermée correspondant à l'onde lente de MHD.

## 2.4 Discussions des résultats

### 2.4.1 Les ondes MHD dans la structure coronale

**Les ondes MHD dans la structure coronale. Aspets théorique.**

Les propriétés des ondes MHD dépendent de l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique, en conséquence elles suivent la direction du champ, tel que si ce dernier n'est pas droit, les ondes d'Alfven lentes et rapides devraient suivre le champ parce qu'elles sont confinées au champ. D'ailleurs, même lorsque le champ est droit, les inhomogénéités dans la valeur absolue, la densité et la pression du champ affectent les vitesses caractéristiques des ondes et par conséquent, affectent les ondes. Ceci mène à un certain nombre de phénomènes très intéressants comme la propagation guidée des ondes MHD, l'accouplement linéaire de différentes ondes MHD, le mélange de phase des ondes d'Alfven, l'absorption résonnante...etc.

Considérant une inhomogénéité unidimensionnelle statique de plasma, caractérisé par densité de plasma  $\rho_0$ , pression  $p_0$ , et le champ magnétique  $B_0 e_z$  qui sont des fonctions de la coordonnée transversale  $x$ . les lignes du champ magnétique sont droites. [10] [19]

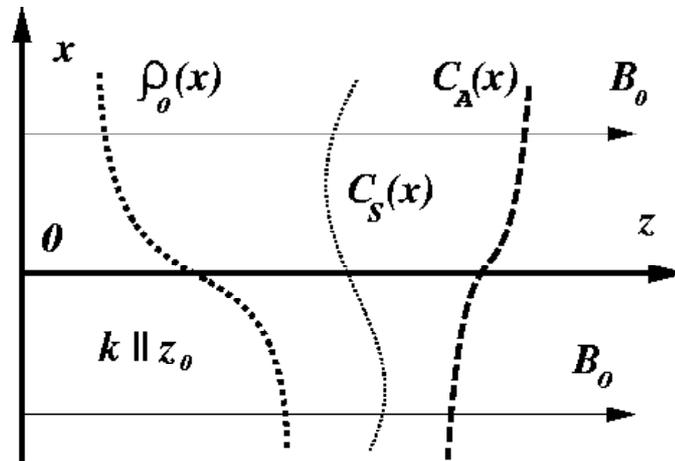


Figure.2.6.

L'équilibre total de pression doit être préservé partout,

$$p_{total}(x) = p_0(x) + \frac{B_0^2(x)}{8\pi} = const \quad (2.40)$$

Cette condition empêche la génération des flux stationnaires dans l'état stationnaire. Les paramètres stationnaire de plasma déterminent les vitesses caractéristiques des ondes MHD.

La vitesse d'Alfven :

$$V_A(x) = \frac{\sqrt{B_0(x)}}{4\pi\rho_0(x)} \quad (2.41)$$

La vitesse du son:

$$V_S(x) = [\gamma \cdot p_0(x) / \rho_0(x)]^{1/2} \quad (2.42)$$

La vitesse de tube:

$$V_T(x) = \frac{V_S V_A}{(V_S^2 + V_A^2)^{1/2}} \quad (2.43)$$

Notant que la vitesse de tube apparaît dans le cas homogène aussi, c'est la valeur limite pour la vitesse lente de paquet d'onde quand l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Nous pouvons exécuter la transformation de Fourier dans les deux directions homogènes  $z$  et  $y$  et considérons la perturbation sous la forme:

$$\psi(x) \exp(i\omega t - ik_y y - ik_z z)$$

Appliquant quelque certains conditions aux limites à  $x$  et déterminant la structure transversale  $\psi(x)$  des ondes, nous obtenant les relations de dispersion.

$$D(\omega, k_y, k_z, [B_0(x), \rho_0(x) \text{ et } p_0(x)]) = 0 \quad (2.44)$$

Limitons notre attention seulement aux processus du plan  $(x, z)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ , mais considérons  $V_y, B_y \neq 0$ , nous obtenons deux modes linéairement découplés de MHD : l'onde d'Alfven (perturbation  $V_y, B_y \neq 0$ ), et magnétoacoustiques (perturbant  $V_x, V_z, B_x, B_z, \rho =$

0).

Tel que les ondes MHD sont décrites par l'équation suivante:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\varepsilon(x)}{m_0^2(x)} \frac{dV_x}{dx} \right] - \varepsilon(x)V_x = 0 \quad (2.45)$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \rho_0(x) [\omega^2 - k_z^2 V_A^2(x)] \\ m_0^2(x) &= \frac{(k_z^2 V_S^2 - \omega^2)(k_z^2 V_A^2 - \omega^2)}{(V_S^2 + V_A^2)(k_z^2 V_T^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

### Guides d'ondes magnétoacoustiques rapides réfringents.

considérons maintenant le cas de l'inhomogénéité irrégulière. Quand  $V_S \ll V_A$  ( $\beta \ll 1$ , qui est typique pour la couronne) nous pouvons mettre  $V_S = 0$  et de manière significative simplifier la description des ondes rapides. Dans ce cas, la condition (2.40) sera simplifiée pour  $B_0 = \text{const}$ , ainsi pour un champ magnétique droit et homogène le profil de la densité de plasma  $\rho_0(x)$  n'est pas relié à toute conservation d'équilibre de pression et par conséquent arbitraire. Ainsi, pour un  $B_0$  donné, le profil de la vitesse d'Alfvén est prescrit seulement par le profil  $\rho_0(x)$ .

L'équation (2.45) réduit à:

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{V_A^2(x)} - k^2 \right) V_x = 0 \quad (2.46)$$

$$V_x(x \rightarrow \pm\infty) = 0 \quad (2.47)$$

Les fonctions propres  $V_x(x)$  définissent la structure transversale des modes d'inhomogénéité. Les valeurs propres correspondantes se relient  $\omega$  et  $k$  par des relations de dispersion. L'équation (2.46) identifie le problème mécanique de quantum pour déterminer le comportement des particules dans un puits de potentiel (l'équation stationnaire de Schrödinger). Selon le théorème d'oscillation, l'inhomogénéité a considéré les ondes magnétoacoustiques

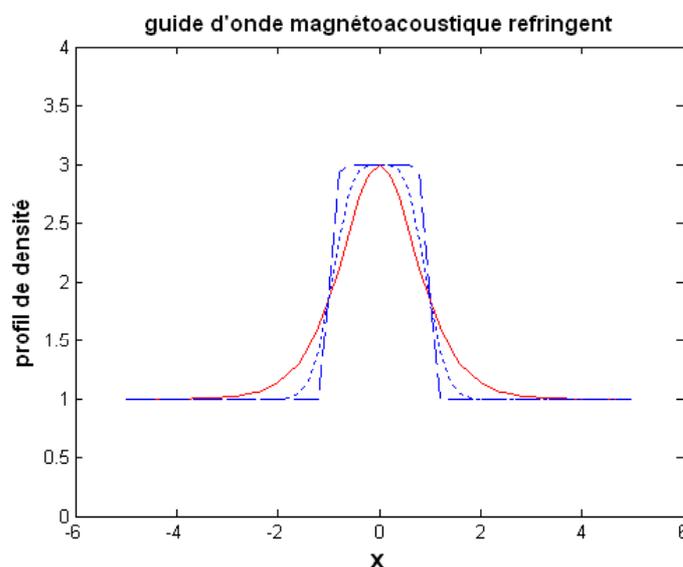
rapides comme des guides d'ondes au voisinage d'un minimum de la vitesse d'Alfven, correspondant à un maximum de densité de plasma pour des valeurs basses de  $\beta$  de plasma (figure ci-dessous).

Pour plusieurs profils spéciaux de  $V_A(x)$ , le problème des valeurs propres (2.46), (2.47) peuvent être résolu analytiquement.

Un profil commode de  $\rho_0(x)$  a été suggéré par Nakariakov et Robert (1995) [18]:

$$\rho(x) = \rho_\infty + (\rho_0 - \rho_\infty) \operatorname{sech} h^2 \left[ \left( \frac{|x|}{d} \right)^p \right], \quad p \geq 0 \quad (2.48)$$

Ce qui donne une structure de densité irrégulière de  $\rho_0$  pour  $x = 0$  à  $\rho_\infty$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ .



Figure(2.7): Le profil correspondant de la vitesse d'Alfven  $V_A(x)$  à une valeur minimum  $V_{A0}$  à  $x = 0$  et croit jusqu'à  $V_{A\infty}$  à l'infini.

Le profil (2.48) est très important parcequ'il possède deux cas de limitation analytiquement solubles:  $p \rightarrow \infty$  et  $p = 1$ , qui est les cas du profil d'étape, a discuté dans la section précédente, et le profil symétrique d'Epstein. Pour une puissance arbitraire  $p$ , le problème des valeurs propres (2.46), (2.47) exige des méthodes numériques.

Dans le cas où le  $\beta$  du plasma égal à zéro, les ondes magnétoacoustiques rapides propa-

gent isotropiquement, en respectant le champ magnétique avec la vitesse d'Alfven. En présence d'inhomogénéité, les ondes sont soumises à la réfraction-les fronts d'ondes tournent vers des régions avec une plus petite vitesse locale d'Alfven  $V_A(x)$ . En conséquence, la région avec une valeur minimale de la vitesse d'Alfven est un guide d'onde magnétoacoustique rapide réfringent.

### Mélange de phase des ondes d'Alfven (phase mixte)

C'est un mécanisme de dissipation dû à l'inhomogénéité du plasma, il permet de former rapidement des gradients de petite échelle. Ces gradients sont créés dans des régions suffisamment inhomogènes par des ondes d'Alfven qui se propagent le long de lignes de champ parallèles à des vitesses différentes. Ces ondes peuvent aussi perdre leur énergie par des instabilités secondaires de type Kelvin-Helmholtz ou Tearing ou par couplage non-linéaire avec d'autres ondes. [18] [21]

Dans le cas de l'inhomogénéité de l'alignement du champ de 1D, les ondes d'Alfven sont décrites par l'équation d'onde:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_A^2(x) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_y = 0 \quad (2.49)$$

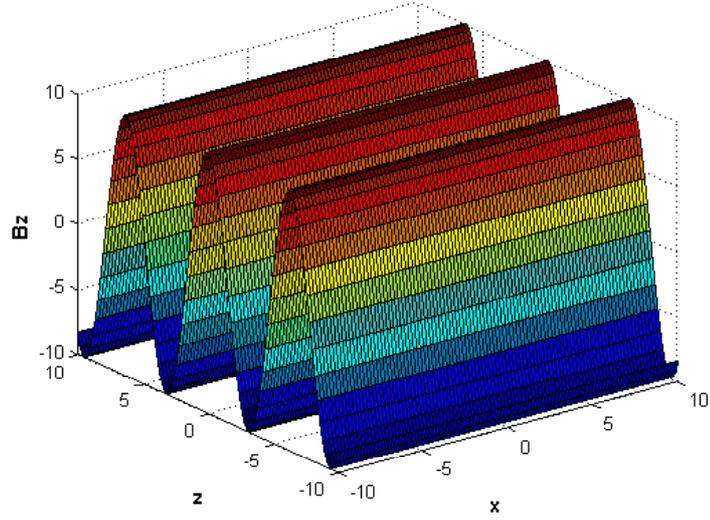
Avec la solution

$$V_y = \psi(x) f(z \mp V_A(x)t) \quad (2.50)$$

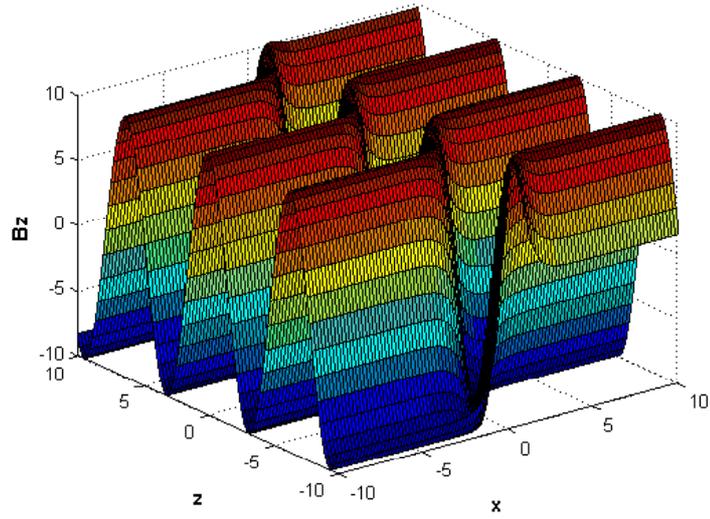
Là où  $f(z)$  et  $\psi(x)$  sont des fonctions prescrites par le profil initial de l'onde. Le signe de l'argument de cette fonction correspond à une onde propageant respectivement dans la direction positive ou négative de l'axe des  $z$ . Quand  $\psi(x) = const$ , l'onde est plane.

