

Table des matières

Introduction Générale	5
0.1 Note Historique	5
0.2 Intérêt du travail de la thèse - Problématique	7
1 Rappels – Généralisation de la Méthode de L.O.	11
1.1 Introduction	11
1.2 Rappels	12
1.2.1 Modélisation	12
1.2.2 Système non linéaire	12
1.2.3 Régime continu et régime transitoire	15
1.2.4 Solution de régime	16
1.2.5 Comportement asymptotique des circuits linéaires	17
1.2.6 Comportement asymptotique des circuits non linéaires	17
1.2.7 Minimisation d'une fonctionnelle – Calcul variationnel[10]	18
1.2.8 Linéarisation optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire	19
1.3 Méthode de généralisation de la linéarisation optimale	21
1.3.1 Approche	21
1.3.2 Problème	22
1.3.3 Résolution du problème	23
1.3.4 Procédure de calcul	24

1.4	Conclusion	26
2	Synthèse des Systèmes Non Linéaires	28
2.1	Introduction	28
2.2	Rappels	29
2.2.1	Dérivée optimale[36]	29
2.3	Variation de la caractéristique dynamique	31
2.3.1	Variation du temps du régime transitoire	31
2.3.2	Variation du régime de fonctionnement	31
2.4	Formalisme théorique de la synthèse	31
2.4.1	Idée du problème	31
2.4.2	Formalisme	32
2.4.3	Algorithme de la synthèse	34
3	Dérivée Optimale d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire avec Excitation	37
3.1	Introduction	37
3.2	Problématique	38
3.3	Formalisme	39
3.4	Procédure de calcul	43
3.4.1	Schéma de la procédure de la dérivée optimale	43
3.4.2	Procédure de calcul	44
3.5	Propriétés de la procédure	46
3.5.1	Cas où l'application F est linéaire	46
3.5.2	Cas général, où le système est la somme d'un terme linéaire et d'un terme non linéaire	47
3.6	Ordre de l'approximation	49
4	Mise en Oeuvre Numérique	54
4.1	Introduction	54

4.2	Synthèse des systèmes non linéaires	55
4.2.1	Schéma général	55
4.2.2	Organigramme	56
4.2.3	Application	57
4.2.4	Conclusion	70
4.3	Dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation	70
4.3.1	Schéma général	70
4.3.2	Organigramme	72
4.3.3	Application	73
4.3.4	Commentaire général	93
	Conclusion Générale	95
	Bibliographie	97

INTRODUCTION GENERALE

Introduction Générale

0.1 Note Historique

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie. Si, dans les premières investigations, l'on s'attachait surtout à en calculer les solutions au moyen de fonctions déjà connues, très vite ce point de vue s'affirma trop étroit ; c'est qu'en effet le problème fondamental de la théorie des équations différentielles est de déduire les propriétés des solutions d'une équation ou d'un système donné de la forme analytique de ceux-ci ; or, en général, les équations qui résultent d'une investigation théorique en mathématiques ou en physique ne sont pas explicitement intégrables et constituent, bien souvent, la principale source pour la définition de nouvelles fonctions dont les propriétés peuvent être prévues par une analyse systématique de grandes classes d'équations ou de systèmes.

Il faut savoir que la plupart de ces équations sont globalement de nature non linéaire. La dénomination *non linéaire* rassemble des systèmes extrêmement divers ayant peu de points communs dans leur comportement. Il en résulte qu'il n'existe jusqu'à présent pas de théorie d'ensemble d'équations non linéaires. Parmi ces problèmes non linéaires, une classe importante est modélisée par les équations différentielles ordinaires non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, u) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (0.1)$$

De nombreux travaux furent consacrés à ce sujet, différant généralement par la motivation de l'auteur (Mécanique, Géométrie, Physique, ...). Par exemple, pour la mécanique non linéaire, on considère qu'elle fut fondée à la fin du dix-neuvième siècle par le mathématicien français Henri Poincaré (*Sur les courbes définies par des équations différentielles*, 1881-1886; *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 1892-1899). Il y a lieu de citer aussi le mathématicien russe Lyapunov, fondateur de la théorie de la stabilité (*Le problème général de la stabilité du mouvement*, 1892).

Dans les travaux techniques du vingtième siècle, nous allons distinguer schématiquement trois courants :

1. Entre les deux guerres mondiales, les ingénieurs se sont intéressés, dans plusieurs pays, au problème des oscillations. Ainsi, le chercheur russe Andronov trouva en 1929 dans les travaux de Poincaré le fondement de sa *Théorie des oscillations* (1938).
2. Après la seconde guerre, plusieurs chercheurs soviétiques précisèrent et appliquèrent les travaux de Lyapunov sur la stabilité, notamment Lur'e, Malkin, Ajzerman ; puis Wegrzyn en Pologne, reformula le problème de la stabilité à la lumière de l'analyse fonctionnelle.
3. Vers 1950, des chercheurs de tous les pays s'inspirèrent des méthodes d'étude et de synthèse des systèmes linéaires continus (fonction de transfert, techniques graphiques utilisant la réponse unitaire ou la réponse en fréquences) et échantillonnés (transformée en z), méthodes devenues classiques, pour élaborer des techniques applicables aux systèmes non linéaires. On a notamment étendu à ces systèmes la méthode des réponses en fréquences (Gol'dfarb, Dutilh, Kochenburger).

On peut encore citer les travaux de : Coddington-Levinson (1955), Hale (1965, 1971), Rouche-Mawhin (1973), Pontriaguine (1975), Reinhart (1975), Siboney-Mardon (1988), Demailly (1991).

Donc, on peut dire qu'une liste exhaustive des travaux portant sur cette classe d'équations

comprend des centaines d'articles et livres qui débordent largement sur ceux du dix-neuvième siècle.

0.2 Intérêt du travail de la thèse - Problématique

L'étude des systèmes non linéaires a donné naissance à une littérature abondante dans laquelle sont exposées les différentes classes des systèmes non linéaires, les difficultés d'extension du linéaire au non linéaire, les méthodologies et l'étude de la stabilité. . . .

Les méthodes de linéarisation jouent donc un rôle très important dans l'étude de ces systèmes non linéaires qui sont en général, modélisés par des équations différentielles ordinaires non linéaires. Si beaucoup de systèmes peuvent admettre un domaine de comportement linéaire, la linéarité est toujours une approximation de la réalité. L'approximation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet de l'équation non linéaire. S'agissant de l'étude du comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre par exemple, dans le cas où la fonction n'est pas assez régulière et celui où elle est nulle. Ce qui justifie la recherche d'autres techniques de linéarisation pouvant donner des résultats satisfaisants concernant l'étude de ces problèmes non linéaires. Parmi ces techniques on peut citer la méthode de linéarisation optimale. Celle-ci a été introduite par Vujanovic [7], et est basée sur le principe des moindres contraintes de Gauss c'est à dire minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre l'équation non linéaire et l'équation linéaire. En s'inspirant du même principe de base (Arino-Benouaz) [31],[37],[39],[36] ont pu associer une matrice optimale \tilde{A} définissant une application linéaire (**Dérivée optimale**) à une équation différentielle ordinaire non linéaire. Le système linéaire obtenu est une sorte de valeur moyenne des dérivées de la fonction non linéaire le long des trajectoires partant de x_0 et allant à l'origine. Celle-ci sera vue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable dans le cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivables.

La contribution dans cette thèse est le prolongement des travaux entrepris par (Arino–Benouaz) [31],[37],[39],[36] à partir de 1994.

Nous allons dans un premier temps généraliser la méthode de linéarisation optimale à partir des résultats acquis lors de l'introduction de la dérivation optimale. Ensuite, on va faire l'étude de la synthèse des systèmes non linéaires en utilisant la méthode de la dérivée optimale.

Enfin, et en s'inspirant des perspectives données par Benouaz dans sa thèse de Doctorat [36], nous allons chercher à appliquer la dérivation optimale à des systèmes non linéaires avec excitation, c'est à dire des systèmes de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, u) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (0.2)$$

avec

$x = (x_1, \dots, x_n)$: Variables d'état.

$u = (u_1, \dots, u_n)$: Excitation.