Considérons l'évolution de l'onde d'Alfven plane ( $t = 0$ ) sur une interface magnétique irrégulière avec le profil  $V_A(x) = 1 + \tanh x$  :

l'evolution d'une d'Alfvne plane sur une interface magnétique irrégulière pour t=0



l'evolution d'une d'Alfvne plane sur une interface magnétique irrégulière pour t=2



l'evolution d'une d'Alfvne plane sur une interface magnétique irrégulière pour t=4

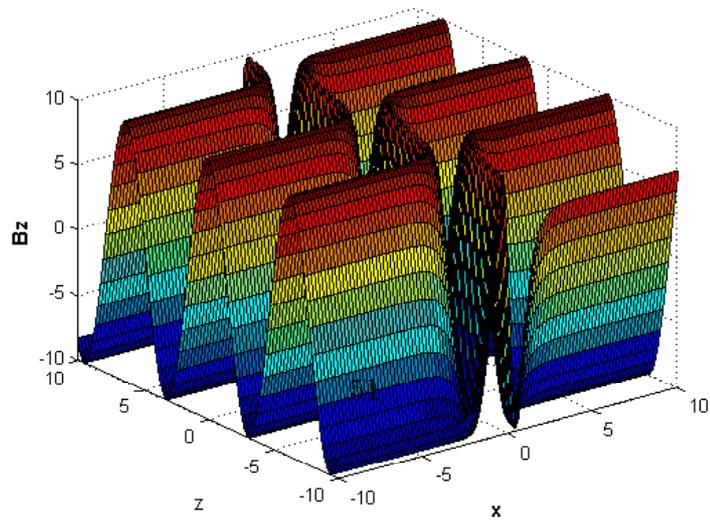


Figure.2.8: propagation des ondes d'Alfvén sur différentes surfaces magnétiques

On remarque que Les ondes d'Alfven propagent sur différentes surfaces magnétiques avec différentes vitesses, ainsi si l'onde est commencement plane dans la direction des  $x$ , elle devient graduellement inclinée est cela est dû à l'inhomogénéité de l'alignement du champ. Ainsi on conclut que dans un certain temps, les perturbations de différentes surfaces magnétiques deviennent non-corrélative avec l'un l'autre. L'onde d'Alfven ne peut pas se propager à travers le champ magnétique (dans la direction des  $x$ ),

$$k_z = \text{const}, \quad k_x \rightarrow \infty \quad (2.51)$$

c'est l'effet de mélange de phase des ondes d'Alfven .

## 2.5 Conclusion

-La linéarisation des équations de la MHD nous donne une relation de dispersion, permet de déterminer les trois types de modes existé dans un plasma magnétisé.

-Ainsi, nous avons utiliser la relation de dispersion déduite à partir des équations de la MHD aux boucles coronales, où nous avons conclut que les ondes MHD Jouent un rôle important pour le confinement du plasma, alors la MHD nous donne une idée sur la géométrie du plasma

-Les ondes MHD peuvent jouer un rôle important dans le chauffage de la couronne et cela est dû à la dissipation d'onde qui peut être reliée aux effets de mélange de phase et à l'absorption résonnante.

-Pour étudier la dynamique des ondes MHD dans la couronne, il faut prendre en considération les effets d'inhomogénéité des structures.

## **Chapitre III**

**Production d'Energie Electrique par**

**Confinement Magnétique d'un Plasma**

**dans un Tokamak**

# Chapitre 3

## Production d'énergie électrique par confinement magnétique d'un plasma dans un tokamak

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une application moyennant les équations de la MHD, qui sont un outil très puissant pour pouvoir contrôler le confinement magnétique des plasmas dans un tokamak. Un bon confinement représente une condition nécessaire et importante pour la production de l'énergie électrique qui est dû au phénomène de fusion thermonucléaire. L'étude de confinement exige la détermination de l'état d'équilibre, pour cela nous utilisons les équations de la MHD idéale (voir Annexe3). La résolution de ce système d'équation assorti des conditions aux limites adéquates, conduit à l'équation de Grad Shafranov. Sa résolution se fait dans un espace orthogonal où elle se réduit à un Laplacien.[13] [19].

Il est difficile de résoudre de telles équations numériquement. Pour cela nous proposons un modèle mathématique car l'équilibre d'un plasma confiné dans un tokamak, peut se traduire par l'étude d'un problème à frontière libre.

## 3.2 Confinement d'un plasma

Il existe principalement trois manières de confiner un plasma et le choix de la manière n'est qu'une question de taille. La plus connue et la plus efficace est le confinement gravitationnel qui permet aux étoiles, et plus particulièrement au soleil d'exister. Mais ce genre de confinement, dû à la nature de la force gravitationnelle, ne peut être efficace qu'à grande échelle et n'est donc pas utilisable à l'échelle humaine. Il reste donc deux possibilités : le confinement inertiel qui exploite le temps fini de l'accélération des particules autrement dit leur inertie, ou le confinement magnétique qui comme son nom l'indique exploite les forces électromagnétiques.[14]

### 3.2.1 Confinement magnétique

Le champ magnétique peut agir sur des particules chargées en mouvement et cela peut donner un moyen de les confiner dans un plasma.

#### Interaction d'une particule chargée avec un champ électromagnétique

Le champ magnétique agit sur une particule via la force de Lorentz:

$$F = qv \times B \tag{3.1}$$

Seules les composantes du vecteur de vitesse perpendiculaires au champ donnent lieu à une force. Cette force est perpendiculaire à la vitesse elle-même, où la particule sera accélérée avec une accélération constante, et elle exécutera un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique dont elle sera parfaitement confinée dans ce plan. Or, dans la direction parallèle au champ, la particule ne subit aucune force et ne reconnaît même pas l'existence du champ. La particule ne sera donc pas confinée dans la direction du champ. Le mouvement total sera la somme d'un mouvement rectiligne sans accélération, superposé à un mouvement circulaire, et donc résultant en un mouvement en hélice.

On peut voir dans la figure ci-dessous le mouvement d'une particule chargée autour d'une ligne de champ magnétique droite, tel que la particule décrit une hélice autour de la ligne de champ, qui suit le centre-guide de la trajectoire.

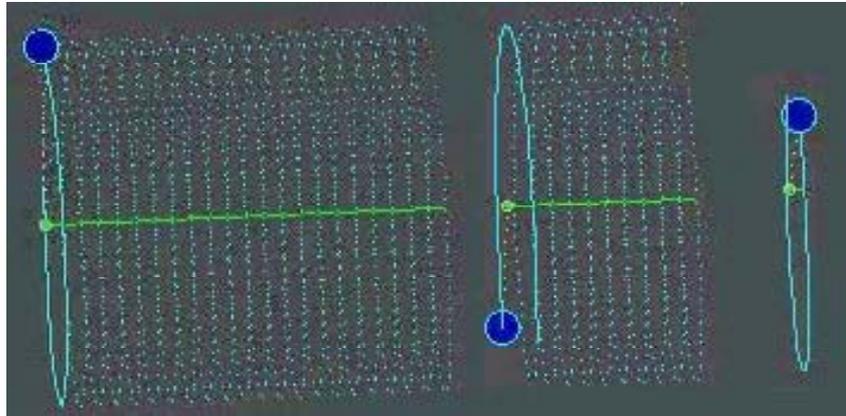


Figure.3.1

Le mouvement circulaire est caractérisé par son rayon de Larmor qui est donné par la relation suivante:

$$\rho_L = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

Ainsi la fréquence de rotation ou giration s'appelle la fréquence cyclotronique et dépend que de la charge et de la masse:

$$\omega_c = v_{\perp}/\rho_L$$

Tel que le rayon de larmor dépend de l'intensité de champ magnétique, de la masse et de la charge de la particule, et de son énergie. Plus le champ magnétique est puissant, plus le rayon de larmor est faible. La particule restant scotchée au voisinage de la ligne de champ.

On se trouve alors dans une configuration où la direction du champ magnétique est purement toroïdale.

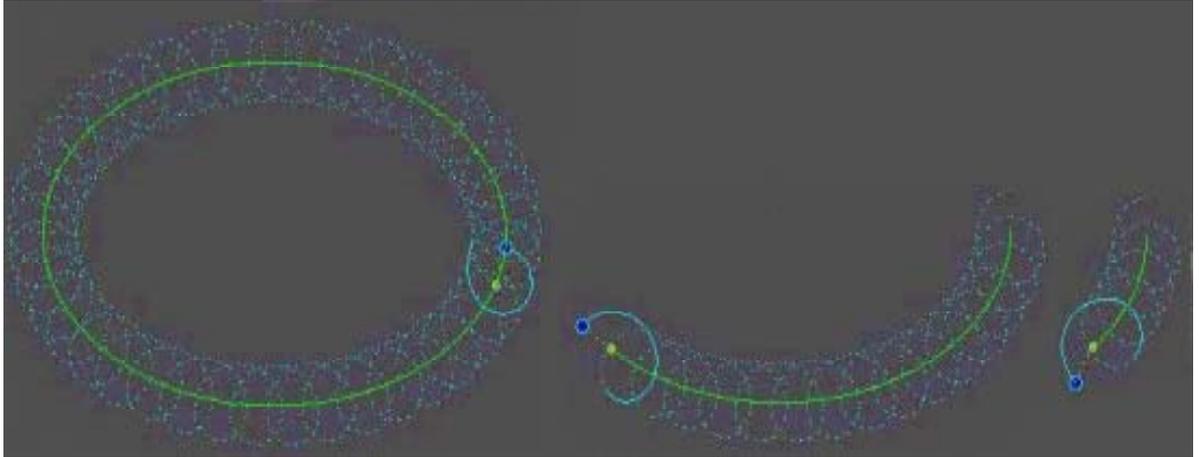


Figure.3.2

### 3.2.2 Présentation de la géométrie tokamak

les tokamaks sont l'une des géométries magnétiques de confinement les plus répandues dans le monde de la fusion thermonucléaire(fig.3.4).le nom dérive de la fusion des mots russes **T**Orodalnaya(toroïdal),**K**Amera(chambre), **M**AGnitaya(magnétique).développé dans les années 50 en URSS, le principe a été rapidement adopté par la communauté scientifique mondiale. Cette géométrie permet de confiner un plasma en régime pulsé, en utilisant trois types de champs.[15]

Une série de bobines d'axe horizontal, de distribution torique crée un champ axisymétrique horizontal appelé champ toroïdal (Fig.3.5).La variation de flux dans les bobines centrales d'axe vertical(bobines ohmiques)créé un anneau circulaire de plasma et induit un courant  $I_p$  à l'intérieur de cet anneau, ce qui engendre un champ poloïdal (fig.3.6).La somme de ces deux champs est le champ de confinement total (fig.3.7).