Jusqu'à présent, cette méthode de linéarisation a été toujours appliquée dans le cas de systèmes en régime libre, c'est à dire des systèmes non linéaires de la forme $F(x)$.

Notre étude est subdivisée en deux grandes parties. La première concerne l'aspect théorique, et la deuxième partie est consacrée à l'aspect numérique, c'est à dire l'application et la mise en oeuvre numérique de l'étude théorique.

1. La première partie, comprend trois chapitres (chapitre 1, chapitre 2 et chapitre 3) :
 - Dans le premier chapitre nous allons introduire des rappels sur quelques notions fondamentales qui vont nous servir dans l'élaboration de cette thèse, ainsi que la technique de généralisation de la méthode de linéarisation optimale.
 - Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la synthèse des systèmes non linéaires, c'est à dire à l'étude des variations des propriétés dynamiques des systèmes physiques non linéaires en utilisant la méthode de la dérivée optimale.

- Dans le troisième chapitre, nous introduirons une étude sur la dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation. Notre but dans cette étude est d'associer un système optimal définissant une application linéaire à un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec excitation.
- 2. La deuxième partie concerne l'aspect numérique. Cette partie comprend le chapitre 4 dont l'objet est essentiellement la mise en oeuvre numérique de la synthèse des systèmes non linéaires en utilisant la dérivée optimale et la dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation.

PREMIER CHAPITRE

**RAPPELS,
GENERALISATION DE
LA METHODE DE L.O.**

Chapitre 1

Rappels – Généralisation de la Méthode de L.O.

1.1 Introduction

Ce premier chapitre comporte deux parties. Nous allons consacrer la première partie à rappeler quelques notions fondamentales, qui seront le plus souvent citées dans les différentes études de cette thèse. On introduira dans ces rappels des définitions concernant :

- Les systèmes non linéaires et en particulier les circuits électroniques non linéaires, sachant que les différents systèmes non linéaires qu'on va utiliser modélisent des circuits électroniques.
- Les régimes de fonctionnements des circuits électroniques : régime continu et régime transitoire.
- La solution de régime.
- Le comportement asymptotique des circuits linéaires et des circuits non linéaires.

Nous introduirons aussi, un rappel sur le calcul variationnel concernant la minimisation des fonctionnelles et sur la méthode de linéarisation optimale.

Dans la deuxième partie, on va présenter la généralisation de la méthode de linéarisation optimale.

1.2 Rappels

1.2.1 Modélisation

Quelque soit le but recherché (compréhension d'un phénomène, simulation, prédiction, synthèse d'une loi de commande, . . . etc), la connaissance d'un système dynamique requiert une modélisation mathématique de plus en plus précise. La recherche de cette précision conduit souvent à une modélisation sous forme d'équations différentielles à structure non linéaire, soit parce que des phénomènes non linéaires jouent un rôle prépondérant, soit parce que dans certaines conditions de fonctionnement, le système voit ses caractéristiques dynamiques varier et qu'il est nécessaire d'en tenir compte pour l'analyse de la stabilité ou pour la conception d'une loi de commande qui présente certaines propriétés de robustesse. La modélisation peut être menée par le biais d'une analyse phénoménologique détaillée et de l'application de certaines lois fondamentales des disciplines scientifiques concernées décrivant ces phénomènes. On obtient alors un modèle mathématique de connaissance.

1.2.2 Système non linéaire

Espace d'état

En général l'état d'un système peut être décrit de plusieurs façons selon le jeu des variables physiques que l'on utilise. Lorsque l'on change de représentation physique, les paramètres sont modifiés mais l'état reste le même. L'espace d'état M d'un système non linéaire doit être considéré comme une surface. L'état x du système a une réalité intrinsèque : c'est un point sur cette surface. Les variables d'état sont les coordonnées de ce point relativement à un paramétrage de la surface. Les changements de représentation physique sont souvent non linéaires et les coordonnées sont donc des coordonnées curvilignes.

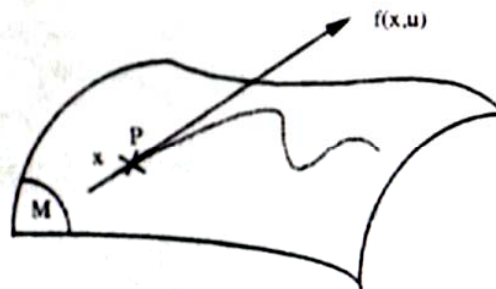
Il n'existe en règle générale pas de paramétrisation globale de l'espace d'état d'un système non linéaire. C'est à dire que tout système de coordonnées présentera des singularités. L'espace d'état est donc en réalité ce que les mathématiciens appellent une variété, notion qui généralise l'idée de surface et non pas un espace affine.

Représentation d'état

Si l'on change de repère, les équations sont différentes mais le système est le même. Une représentation d'état intrinsèque ne doit pas être liée au repère. Quand on écrit

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u) \quad (1.1)$$

il faut pour être rigoureux, considérer F comme un champ de vecteurs paramétré par u sur la variété d'état M . A chaque couple (x, u) ce champ associe une direction $F(x, u)$ tangente à la variété d'état au point P de coordonnées x sur M . C'est la direction dans laquelle le système peut se déplacer.



Trajectoire sur l'espace d'état

Figure (1.1)

Pour un système mécanique ou électrique F est le champ de forces. La commande u permet de modifier ce champ afin d'obtenir le comportement désiré.

On écrira encore sous la forme (1.1) la représentation d'état du système projetée dans un repère. F désigne alors la représentation du champ de vecteur dans la base choisie

et x les coordonnées de l'état dans cette base. L'équation d'état est un ensemble de n équations non linéaires ordinaires.

Définition des systèmes non linéaires

Rappelons qu'on appelle systèmes linéaires, les systèmes physiques représentés par des équations différentielles linéaires à coefficient constants. L'hypothèse de linéarité équivalente au principe de superposition qui peut s'énoncer :

- si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les réponses respectives à deux entrées (qui ne sont pas nécessairement appliquées au même endroit au système) $e_1(t)$ et $e_2(t)$, la réponse à l'entrée $e_1(t) + e_2(t)$ sera $s_1(t) + s_2(t)$: propriété d'additivité,
- dans le cas d'un système linéaire à une entrée $e(t)$ et une sortie $s(t)$: si la réponse du système à $e(t)$ est $s(t)$, sa réponse à l'entrée $\chi e(t)$ sera $\chi s(t)$, χ étant une constante: proportionnalité des effets aux causes ou homogénéité,

doit être vérifié.

Les systèmes non linéaires par opposition aux systèmes linéaires, sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit, le principe de superposition ne s'y applique pas.

Nous allons utiliser dans notre travail des systèmes physiques non linéaires modélisant des circuits électroniques. Donc, on peut dire que la non linéarité d'un montage en électronique (circuit) peut surgir de deux façons :

1. Soit parce que l'on sort du domaine où la représentation linéaire des éléments du montage est valide,
2. Soit parce que l'on utilise à dessein des éléments essentiellement non linéaires (par exemple des diodes ou un amplificateur opérationnel en régime saturé).

1.2.3 Régime continu et régime transitoire

Par définition, le régime continu est celui où toutes les tensions dans un circuit et toutes les intensités qui le parcourent sont indépendantes du temps.

En pratique, un tel régime ne dure pas longtemps. Entre l'instant où aucun courant ne circule et celui où expérimentalement, on constate que le régime est continu, il existe une période où les courants et tensions évoluent pour atteindre leur valeur définitive; ce régime temporaire est appelé : régime transitoire.

La connaissance des courants et tensions transitoires est souvent de très grande importance, mais leur étude est dans le cas général très complexe. Cependant pour les circuits linéaires, on montre que l'allure des phénomènes transitoires est en fait déconnectée du régime continu final; mathématiquement l'évolution des courants ou des tensions dans un circuit linéaire est régie par une équation différentielle linéaire (où plusieurs) avec *second membre*, le second membre étant lié à l'existence de sources (de tension ou de courant) dans le circuit.