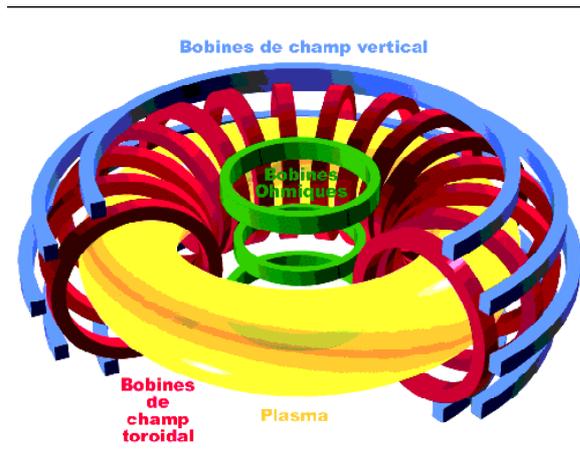


Figure.3.4: présentation schématique d'un tokamak

Les bobines extérieures d'axe vertical (fig.3.4) créent un champ vertical de stabilisation qui est nécessaire pour confiner le plasma.

Le plasma est ainsi confiné par des champs extérieurs (champs toroïdal et vertical) mais aussi par son propre champ, crée par le courant  $I_p$  qui y circule. Ce courant est généré par induction comme dans un simple transformateur dont le circuit primaire est l'ensemble des bobines ohmiques et le secondaire le plasma lui-même.

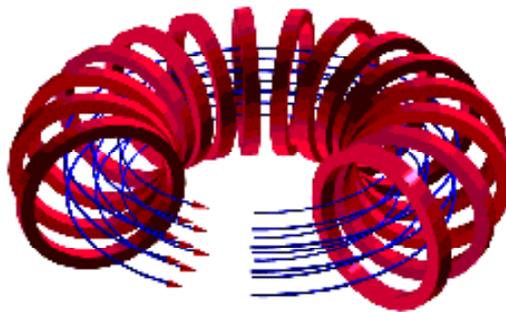


Figure.3.5: Bobines de champ toroïdal et champ poloïdal

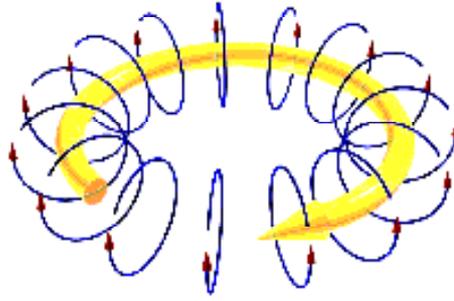


Figure.3.6: courant plasma et champ poloïdal

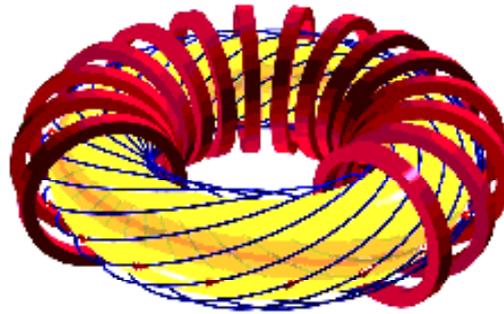


Figure.3.7: champ magnétique (hélicoïdal) total

### 3.2.3 Equilibre 2D pour configurations axisymétrique

L'équation  $\nabla \cdot B = 0$

L'équation  $\nabla \cdot B = 0$  entraîne que l'induction magnétique  $B$  dérive d'un potentiel vecteur  $A$ . L'hypothèse d'axisymétrie implique  $A = A_\phi(R, Z) e_\phi$

La divergence nulle du vecteur  $B$  se traduit en repère cylindrique par :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial (RB_R)}{\partial R} + \frac{\partial (B_Z)}{\partial Z} = 0 \quad (3.2)$$

Il est important de remarquer que la composante toroïdale de  $B$  n'est pas affectée par cette équation. Définissons la fonction  $\psi = RA_\phi$

On obtient:

$$\psi = RA_\phi \quad (3.3)$$

$$B = B_\phi e_\phi + B_p \text{ où } B_p = \frac{1}{R} \nabla \psi \times e_\phi \quad (3.4)$$

La fonction  $\psi$  détermine un ensemble de contours  $\psi = cte$ , emboîtés les uns dans les autres comme l'illustre la figure (4.10) dans l'annexe3. Ces contours représentent les surfaces magnétiques confinant le plasma en une structure toroïdale.

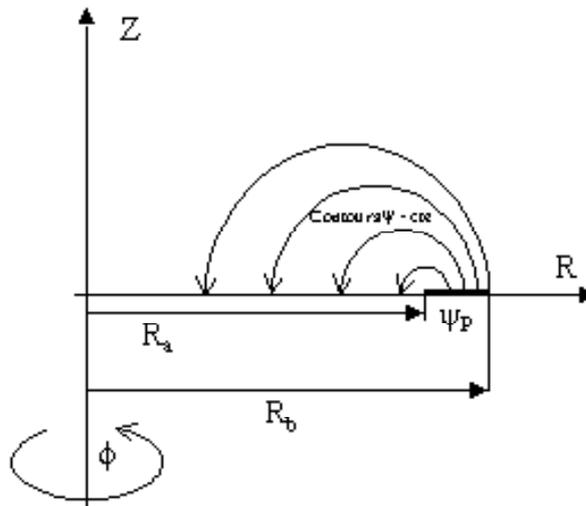


Figure.3.8: Contours  $\psi = cste$  déterminant le flux poloïdal  $\psi_p$

La fonction  $\psi$  est reliée au flux poloïdal  $\psi_p$ . En effet si on choisit  $\psi(R, 0) = 0$  on obtient:

$$\psi_p = \int B_p \cdot dS = \int_{R_a}^{2\pi} d\phi \int_{R_a}^{R_b} RB_Z(R, 0) dR = 2\pi\psi \quad (3.5)$$

**L'équation**  $\nabla \times B = \mu J$

Si on substitue l'expression de  $A$  dans la troisième équation des équations (5.13) (voir l'annexe3), la densité de courant s'exprime en fonction de  $\psi$  et de  $RB_\phi$ :

$$\mu J = -\frac{1}{R}L(\psi)e_\phi + \frac{1}{R}\nabla(RB_\phi) \times e_\phi \quad (3.6)$$

avec

$$L(\psi) = R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2}$$

**L'équation**  $J \times B = \nabla p$  Si on remplace dans l'équation d'inertie les termes  $B$  et  $J$  par les expressions trouvées précédemment, avec l'hypothèse d'axisymétrie, on constate:

$$\begin{aligned} J \times B &= \nabla p \Rightarrow B \cdot \nabla p \\ &\Rightarrow (\nabla\psi \times e_\phi) \nabla p = 0 \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial R}\frac{\partial p}{\partial Z} = \frac{\partial\psi}{\partial Z}\frac{\partial p}{\partial R} \end{aligned}$$

Donc

$$J \times B = \nabla p \Rightarrow \nabla p = \frac{\frac{\partial p}{\partial Z}}{\frac{\partial\psi}{\partial Z}} \nabla\psi$$

En utilisant le lemme 1 présenté en annexe on obtient

$$p = p(\psi) \quad (3.7)$$

De même on a:

$$\left| \begin{aligned} J \times B = \nabla p &\Rightarrow J \cdot \nabla p = 0 \\ &\Rightarrow (\nabla(RB_\phi) \times e_\phi) \nabla p = 0 \\ &\Rightarrow (\nabla(RB_\phi) \times e_\phi) \nabla\psi = 0 \\ &\Rightarrow \exists F/RB_\phi = F(\psi) \end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

$$p = p(\psi) \text{ et } RB_\phi = F(\psi) \quad (3.9)$$

La fonction  $F(\psi)$  est étroitement liée au courant poloidal. En effet:

$$I_p = \oint J_p \cdot dS = - \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_a}^{R_b} R J_Z(R, 0) dR = -2\pi R(\psi) B_\phi(\psi) = -2\pi F(\psi) \quad (3.10)$$

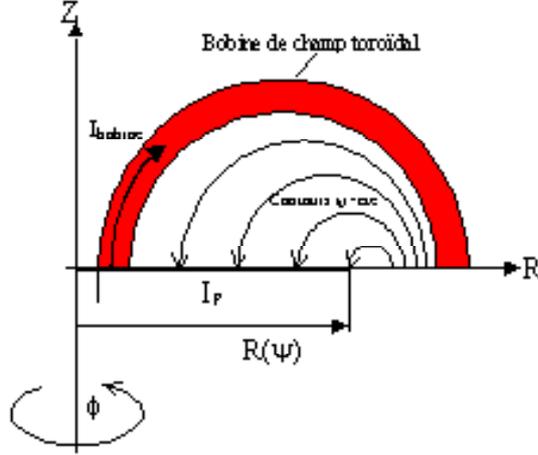


Figure.3.9: Courant poloidal

Finalement en introduisant  $p(\psi), F(\psi), (3.4)$  et  $(3.6)$  dans la première équation des équations  $(5.13)$  (voir l'annexe3) et en utilisant le lemme 2 (voir l'annexe2) on obtient:

$$\begin{aligned} \mu J &= \left[ -\frac{1}{R} L(\psi) e_\phi + \frac{1}{R} \nabla(F(\psi)) \times e_\phi \right] \times \left[ \frac{F(\psi)}{R} e_\phi + \frac{1}{R} \nabla\psi \times e_\phi \right] \\ \mu \nabla p &= -\frac{1}{R^2} L e_\phi \times (\nabla\psi \times e_\phi) + \frac{F}{R^2} (\nabla(F) \times e_\phi) \times e_\phi \quad \text{car } \nabla F(\psi) // \nabla\psi \\ \mu \nabla p &= -\frac{1}{R^2} L \nabla\psi - \frac{F}{R^2} \nabla F \\ \mu \frac{dp}{d\psi} \nabla\psi &= -\frac{1}{R^2} L \nabla\psi - \frac{F}{R^2} \frac{dF}{d\psi} \nabla\psi \\ L(\psi) &= -\mu R^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'équation  $(3.11)$ , dite de Grad-shafranov, définit l'équilibre MHD d'un plasma pour une

configuration magnétique axisymétrique.[15]

C'est une équation aux dérivées partielles non linéaire du second degré. Si les fonctions  $p(\psi), F(\psi)$  sont connues il est possible de déterminer la répartition  $\psi$ , et d'en déduire les grandeurs pertinentes ( $B, J, \dots$ ) ainsi que la position géométrique des surfaces magnétiques.

### 3.3 L'équation de Grad-Safranov dans l'espace des flux

En utilisant les formules de dérivation présentées en annexe, on obtient les résultats suivant dans l'espace des flux:

$$p = p(\psi) \quad (3.12)$$

$$(4.22) \Rightarrow \vec{B} = \frac{F(\psi)}{R} \vec{e}_\phi - \left( \frac{1}{Rh^\psi} \right) \vec{e}_x \quad (3.13)$$

De plus, en utilisant l'équation (3.13) et la troisième équation des équations (5.13) (Voir annexe3) on obtient:

$$(4.22) \Rightarrow \mu \vec{j} = -\frac{1}{Rh^\psi} \frac{dF(\psi)}{d\psi} \vec{e}_x - \frac{1}{h^\psi h^x} \frac{\partial \frac{h^x}{Rh^\psi}}{\partial \psi} \vec{e}_\phi$$

Ou

$$\mu \vec{j} = -\frac{1}{Rh^\psi} \frac{dF(\psi)}{d\psi} \vec{e}_x - \Delta \left( \frac{\psi}{R} \right) \vec{e}_\phi \quad (3.14)$$

Avec

$$\mu \vec{j}_\phi = -\Delta \left( \frac{\psi}{R} \right) \vec{e}_\phi \quad (3.15)$$

Enfin la première équation d'équilibre des équations (5.13) (Voir annexe3) entraîne:

$$\mu j_\phi^{eq} = R\mu \frac{dp}{d\psi} + \frac{F}{R} \frac{dF}{d\psi} \quad (3.16)$$

Et par identification on a l'équation (3.17) qui n'est autre que l'équation de Grad Shafranov dans l'espace des flux

$$\Delta \left( \frac{\psi}{R} \right) = - \left( \mu R \frac{dp}{d\psi} + \frac{F}{R} \frac{dF}{d\psi} \right) \text{ ou } \frac{1}{h^\psi h^x} \frac{\partial \frac{h^x}{R h^\psi}}{\partial \psi} = - \left( \mu \frac{dp}{d\psi} + \frac{F}{R^2} \frac{dF}{d\psi} \right) \quad (3.17)$$

Nous introduisons la fonction  $\zeta$ , définie en (3.18). L'équilibre est atteint si cette fonction est identiquement nulle pour tout point  $M$  appartenant au domaine intérieur au plasma.

$$\zeta(M) = \frac{1}{h^\psi h^x R} \frac{\partial \frac{h^x}{R h^\psi}}{\partial \psi} = \left( \mu \frac{dp}{d\psi} + \frac{1}{2R^2} \frac{dF^2}{d\psi} \right) \quad (3.18)$$

Ou

$$\zeta(M) = \frac{1}{2R} (j_\phi^{eq} - j_\phi)$$

### 3.4 Discrétisation du problème

Pratiquement le problème doit être discrétisé. Nous définissons l'axe magnétique  $\zeta$  comme un contour dégénéré dont tous les points sont confondus. Le champ poloïdal  $y$  est nul.

Nous définissons:

\* $\psi_0$  est le flux sur la frontière,  $\psi_n$  Le flux sur l'axe magnétique;

\* $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ , flux de  $n$  contours emboîtés les uns dans les autres tels que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \psi_k = \psi_0 + k \frac{\psi_n - \psi_0}{n} \quad (3.19)$$

\*Chacun de ces contours est divisée en points.

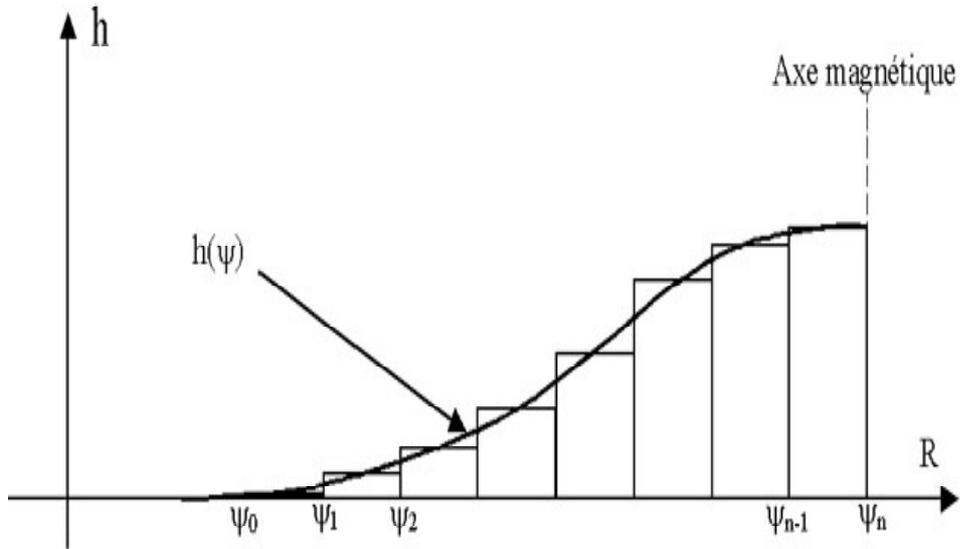


Figure 3.10. Fonction continue  $h$  et son approximation par une fonction en escalier

La discrétisation du domaine implique l'approximation des fonctions  $\frac{dp}{d\psi}$  et  $\frac{dF^2}{d\psi}$  par des fonctions en escalier (figure 3.10). L'évaluation de  $h^\psi$  entre chacun des contours est présentée en figure(3.11). L'orthogonalisation du maillage est implicite dans cette discrétisation.

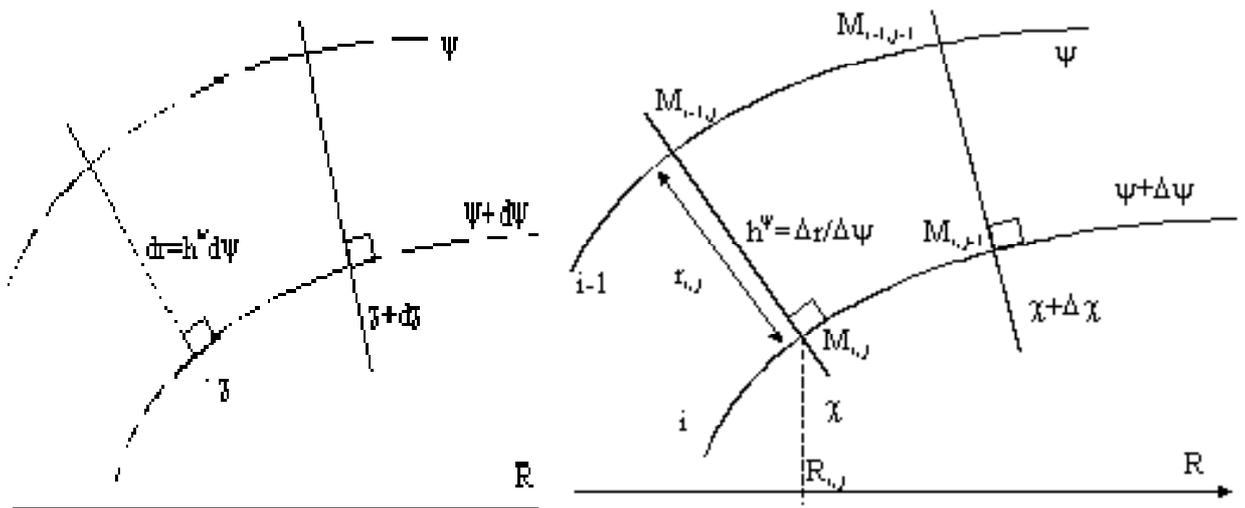


Figure 3.11. Approximation de  $h^\psi$

En utilisant les hypothèses énoncées ci-dessus on obtient l'équation (3.20):

$$\zeta_{i,j} = \frac{1}{r_{i,j}R_{i,j}} \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}R_{i+1,j}} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}R_{i,j}} \right) + \left( \mu \left[ \frac{dp}{d\psi} \right]_i + \frac{1}{2R_{i,j}^2} \left[ \frac{dF^2}{d\psi} \right]_i \right) \quad (3.20)$$

### 3.5 Procédure variationnelle

Supposons tous les points du domaine à l'équilibre sauf  $M_{i,j}$ . Si  $M_{i,j}$  est à l'équilibre,  $\zeta_{i,j} = 0$  et on dérive l'équation (3.21) de (3.20);

$$\frac{1}{r_{i,j}^{eq}R_{i,j}^{eq}} \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}^{eq}R_{i+1,j}^{eq}} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq}R_{i,j}^{eq}} \right) = - \left( \mu \left[ \frac{dp}{d\psi} \right]_i + \frac{1}{2R_{i,j}^{eq2}} \left[ \frac{dF^2}{d\psi} \right]_i \right) \quad (3.21)$$

Si  $M_{ij}$  est très proche de l'équilibre:

- \*  $|\delta r| \ll R_{i,j}^{eq}, |\delta r| \ll R_{i+1,j}^{eq}$  ;
- \*  $r_{i,j} = r_{i,j}^{eq} + \delta r$  ;
- \*  $r_{i+1,j} = r_{i+1,j}^{eq} - \delta r$  ;
- \*  $R_{i,j} \approx R_{i,j}^{eq}, R_{i+1,j} \approx R_{i+1,j}^{eq}$  ;

On obtient alors l'équation (3.22) en utilisant (3.21) et (3.20)

$$\zeta_{i,j} \approx \frac{1}{r_{i,j}R_{i,j}} \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}R_{i+1,j}^{eq}} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}R_{i,j}^{eq}} \right) - \frac{1}{r_{i,j}^{eq}R_{i,j}^{eq}} \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}^{eq}R_{i+1,j}^{eq}} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq}R_{i,j}^{eq}} \right) \quad (3.22)$$

Il est possible de faire un développement limité:

$$\frac{1}{r_{i,j}} = \frac{1}{r_{i,j}^{eq}} \frac{1}{1 + \frac{\delta r}{r_{i,j}^{eq}}} = \frac{1}{r_{i,j}^{eq}} \left( 1 - \frac{\delta r}{r_{i,j}^{eq}} + 0(\delta r) \right)$$

Et

$$\frac{1}{r_{i+1,j}} = \frac{1}{r_{i+1,j}^{eq}} \frac{1}{1 - \frac{\delta r}{r_{i+1,j}^{eq}}} = \frac{1}{r_{i+1,j}^{eq}} \left( 1 + \frac{\delta r}{r_{i+1,j}^{eq}} + 0(\delta r) \right)$$

Et on a:

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j} \approx & \frac{1}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \left( 1 - \frac{\delta r}{r_{i,j}^{eq}} \right) \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}^{eq} R_{i+1,j}^{eq}} \left( 1 + \frac{\delta r}{r_{i+1,j}^{eq}} \right) - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \left( 1 - \frac{\delta r}{r_{i,j}^{eq}} \right) \right) \\ & - \frac{1}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}^{eq} R_{i+1,j}^{eq}} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \right) + 0(\delta r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j} \approx & \frac{1}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}^{eq} R_{i+1,j}^{eq}} \frac{1}{r_{i+1,j}^{eq}} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \frac{1}{r_{i,j}^{eq}} \right) \\ & - \left( \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}^{eq} R_{i+1,j}^{eq}} \frac{1}{r_{i,j}^{eq}} - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \frac{1}{r_{i,j}^{eq}} \right) \delta r + 0(\delta r) \end{aligned}$$

$$\zeta_{i,j} \approx \frac{1}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \left[ \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{r_{i+1,j}^{eq} R_{i+1,j}^{eq}} \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \left( \frac{1}{r_{i+1,j}^{eq}} - \frac{1}{r_{i,j}^{eq}} \right) + 2 \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{r_{i,j}^{eq} R_{i,j}^{eq}} \frac{1}{r_{i,j}^{eq}} \right] + 0(\delta r)$$

$$\delta r \approx K (R_{i+1,j}^{eq}, R_{i,j}^{eq}, r_{i+1,j}^{eq}, r_{i,j}^{eq}, \psi) \zeta_{i,j} \quad (3.23)$$

Ainsi  $\zeta_{i,j}$  est une fonction linéaire du déplacement des points  $M_{i,j}$ , à condition que ces déplacements soient faibles. L'équation (3.23) indique les valeurs des déplacements infinitésimaux qui permettent d'arriver à l'équilibre pour chacun des points sont déplacés d'une quantité  $\delta r_{i,j}$  telle que:

$$\vec{\delta r}_{i,j} = \eta \cdot \zeta_{i,j} \cdot \vec{n}, 0 < \eta < 1 \quad (3.24)$$