La théorie de ces équations nous indique que la solution générale est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre. C'est la solution générale de l'équation sans second membre qui, compte tenu des conditions initiales, décrit le régime transitoire, solution qui s'amortit au cours du temps à cause des phénomènes dissipatifs, comme l'effet Joule; il ne reste que la solution particulière qui décrit le régime continu ou le régime permanent. Donc on peut définir la solution générale de la façon suivante

$$x(t) = x_T(t) + x_P(t),$$

avec

$x_T(t)$: solution associée au régime transitoire,

$x_P(t)$: solution associée au régime permanent.

1.2.4 Solution de régime

C'est la solution qui s'établit après qu'un certain laps de temps soit écoulé pendant lequel les phénomènes transitoires ont lieu. Mais, cette formulation laisse la notion de solution de régime trop vague. En effet, il faudrait au moins donner l'ordre de grandeur du temps transitoire si l'on veut caractériser la solution de régime de cette manière. D'autre part, le temps transitoire n'est connu qu'après l'étude des phénomènes transitoires, ce qui représente une étude plus détaillée que celle du régime. On parvient à séparer les phénomènes transitoires des phénomènes de régime en définissant la solution de régime comme étant la solution asymptotique quand $t \rightarrow \infty$. En adoptant ce point de vue, il n'est nullement sous-entendu qu'il faille attendre un temps infiniment long jusqu'à ce qu'un régime s'établisse. Au contraire, une solution ne peut plus être distinguée de la solution de régime après un temps t qui, suivant le cas, peut paraître très court à l'observateur. Néanmoins, on pose $t \rightarrow \infty$ parce que ce temps n'est pas connu à cette étape de l'étude du circuit. Dans le cadre des circuits linéaires, si les fréquences propres du circuit se situent dans le demi-plan de gauche et si le circuit possède une seule source d'excitation (sinusoïdale), la solution de régime est la solution sinusoïdale unique du circuit. A partir de celle-ci, on compose la solution de régime d'un circuit avec un nombre arbitraire de sources d'excitations quelconques par superposition.

Cette approche n'est plus possible pour les circuits non linéaires. Parmi toutes les solutions asymptotiquement stables avec le même comportement asymptotique, y en a-t-il une qui mériterait le nom de solution de régime plus que les autres? Tout dépend de l'allure des sources d'excitation. Dans le cas des circuits en régime libre et des circuits avec des sources d'excitations périodiques, on peut répondre par l'affirmative. Il est possible que l'on puisse définir de manière satisfaisante la solution de régime pour d'autres types de sources d'excitations. Par contre, il est difficile de concevoir qu'une solution soit privilégiée par rapport aux autres en présence de sources avec une dépendance temporelle absolument irrégulière.

Théorème 1.1 *Unicité et nature de la solution de régime*

— *Si une solution stable et bornée $\xi(t)$ d'un circuit en régime libre possède une solution de régime $\xi_\infty(t)$, alors elle est unique. Elle est soit constante, soit périodique, soit presque périodique.*

— *La solution de régime associée à une solution stable et bornée d'un circuit dont les sources d'excitations sont périodiques de période T , est unique, si elle existe. Elle est soit périodique de période T , soit périodique de période mT , avec $m > 1$ entier, soit presque périodique.*

1.2.5 Comportement asymptotique des circuits linéaires

Toutes les solutions d'un circuit linéaire asymptotiquement stable comportant une seule source dont la dépendance temporelle est sinusoïdale, convergent vers une même solution sinusoïdale. Ce régime sinusoïdal est unique et il possède la même période que la source. Par contre, les tensions et les courants des branches ont des phases qui diffèrent de celle de la source.

Cette propriété est également vérifiée dans le cas particulier de la fréquence zéro, c'est-à-dire des circuits en régime libre où la solution de régime est constante.

Si plusieurs sources sont présentes dans un circuit, la solution de régime est la somme des solutions de régime de chaque source considérée séparément, les autres sources étant annulées. Toutes les solutions convergent vers cette solution de régime.

1.2.6 Comportement asymptotique des circuits non linéaires

Que peut-on attendre du régime d'un circuit non linéaire? Comme le principe de superposition n'est pas vérifié, il faut dès le début renoncer à l'idée que le régime d'un circuit avec plusieurs sources soit la somme des régimes des différentes sources prises une par une. On ne s'attend non plus à un régime purement sinusoïdal si un circuit non linéaire est excité par une source sinusoïdale. Par contre, le régime devrait refléter les symétries temporelles des sources.

Nous appelons symétrie d'un circuit, toute transformation qui laisse les équations du circuit invariées. Nous admettons des transformations des courants et des tensions ainsi que des transformations du temps et les deux combinées. A titre d'exemple, toute translation du temps est une symétrie d'un circuit en régime libre ou encore, la translation du temps par T est une symétrie d'un circuit dont les sources sont périodiques de période T . Ce sont deux exemples de symétrie temporelle.

Nous appelons symétrie d'une solution toute transformation qui laisse la solution invariante.

Si les équations sont invariées sous une transformation, tel n'est en général pas, le cas des solutions; par exemple, les solutions d'un circuit en régime libre ne sont en général pas constantes. Par contre, on s'attend à ce que la solution de régime possède les mêmes symétries que le circuit. En particulier, la solution de régime d'un circuit en régime libre devrait être constante et la solution de régime d'un circuit avec des sources périodiques devrait être périodique.

1.2.7 Minimisation d'une fonctionnelle – Calcul variationnel[10]

L'objectif du calcul variationnel est de minimiser (ou maximiser) certaines fonctions, appelées fonctionnelles, que le calcul différentiel classique ne peut étudier.

Soit la fonctionnelle

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t) dt, \quad (1.2)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

t_0 et t_1 sont donnés.

Le but étant de minimiser la fonctionnelle par rapport à x . Supposons que J réalise son minimum en $y \in x$

$$J(y) \leq J(x). \quad (1.3)$$

Si y réalise un minimum de la fonctionnelle J , alors y vérifie les équations d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y, \dot{y}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(y, \dot{y}, t) = 0. \quad (1.4)$$

Théorème 1.2 *Pour que $y \in x$ réalise un minimum de J , il faut que y soit solutions des équations d'Euler.*

1.2.8 Linéarisation optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire

Celle ci à été introduite par Vujanovic (1973), initialement pour l'étude des vibrations non linéaires[13]. Elle a été appliquée par la suite à l'étude de la non linéarité dans le cas de transfert de chaleur [7],[20]. Récemment, elle a été utilisée par Jordan et al. [22] pour l'analyse des systèmes non linéaires régissant les régimes transitoires de circuits électroniques ainsi que la linéarisation d'équation d'état [23],[21].

Dans leur étude, Jordan et al. [22] ont utilisé la méthode de linéarisation optimale pour régler un problème de non-linéarité dans les équations d'état modélisant le fonctionnement de circuits électroniques. Le but recherché étant d'améliorer la linéarisation classique.

Partant de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

les auteurs supposaient que:

- i)* La solution de l'équation du système non linéaire (1.5) existe et elle est unique.
- ii)* Les circuits étudiés oscillent lentement avec le temps.
- iii)* Les systèmes non linéaires étudiés et les systèmes linéaires obtenus sont stables, c'est à dire que la matrice de l'équation linéarisée admet des valeurs propres dont les parties réelles sont négatives.

Le but étant d'associer une application linéaire à l'équation non linéaire (1.5) de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A^*x \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

En minimisant l'écart $\varepsilon(t)$ entre (1.5) et (1.6)

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - Ax(t) \quad (1.7)$$

au sens des moindres carrés le long de la solution de l'équation $A = DF(0)$ ($DF(0)$ étant la Jacobienne de F en 0).

La résolution du problème d'optimisation ainsi posée se réduit à la résolution du système d'équations suivant

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^* \int_0^{+\infty} dt x_k x_j = \int_0^{+\infty} dt x_j f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.8)$$

ce qui permet d'aboutir au problème linéaire optimale

$$\dot{x} = A^*x \quad (1.9)$$

aux mêmes conditions initiales que le problème non linéaire.

Inconvénients

Cette méthode présente des inconvénients qui peuvent se résumer comme suit:

1. Si $DF(0)$ n'existe pas: Cas où la fonction non linéaire définissant l'équation est non régulière et donc non différentiable.
2. Si $DF(0) = 0$.
3. Si $DF(0)$ est stable, mais non pas asymptotiquement stable.