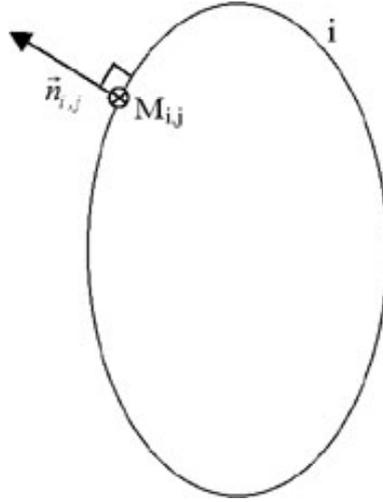


Figure 3.12: Définition du vecteur normal au contour  $i$  en un point  $j$

La convergence de cet algorithme n'est garantie que lorsqu'on est proche de l'équilibre, d'après l'équation (3.23). Comme l'équilibre est unique pour des fonctions libres et une forme de frontière fixe données, l'algorithme converge pour une grande variété de géométries de départ. Le critère de convergence (3.25) et (3.26) devra être vérifié numériquement:

à l'itération  $N$ ,

$$\forall i, j \quad \left| \delta \vec{r}_{ij} \right| < \varepsilon_N \quad (3.25)$$

Et

$$\varepsilon_N \rightarrow 0 \quad (3.26)$$

$$N \rightarrow +\infty$$

Si (3.25) et (3.26) sont vérifiés,  $\zeta_{ij} \rightarrow 0$  pour tous  $i$  et  $j$ . Ainsi on obtient (3.17) et l'équilibre est atteint. On peut prendre comme erreur entre la position actuelle des contours et l'équilibre la valeur maximale de  $\delta r$  soit:

À l'itération  $N$  l'erreur

$$err_N = \max_{i,j} \left( \left| \delta \vec{r}_{ij} \right| \right) \quad (3.27)$$

## 3.6 Orthogonalisation d'un domaine 2D

La simplification de l'équation de Grad shafranov implique un maillage orthogonal. Afin d'obtenir un tel maillage on utilise une méthode d'équation intégrale de frontière.

### 3.6.1 Orthogonalisation en domaine 2D discret

#### Le principe

Sur un domaine discret,  $h^i$  et  $h^j$  sont connus (paramètres du maillage en chaque noeud), alors que  $\theta$  ne l'est pas. Il est donc préférable de travailler à l'aide de ces derniers. En éliminant  $\theta$  dans l'équation (5.16) (voir l'annexe5) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^i}{h^j} \frac{\partial i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^i}{h^j} \frac{\partial i}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^j}{h^i} \frac{\partial j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^j}{h^i} \frac{\partial j}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Le but est donc de définir  $h^i$  et  $h^j$  afin d'obtenir un maillage orthogonal. Pour obtenir un tel maillage, les lignes  $i = cte$  doivent être perpendiculaires aux lignes  $j = cte$ . Ainsi les lignes  $i = cte$  sont tangentes en tout point du maillage au vecteur  $\vec{\nabla} i$ . Nous pouvons ainsi définir un vecteur  $\vec{E}$  colinéaire à  $\vec{\nabla} i$  en utilisant une fonction  $V$ , deux fois dérivable, telle que :

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} V(i) \propto \vec{\nabla} i \quad (3.29)$$

N.B Il est possible de comparer le vecteur  $\vec{E}$  avec le vecteur champ électrique,  $V$  avec le potentiel électrique

Qualitativement, pour obtenir un tel maillage, il faut qu'il n'y est aucune génération ou disparition de points lorsqu'on passe d'une courbe fermée à sa voisine. Autrement dit, toutes les courbes  $C_i$  doivent avoir le même nombre de points. Il n'existe donc aucune source  $\rho$  de points entre chacune des lignes  $i$  et  $i+1$ . Là encore il est possible de comparer  $\rho$  et la densité de charge en électrostatique. Ainsi si  $\rho = 0$ , la divergence du vecteur  $\vec{E}$

est nulle, soit :

$$\nabla \cdot \left( \frac{dV}{dj} \vec{\nabla} i \right) = 0 \text{ ou } \frac{dV}{dj} \nabla^2 i + \frac{d^2V}{dj^2} \left( \vec{\nabla} i \right)^2 = 0 \quad (3.30)$$

Les équations (5.17) et (3.35) impliquent :

$$\nabla^2 i = \frac{1}{h^i h^j} \frac{\partial h^j}{\partial i} \quad (3.31)$$

$$\left\| \vec{\nabla} i \right\| = \frac{1}{h^i}$$

Et par conséquent (3.30) et (3.31) entraînent :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{di} \frac{\partial h^j}{\partial i} + \frac{d^2V}{di^2} \frac{h^j}{h^i} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{dV}{di} \frac{h^j}{h^i} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Où

$$\left( \frac{dV}{di} \frac{h^j}{h^i} \right) = f(j)$$

Nous rappelons que  $V$  est une fonction de  $i$  uniquement. Il s'en suit :

$$\exists g / \frac{h^j}{h^i} = f(j) g(i) \quad (3.32)$$

Comme le rapport du maillage  $\frac{h^j}{h^i}$  n'est pas forcément constant, la discrétisation du domaine entraîne la discontinuité possible de  $h^i$ . L'équation (3.32) implique que la fonction  $g$  peut être discontinue lorsqu'on passe d'une ligne  $i = cte$  à la suivante.

Si nous incluons (3.32) dans (3.28) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( f(j) \frac{\partial j}{\partial x} \right) g(i) + f(j) \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial g(i)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( f(j) \frac{\partial j}{\partial y} \right) g(i) + f(j) \frac{\partial j}{\partial y} \frac{\partial g(i)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( g(i) \frac{\partial i}{\partial x} \right) f(j) + g(i) \frac{\partial i}{\partial x} \frac{\partial f(j)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( g(i) \frac{\partial i}{\partial y} \right) f(j) + g(i) \frac{\partial i}{\partial y} \frac{\partial f(j)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( f(j) \frac{\partial j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( f(j) \frac{\partial j}{\partial y} \right) = -\frac{f(j)}{g(i)} \frac{\partial g(i)}{\partial i} \left( \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( g(i) \frac{\partial i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( g(i) \frac{\partial i}{\partial y} \right) = -\frac{g(i)}{f(j)} \frac{\partial f(j)}{\partial j} \left( \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \end{cases}$$

D'après (5.16) (voir annexe5) on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( f(j) \frac{\partial j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( f(j) \frac{\partial j}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( g(i) \frac{\partial i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( g(i) \frac{\partial i}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Si on définit  $f$  telle que

$$f(j) = \frac{dU}{dj} \quad (3.33)$$

Il en découle :

$$\nabla^2 U = 0 \text{ et } \nabla^2 V = 0$$

Ainsi la procédure d'orthogonalisation équivaut à résoudre les équations de Laplace précédentes. Si les contours  $i = cte$  du maillage sont imposés, la procédure se réduit à la résolution de :

$$\nabla^2 U = 0 \quad (3.34)$$

A la frontière du domaine défini par les deux lignes  $i$  et  $i + 1$ , la dérivée selon la direction normale implique :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{h^i} \frac{\partial U}{\partial i} = 0 \quad (3.35)$$

Ainsi l'équation de Laplace (3.34) a des conditions aux limites de type Von Neumann.

### 3.7 Formulation du problème

L'étude mathématique d'une équation de Laplacien qui décrit, dans certaines circonstances, l'équilibre d'un plasma confiné dans une machine tokamak. Cela peut se traduire mathématiquement par le problème à frontière libre.

A l'équilibre, la frontière externe du plasma est une ligne de flux. Si nous souhaitons déterminer sa forme et sa position il est indispensable de calculer le flux sur cette frontière.

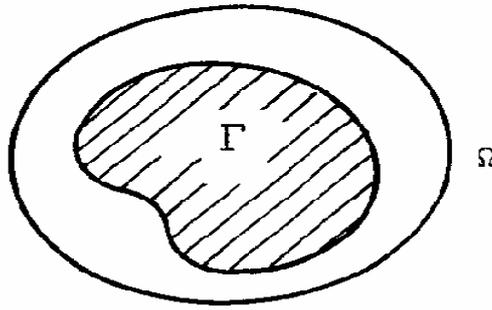


Figure 3.12.

$$\begin{cases} -\Delta u = j, & \text{dans } \Gamma \\ -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega/\Gamma \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.36)$$

- o  $\Omega$  le domaine total et  $\partial\Omega$  sa frontière.
- o  $\Gamma$  région occupé par le plasma.
- o  $j$  La densité du courant.
- o  $u$  flux du champ magnétique.

### 3.8 Conclusion

La résolution du système d'équations de la MHD assorti des conditions aux limites adéquates, conduit à l'équation de Grad-Shafranov. La résolution numérique d'une telle équation paraît difficile, pour cela nous avons proposé un modèle mathématique qui décrit le comportement de flux du champ magnétique dans un plasma, en utilise la méthode des élément finis.

**Chapitre IV**

**Résolution numérique.**  
**de problème de confinement**

# Chapitre 4

## Résolution numérique de problème de confinement

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est réservé à la résolution numérique d'un problème à frontière libre, afin de déterminer la forme et la position du plasma. Pour cela il est indispensable de calculer le flux sur cette frontière, en utilisant la méthode des éléments finis.

#### 4.1.1 La résolution numérique du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = j, & \text{dans } \Gamma \\ -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega/\Gamma \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

- o  $\Omega$  le domaine total et  $\partial\Omega$  sa frontière.
- o  $\Gamma$  région occupé par le plasma.
- o  $j$  La densité du courant.
- o  $u$  flux du champ magnétique.

La résolution du problème (4.1) permet de déterminer le comportement de flux du champ magnétique dans le plasma, en utilisant pour cela la méthode des éléments finis.

-Pour pouvoir résoudre le problème nous supposons que la frontière est fixe : la forme et la position de la frontière sont déterminé, c'est à dire  $j = const$ .

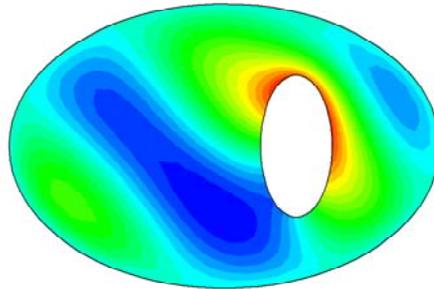


Figure 4.1.confinement du plasma par un champ magnétique non uniforme

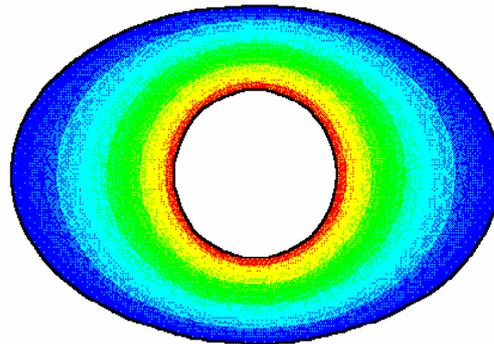


Figure 4.2.confinement du plasma par un champ magnétique uniforme

Dans la figure (4.1) où le champ magnétique n'est pas uniforme, le plasma se dirige vers la région où l'intensité du champ magnétique est forte, par contre dans la figure (4.2) où le champ magnétique est uniforme, le plasma se trouve au centre où elle aura la forme d'un tore.

### 4.1.2 La résolution du problème pour une géométrie d'un disque

Supposons que le plasma a la géométrie d'un disque, tel que  $j = \lambda$  un paramètre  $\in \mathfrak{R}$ ,

$$\Omega = B(0, 1) \subset \mathfrak{R}^2$$

Cherchant des solutions radiales, c'est à dire  $u = u(r)$

$\Delta$  en coordonnées polaires devient :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Pour  $n = 2$  (deux dimensions)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.2)$$

Le problème (4.1) :devient

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = -\lambda, & \text{dans } \Gamma \\ u'' + \frac{1}{r}u' = 0, & \text{dans } \Omega/\Gamma \\ u(1) = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

$u(1) = 0$ , sur  $\partial\Omega$  parce que on a prit comme exemple un disque de rayon 1, et on avait comme condition aux limites  $u = 0$  sur la frontière.

Comme une solution radiale est décroissante sur  $(0, 1)$ , elle possède un maximum en  $r = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ., alors on ajoute cette condition le problème devient :

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = -\lambda, & \text{dans } \Gamma \\ u'' + \frac{1}{r}u' = 0, & \text{dans } \Omega/\Gamma \\ u(1) = 0, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans la région occupé par le plasma  $\Gamma$ , le flux du champ magnétique dépasse un seuil  $u^* = 1$ , alors on peut supposer que  $u \succ 1$  dans  $\Gamma$ . Par conséquent dans le vide,  $u \prec 1$  dans  $\Omega/\overline{\Gamma}$ .

(4.4)devient:

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = -\lambda, & \text{si } u \succ 1 \\ u'' + \frac{1}{r}u' = 0, & \text{si } u \prec 1 \\ u(1) = 0, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

o On fait un hypothèse: on suppose que la région occupé par le plasma est un disque de centre 0 et de rayon  $r_0$  (inconnue).

o La frontière de  $w$  s'appelle frontière libre  $\partial\Gamma$ .

o Sur  $\partial\Gamma$  :  $u(r_0) = 1$

Enfin, le problème (4.5) devient

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = -\lambda, & \text{si } 0 \prec r \prec r_0 \\ u'' + \frac{1}{r}u' = 0, & \text{si } r_0 \prec r \prec 1 \\ u(1) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(r_0) \end{cases} \quad (4.6)$$

Ce problème possède deux solutions radiales, dans le vide et dans le plasma.

**o Solution dans le vide**

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{r}u' = 0, & \text{si } r_0 \prec r \prec 1 \\ u(1) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u(r_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{r}u' &= 0 \Rightarrow ru'' + u' = 0 \Rightarrow (ru')' = 0 \\ &\Rightarrow ru' = c_1 \text{ (constante)}. \\ &\Rightarrow u' = \frac{c_1}{r} \Rightarrow \int_{r_0}^r u'(s) ds = \int_{r_0}^r \frac{c_1}{s} ds \\ &\Rightarrow u(r) - u(r_0) = c_1 \ln s \Big|_{r_0}^r = c_1 (\ln r - \ln r_0) \end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\Rightarrow u(r) = 1 + c_1 \ln \frac{r}{r_0} \quad (4.7)$$

o Solution dans le plasma

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{r}u' &= -\lambda \Rightarrow ru'' + u' = -\lambda r \\ &\Rightarrow (ru')' = -\lambda r \\ &\Rightarrow ru'(r) - 0u'(0) = -\lambda \int_0^r s ds \\ &\Rightarrow ru'(r) = -\lambda \frac{s^2}{2} \Big|_{r_0}^r = -\frac{\lambda}{2} r^2 \\ &\Rightarrow u'(r) = -\frac{\lambda}{2} r \\ &\Rightarrow u(r) - u(0) = -\frac{\lambda}{2} \frac{r^2}{2} \end{aligned}$$

Alors on aura comme solution :

$$u(r) = u(0) - \frac{\lambda}{4} r^2 \quad (4.8)$$

o Condition aux limites(continuité sur la frontière libre)

$$\begin{cases} u'(r_0^-) = u'(r_0^+) \\ u(r_0^-) = u(r_0^+) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} u'(r_0^-) &= u'(r_0^+) \Rightarrow -\frac{\lambda}{2} r_0 = \frac{c_1}{r_0} \\ &\Rightarrow c_1 = -\frac{\lambda}{2} r_0^2 \end{aligned}$$

$$u(r_0^-) = u(r_0^+) \Rightarrow 1 + \left(-\frac{\lambda}{2}r_0^2\right) \ln \frac{r}{r_0} \Big|_{r=r_0} = u(0) - \frac{\lambda}{4}r_0^2$$

On aura

$$u(0) = 1 + \frac{\lambda}{4}r_0^2$$

Alors les solutions radiales du problème sont :

$$u(r) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{2}r_0^2 \ln \frac{r}{r_0} & \text{dans le vide} \\ 1 + \frac{\lambda}{4}(r_0^2 - r^2) & \text{dans le plasma} \end{cases} \quad (4.10)$$

La condition que doit vérifier  $\lambda$  pour que  $r_0$  existe est

On a  $u(1) = 0$  sur la frontière, alors il faut que :

$$u(1) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{2}r_0^2 \ln \frac{1}{r_0} = 0 \\ 1 + \frac{\lambda}{4}(r_0^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Cela implique que :

$$r_0 = \sqrt{1 - \frac{4}{\lambda}} \quad (4.11)$$

Alors la condition que doit vérifier  $\lambda$  pour que  $r_0$  existe est :

$$\lambda > 4 \quad (4.12)$$

Tel que on peut tracer ces solutions pour voir le comportement de flux du champ mag-

nétique dans le plasma et dans le vide.

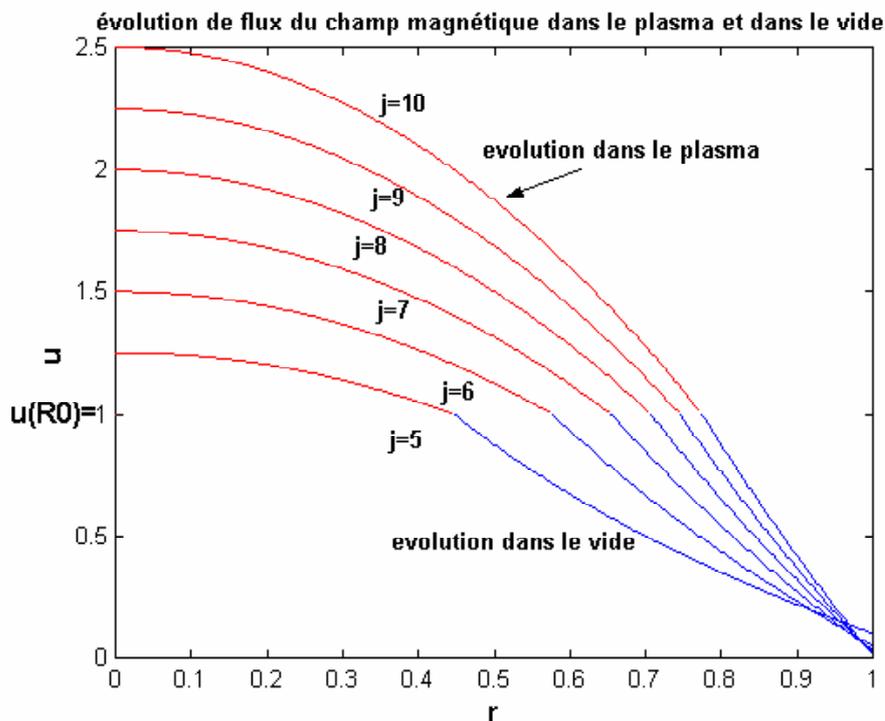


Figure 4.3. Comportement de flux du champ magnétique dans le plasma et dans le vide

On observe dans la figure ci-dessus pour différentes valeurs de  $j$ , on aura un ensemble de contours emboîtés les uns dans les autres où la densité de flux de champ magnétique est maximale au sein du plasma et faible dans le vide, tel que la valeur de flux est toujours constante sur la frontière du plasma, on conclut que ces contours représentent les surfaces magnétiques confinant le plasma en une structure toroïdale.

## 4.2 Conclusion

La résolution numérique nous a permis de conclure que :

-Tout d'abord nous avons supposé que la frontière est fixe,  $j = cst$ , où nous avons conclu que pour avoir un bon confinement, il faut que le champ magnétique soit uniforme, où le plasma a la configuration d'un disque.

-Puis, nous avons supposé que le plasma à la configuration d'un disque, cela permet d'avoir des solutions radiales, où à partir du comportement de flux de champ magnétique, nous concluons que les lignes de flux sont des contours emboîtés les uns dans les autres, ainsi le flux de champ magnétique est toujours maximal au sein du plasma.

## Annexes

# Chapitre 5

## Annexes

### 5.1 Annexe 1

#### 5.1.1 Champ potentiel

Quand la densité de courant s'annule, l'équation de Maxwell-Ampère  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu \vec{j}$  devient  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ , et peut aussi s'écrire:

$$\Delta \vec{B} = \vec{0} \quad (5.1)$$

Le champ magnétique est donc potentiel, c'est à dire que l'on peut associer au vecteur champ magnétique un potentiel scalaire  $\psi$  tel que  $\vec{B} = \vec{\text{grad}} (\psi)$  et satisfaisant l'équation de Laplace

$$\Delta \psi = 0 \quad (5.2)$$

L'intérêt du champ potentiel pour la physique solaire est que la composante normale du champ magnétique permet d'obtenir une solution unique dans un volume fermé. Le champ magnétique potentiel dans ce volume contient la plus petite valeur d'énergie magnétique possible. Cela signifie qu'une configuration magnétique avec des courants électriques non nuls et avec les mêmes valeurs du champ magnétique au niveau de la surface contiendra plus d'énergie que le champ potentiel.

Malheureusement, l'application du cas potentiel à la physique solaire est limitée puisque des courants électriques sont observés dans la plupart des structures magnétiques solaires.

### 5.1.2 Champ sans-force

Pour une densité de courant différente de zéro dans tout le volume contenant le plasma, l'équation (2.23) signifie que le vecteur champ magnétique et le vecteur densité de courant sont parallèles. Par conséquent, l'équation de Maxwell-Ampère  $\vec{rot} \vec{B} = \mu \vec{j}$  s'écrit:

$$\vec{rot}(\vec{B}) = \alpha(\vec{r}) \vec{B} \quad (5.3)$$

Où  $\alpha$  est une fonction de la position. En utilisant les équations (2.19) et la deuxième équation de Maxwell, on en déduit que  $\alpha$  doit être constant le long d'une ligne du champ:

$$\vec{B} \cdot \vec{grad}(\alpha) = 0 \quad (5.4)$$

Le champ magnétique vérifiant les équations (5.2) et (5.3) est appelé champ sans-force. Si  $\alpha$  a la même valeur pour chaque ligne de champ, alors nous obtenons le cas sans-force linéaire ou à  $\alpha$  constant pour lequel l'équation (5.2) devient

$$(\Delta + \alpha^2) \vec{B} = \vec{0} \quad (5.5)$$

Ce cas est intéressant car l'équation qui le gouverne possède des solutions relativement simples à trouver (ce qui n'est pas le cas pour l'équation (2.21)). Des solutions ont été mises en évidence en utilisant soit des transformées de Fourier, soit des fonctions de Green. Comme dans le cas potentiel, le calcul du champ sans-force à  $\alpha$  constant nécessite la connaissance de la composante normale du champ magnétique au niveau de la surface ( $z = 0$ ).

Malgré les difficultés à résoudre les équations du champ sans-force, on peut en déduire des relations intéressantes. En particulier, a mis en évidence des propriétés intégrales du

champ sans-force:

$$\left| \begin{array}{l} \int_S (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dS = 0, \int_S B_x B_z dS = 0, \\ \int_S B_y B_z dS = 0, \int_S (y B_x B_z - x B_y B_z) dS = 0, \\ \int_S y (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dS = 0, \int_S x (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dS = 0, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Où  $S$  représente la surface photosphérique. Ces relations impliquent que, pour l'énergie magnétique contenue dans un volume  $V$  et dont le champ magnétique au niveau de la surface  $S$  est connue, on a la relation:

$$\int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_S (x B_x + y B_y) \frac{B_z}{\mu_0} dx dy \quad (5.7)$$

L'hélicité magnétique possède aussi des caractéristiques particulières dans le cas d'un champ sans-force a démontré que, pour un plasma parfaitement conducteur, l'hélicité magnétique dans un volume fermé  $V^0$  est invariante et que l'état de minimum d'énergie correspond à un champ sans-force linéaire. pour un plasma avec une faible résistivité, les modifications dans la topologie de la configuration magnétique étaient accompagnées par de faibles changements du champ magnétique, mais que globalement l'hélicité magnétique dans le volume total était inchangée. Par conséquent, l'hélicité est approximativement invariante, tel que le minimum d'énergie est obtenu pour un champ sans-force linéaire.[4]

## 5.2 Annexe2

### 5.2.1 Formules

Dans un système orthogonal quelconque  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de coordonnées  $(q_1, q_2, q_3)$  et avec  $(h_1, h_2, h_3)$  comme métrique on a:

$$\vec{\nabla} U = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad (5.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right) \quad (5.9)$$

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_3} \right) \vec{e}_1 + \frac{1}{h_1 h_3} \left( \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial q_1} \right) \vec{e}_2 \quad (5.10)$$

$$+ \left( \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial q_2} \right) \vec{e}_3 \quad (5.11)$$

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right) \quad (5.12)$$

### 5.2.2 Lemmes

Soit un espace euclidien  $E$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de gradients non nuls telles que

$$\begin{aligned} \exists h / \nabla f &= h \nabla g \Leftrightarrow \forall M \in E \nabla f \cdot \vec{dM} = h \nabla g \cdot \vec{dM} \\ &\Leftrightarrow df = h \cdot dg \\ &\Leftrightarrow \frac{df}{dg} = h \\ &\Leftrightarrow f = f(g) \text{ et } \nabla f = \frac{df}{dg} \nabla g \end{aligned}$$

soit une fonction  $f$  sur un espace euclidien  $E(R, \phi, Z)$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$  on a:

$$(\nabla f \times e_\phi) \times e_\phi = \begin{pmatrix} \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right| & \left| 0 \right| \\ \left| 0 \right| & \left| 1 \right| \\ \left| \frac{\partial f}{\partial Z} \right| & \left| 0 \right| \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left| 0 \right| \\ \left| 1 \right| \\ \left| 0 \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| -\frac{\partial f}{\partial R} \right| \\ \left| 0 \right| \\ \left| -\frac{\partial f}{\partial Z} \right| \end{pmatrix} = -\nabla f$$

## 5.3 Annexe3

### 5.3.1 MHD idéale appliquée aux plasmas

La structure des plasmas d'un tokamak est relativement simple de point de vue de la MHD idéale (non résistive). Elle a les propriétés suivantes:

- \* surfaces fermées isobares axisymétriques emboîtées les unes dans les autres (fig.4.10).
- \* Ces surfaces sont aussi des surfaces à flux constant (flux du champ poloïdal), d'où le nom de surfaces magnétiques,
- \* L'hélicité du champ magnétique total est constante sur ces surfaces.

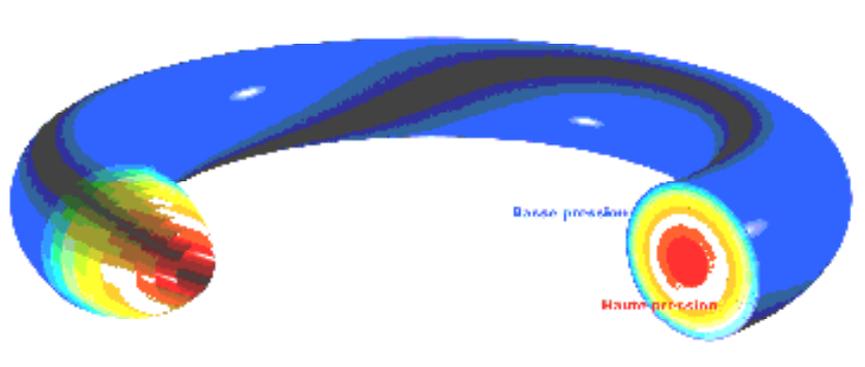


Figure.5.1: Surfaces isobares pour un plasma de section circulaire

### 5.3.2 Equilibre 2D en MHD idéale

Chercher les solutions d'équilibre, revient à chercher les solutions stationnaires des équations MHD. On suppose que la vitesse macroscopique du plasma est nulle et on utilise la MHD idéale. Dans ce cas, il ne reste que trois équations qui fournissent déjà des renseignements fort intéressants.

$$\left\{ \begin{array}{l} j \times B = \nabla p \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times B = \mu_0 j \end{array} \right. \quad (5.13)$$

La première des équations(5.13)permet de définir plusieurs fonctions de flux. En effet elle implique que

$$\begin{cases} B.\nabla p = 0 \\ j.\nabla p = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Les deux équations (5.14) montrent que l'on peut définir des surfaces magnétiques sur lesquelles la pression est constante.

### 5.3.3 Les quantités de surfaces

#### Les quantités de surfaces magnétiques

Le volume  $V$ , délimité par une surface isobare, ou le flux poloïdal  $\psi_p$  sont généralement utilisés comme coordonnées du problème.

$$\psi_p = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_{poloïdal}, \text{ flux poloïdal,}$$

$\psi_p$  est naturellement une quantité de surface car les lignes de force magnétique sont sur les surfaces de pression constante.

Plus précisément, les vecteurs  $B$  et  $J$  sont tangents à ces surfaces, en tous point. Ainsi les quantités suivantes sont aussi quantités de surfaces:

$$\begin{aligned} \psi_t &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_{toroïdal}, \text{ flux toroïdal, et } \psi_t = \psi_t(V) \text{ ou } \psi_t = \psi_t(\psi_p) \\ I_t &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_{poloïdal}, \text{ flux toroïdal, et } I_t = I_t(V) \text{ ou } I_t = I_t(\psi_p) \\ I_p &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_{poloïdal}, \text{ flux poloïdal, et } I_p = I_p(V) \text{ ou } I_p = I_p(\psi_p) \end{aligned}$$

#### Le facteur de sécurité MHD $q$

Le facteur de sécurité  $q$  est très important car il est lié à la stabilité du plasma. Il est défini par le rapport du nombre de tours effectués par ligne de force dans les directions

toroïdales et poloïdales :[15]

$$q(\psi) = \frac{\text{nombre de tours dans la direction toroïdale}}{\text{nombre de tours dans la direction poloïdale}} = \frac{d\psi_t}{d\psi_p}$$

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\psi} \frac{B_{\text{toroïdale}}}{RB_{\text{poloïdale}}} dl^4$$

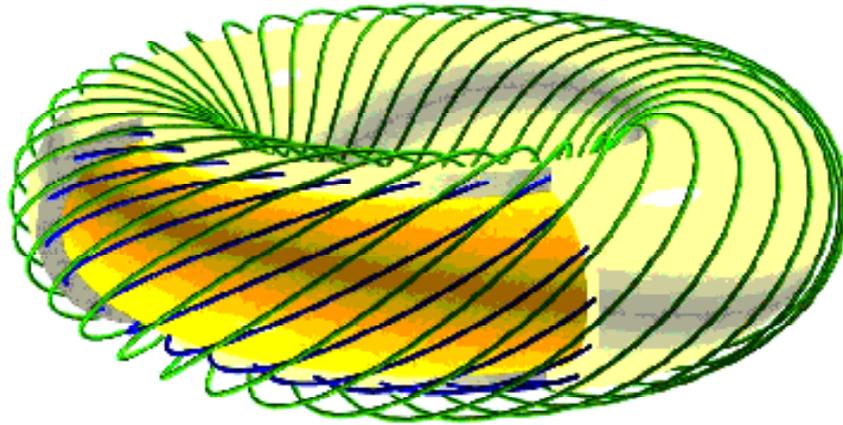


Figure.5.2: Principe de cisaillement dans l'hélicité des lignes de force du plasma

Un  $q$  supérieur à 1 implique un équilibre toroïdal robuste, mais qui développe rapidement des instabilités MHD. La variation de  $q$  d'une surface à l'autre crée un cisaillement du plasma (figure 5.2)

### Le Beta du plasma

Le  $\beta$  du plasma est le paramètre qui mesure l'efficacité du confinement. Pour des réacteurs à fusion, celui-ci doit être élevé. Ce n'est pas une quantité de surface mais un paramètre important des plasmas de fusion.

$$\bar{\beta} = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{\langle B_{\text{toroïdale}}^2 + B_{\text{poloïdale}}^2 \rangle}, \text{ ou } \langle x \rangle = \frac{1}{V_0} \int_0^{V_0} x(V) \cdot dV, V_0 \text{ volume de plasma}$$

En général, on remplace les moyennes des champs par des expressions équivalentes plus simples, dans le cas de plasmas symétriques par rapport au plan équatorial:

\*  $\langle B_{toroidal}^2 \rangle = B_0^2$ , champ toroïdal évalué en  $R_0$  (fig.5.12).

\*  $\langle B_{poloidal}^2 \rangle = B_0^2$ ,  $B_p = \frac{\mu_0 I_p a}{2A}$ ,  $I_p$  courant plasma total,  $a$  rayon mineur et  $A$  aire de la section.

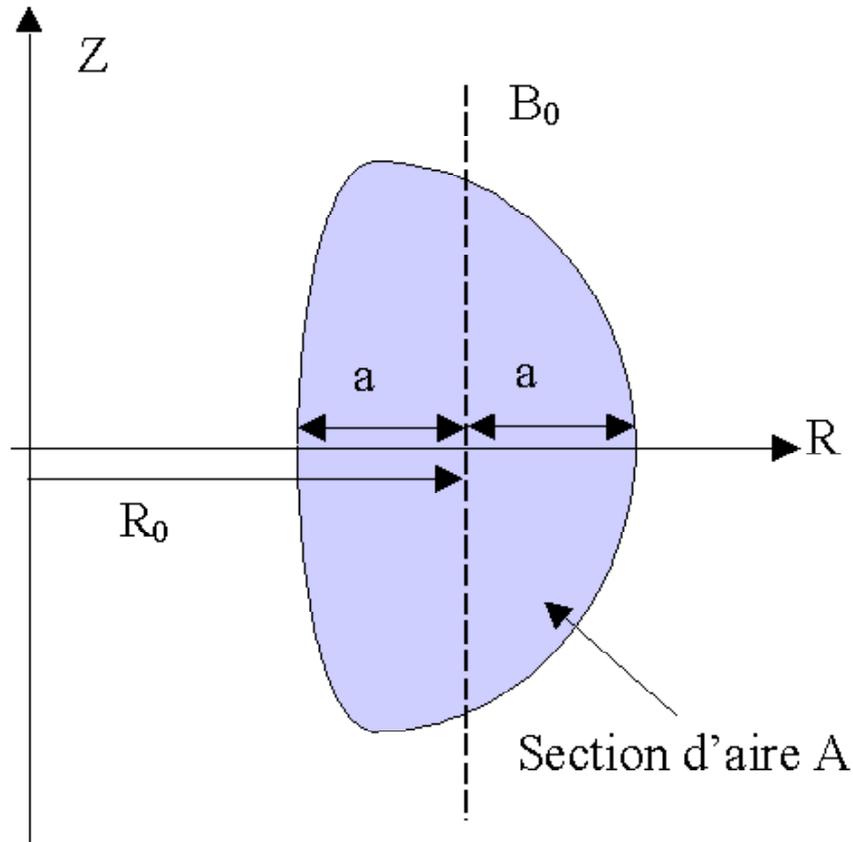


Figure.5.3: Évaluation du  $\beta$  en utilisant les valeurs moyennes des champs

Il est possible de définir des  $\beta$  poloïdal et toroïdal séparés:

$$\beta_t = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2}, \beta_p = \frac{8A^2 \langle p \rangle}{\mu_0 I_p^2 a^2} \text{ et } \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_t} + \frac{1}{\beta_p}$$

## 5.4 Annexe4

### 5.4.1 Définition de l'espace des flux

Dans l'espace  $(R, Z, \phi)$  chaque contour est défini par une valeur unique de la fonction  $\psi$ , fonction continue à l'intérieur du plasma. Ainsi,  $\psi$  peut être utilisé comme nouvelle coordonnée par bijection. Cette famille de contours est axisymétrique, ainsi  $\phi$ , coordonnée d'espace, peut être associée de manière triviale à  $\psi$ . Il est possible de définir un repère orthogonal direct  $(\psi, \chi, \phi)$  où  $\chi = \phi x \psi$ . On vient ainsi de déterminer un espace des flux  $(\psi, \chi, \phi)$  où  $\psi$  flux poloïdal (à  $2\pi$  près), définit la direction perpendiculaire (ou poloïdale), et  $\phi$  la direction toroïdale.

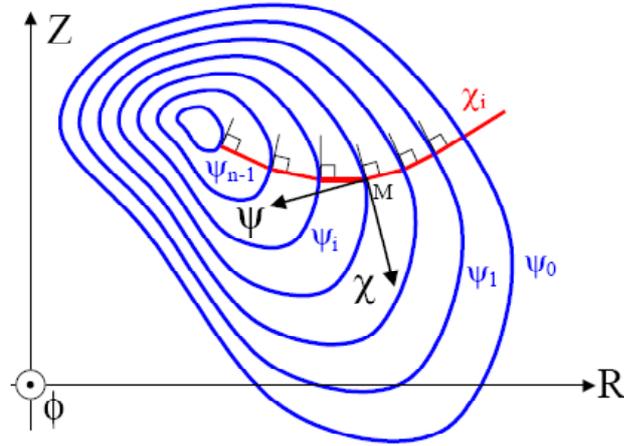


Figure 5.4. Espace géométrique  $(R, Z, \phi)$  et espace des flux  $(\psi, \chi, \phi)$

Un tel système de coordonnées d'espace n'est pas un système métrique. Il convient de définir les grandeurs  $h^\psi$  et  $h^\chi$  suivantes pour passer de l'espace  $(R, Z, \phi)$  à l'espace des flux:

$$\vec{dr} = (h^\psi d\psi)^2 + (h^\chi d\chi)^2 + (Rd\phi)^2 \quad (5.15)$$

De plus le champ poloïdal défini dans le chapitre précédent est orthogonal aux lignes de flux  $\chi = cte$  et tangent aux lignes de flux  $\psi = cte$ .

## 5.5 Annexe5

### 5.5.1 Orthogonalisation en domaine 2D continu

Soit un plan et un repère orthonormé  $(O, x, y)$ . Nous pouvons définir une famille continue  $C$  de courbes fermées continues, de dérivées et seconde continues, emboîtées les unes dans les autres telle que:

$$\forall M \in P \exists ! C_i \in C / M \in C_i$$

Ainsi pour chaque point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  dans  $P$  on peut trouver un couple unique de coordonnées  $(i, j)$  définissant  $M$  sur  $C$ . On a la correspondance triviale:  $i = i(x, y)$  et  $j = j(x, y)$ ,  $x = x(i, j)$  et  $y = y(i, j)$

Nous souhaitons que  $(i, j)$  soit un système orthogonal de coordonnées:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)_y &= \frac{\cos \theta}{h^i}, & \left(\frac{\partial j}{\partial x}\right)_y &= \frac{-\sin \theta}{h^j} \\ \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_x &= \frac{\sin \theta}{h^i}, & \left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)_x &= \frac{\cos \theta}{h^j} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Où

$$\theta(x, y) = \left(\vec{i}, \vec{x}\right) \text{ et } h^i, h^j / d\vec{r} = (h^i di)^2 + (h^j dj)^2$$

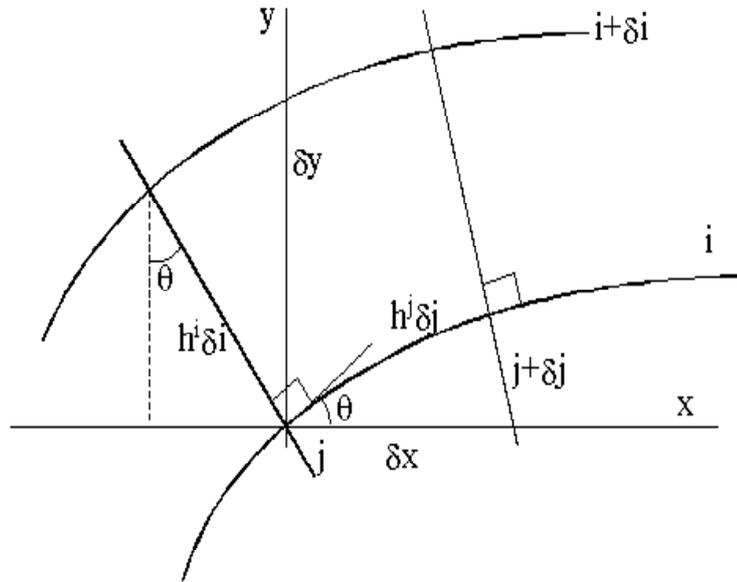


Figure 5.5. Présentation des 1 lignes orthogonales  $j = cste$  et  $i = cste$  sur  $D$

De manière évidente l'équation (5.16) permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{1}{h^i}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{1}{h^j}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

En éliminant  $h^j$  dans l'équation (5.16) on a :

$$\tan(\theta(x, y)) \left(\frac{\partial j}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial j}{\partial y}\right) = 0 \quad (5.18)$$

Si on impose  $j(x, y)$  aux limites d'un domaine d'étude  $D$  inclus dans  $P$  il est possible de résoudre l'équation (5.18) sur  $D$  tout entier.

**Conclusion générale.**

# Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié l'interaction entre un plasma et un champ magnétique.

Nous avons mis en évidence le déplacement d'un plasma sous l'action de celui-ci.

Dés lors, apparaissent deux aspects combinés, qui donnent lieu à ce que l'on appelle la magnétohydrodynamique (MHD).

La MHD est la combinaison des équations hydrodynamiques (déplacement du plasma) et des équations de Maxwell (champ magnétique).

Par la suite, nous avons présenté une application associée à cette théorie de la magnétohydrodynamique (MHD) pour la production de l'énergie électrique par confinement magnétique du plasma. Ce qui nous a permis de conclure que :

1\_ La Modélisation des équations de la magnétohydrodynamique (MHD) permet de traduire le confinement d'un plasma par un problème à frontière libre.

2\_ Pour avoir un bon confinement, il faut que le champ magnétique soit uniforme, et le plasma doit avoir la configuration d'un disque.

3\_ Le flux de champ magnétique est toujours maximal au sein du plasma.

Enfin, le travail entrepris dans le cadre de ce mémoire a ouvert une direction de recherche qui mérite à notre avis, d'être approfondie, en particulier:

L'amélioration du modèle mathématique proposé qui décrit le confinement du plasma.

La résolution du problème avec frontière libre.

# Bibliographie

- [1] **Pantellini, F.** : (2000), Univ. Jussieu, La magnétohydrodynamique
- [2] **Heyvaerts, J.** : Magnétohydrostatique de la couronne solaire (1980) , Ann. phys. Fr. 5,
- [3] **F. El Dabachi, K. Morgan, A. K. Parrott and J. Periaux**, Approximations and Numerical Methods for the solutions of Maxwell's Equations " .
- [4] **Jean-Loup Delcroix, Abraham Bers**, "Physique des plasmas".
- [5] **José-Phillippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger**, "Electromagnetisme, fondaments et applications"
- [6] **J. H. Thomas**, The reflection of Alfvén waves and the cooling of sunspots" 1978 Astrophys. J. 225, 275.
- [7] **R. Moreau**. (1990). Magnetohydrodynamic. Kluwer Acad. Publ.
- [8] Schmidt-voigt, M. (1989). Time dependent MHD simulations for cometary plasmas. Astrophys. J., 210, 433-454.
- [9] **Bhamidipati, J. R and El-Kaddah, N.** (1992). calculation of electromagnetic field and melt shape in the magnetic suspension melting process. MHD in process Metallurgy, TMS PUBL., California.
- [10] **Priest, E.**, (1982), Solar Magnetohydrodynamics , D. Reidel, Dordrecht Ruderman, M. S., Goossens, M., Balleste, J. L, Oliver, R., (1997), A&A 328, 361.

- [11] **Daniel Quémada, Hermann**, (1968). Ondes dans les plasmas-physique spatiale.
- [12] **Strang G, Fix G.J.** , (1973). An analysis of finite element methods, Prentice-Hall.
- [13] **Callen, J.D** (1989). Models of plasma confinement and heating in Tokamak, Plasma Report, University of Wisconsin.
- [14] La fusion thermonucléaire Contrôlée par Confinement Magnétique, Collection du Cea, Masson (1987).
- [15] **Pierre-Alexandre Gourdain**, (2001). Résolution de l'équilibre axisymétrique de MHD idéale avec frontière libre en utilisant un principe variationnel, thèse: Ecole centrale de Lyon, 36 Avenur Guy de Collongue-69131 Ecully Cedex France.
- [16] **Elena Podladchikova (21 Février 2002)**. Modèle statistique de chauffage de la couronne solaire calme, thèse en Co-Tutelle.Présentée à l'université d'Orléans et à l'université nationale de Fiev.
- [17] **Yelles Chaouche Lotfi** (2004). Ondes Magnéto-Atmosphériques:Oscillations de L'Ombre d'une Tache Solaire, thèse en Physique Energétique et Matériaux.Présentée à l'université de Tlemcen.
- [18] reference de la MHD in coronal structures theoretical aspects
- [19] **John peter Goedboed, Stefan poedtrs** (2004) Principal of magnetohydrodynamics
- [20] **R.Erdelyi, K petrovary, B Robert, Markus Jaschwanden, R Erdilyi** (2003) Turbulence waves and instabilities in the solar plasma.
- [21] **Wolfgang schmidt** (1994) Solar Magnetic Fields
- [22] **Heyvaerts,J.** , (1980) Stabilité MHD des structures coronales, Ann.Phys.Fr.5, 337

- [23] **Nicolas LEPROVOST**, (2004) Influence des petites échelles sur la dynamique à grande échelle en turbulence hydro et magnétohydrodynamique, Université de Paris 6.
- [24] **J.Mossino** et **J.P.Zolesio**, (1977), Solution variationnelle d'un problème non linéaire de la physique des plasmas, C.R.Acad.Sci, Série A,285, 1033.
- [25] **J.Mossino**, (1978), Application des inéquations quasi-variationnelles à quelques problèmes non linéaires de la physique des plasmas, Isr.J.of Math, 30.

répartition  $\psi$ , et d'en déduire les grandeurs pertinentes ( $B, J, \dots$ ) ainsi que la position géométrique des surfaces magnétiques.