Exemple 1

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

La dérivée au point $(0,0)$ admet des valeurs propres imaginaires, donc ce système est stable mais non pas asymptotiquement stable.

Dans ces trois cas, on ne peut appliquer la méthode de linéarisation optimale.

1.3 Méthode de généralisation de la linéarisation optimale

1.3.1 Approche

La généralisation des résultats de Jordan et al. va se faire selon les considérations suivantes :

- Précisions sur l'existence et l'unicité de la meilleure approximation au sens des moindres carrés.
- Choix de la matrice initiale $A_0 = DF(x_0)$ à la place de $A_0 = DF(0)$.
- Donner une forme générale à la matrice optimale, au lieu de résoudre le système en (a_{ij}) tel que présenté par Jordan et al.
- Précision sur le choix de la matrice initiale A_0 .

1.3.2 Problème

Considérons l'équation différentielle ordinaire non linéaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

où

$x \in \mathbb{R}^n$, F est définie dans un certain ouvert Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^n , avec les hypothèses suivantes:

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ pour tous $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe: Cette hypothèse ne suppose pas la stabilité du point d'équilibre.

H3) F est continue, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz γ , et par conséquent F est presque partout différentiable.

Notre but est de trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A^* x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

approchant l'équation non linéaire (1.10) aux mêmes conditions initiales telle que la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (1.12)$$

soit minimale. La minimisation de la fonctionnelle $G(A)$ se fait par rapport à des solutions issues de la valeur initiale x_0 et tendant vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

Remarque 1.1 *Cette approche est de type optimisation au sens des moindres carrés. L'existence et l'unicité de la meilleure approximation au sens des moindres carrés sont*

garanties par les théorèmes généraux d'approximation [24],[18],[26].

1.3.3 Résolution du problème

La minimisation de $G(A)$ est obtenue en calculant la différentielle par rapport à A . Donc, en différentiant $G(A)$ par rapport à A le long d'une fonction x , on obtient

$$DG(A)\alpha = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) - F(x(t)), \alpha x(t) \rangle dt \quad (1.13)$$

pour toute matrice α . En particulier, pour les matrices α telles que $\alpha_{l,m} = 1, \alpha_{i,j} = 0$, si $(i,j) \neq (l,m)$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} \langle Ax(t) - F(x(t)), \alpha x(t) \rangle dt = \int_0^{+\infty} [Ax(t) - F(x(t))]_l x_m(t) dt. \quad (1.14)$$

Supposons que A minimise (1.12) le long d'une fonction donnée x , la relation (1.14) est égale à zéro, et

$$\int_0^{+\infty} [Ax(t) - F(x(t))]_l x_m(t) dt = 0, \forall 1 \leq l, m \leq n. \quad (1.15)$$

En notant $(a_{i,j})$ le terme général de la matrice A^* , on obtient

$$\sum_{j=1}^n a_{l,j} \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} = \left(\int_0^{+\infty} f_l(x(t)) x_m(t) dt \right)_{1 \leq l, m \leq n}. \quad (1.16)$$

En introduisant la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \quad (1.17)$$

on obtient

$$A^* = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}, \quad (1.18)$$

A^* est définie et unique si

$$\Gamma(x) = \left[\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right] \quad (1.19)$$

est inversible.

1.3.4 Procédure de calcul

La minimisation se fait en deux étapes. Concernant le choix de la matrice initiale pour le démarrage qui peut apparaître comme arbitraire, on va préciser qu'en réalité il ne l'est pas. Pour cela considérons la fonctionnelle (1.12) non plus fonction seulement de A , mais en fonction de A et x , c'est à dire

$$G(A, x) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (1.20)$$

Si x réalise un minimum de cette fonctionnelle alors x vérifie les équations d'Euler (voir rappel sur le calcul variationnel vu dans la section (1.2.7)), avec

$$f(x, \dot{x}, t) = (Ax(t) - F(x(t)))^T (Ax(t) - F(x(t))). \quad (1.21)$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \dot{x}, t) = 2 (A - \dot{F}(x))^T (Ax - F(x)) \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t) = 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

ce qui donne

$$(A - \dot{F}(x))^T (Ax - F(x)) = 0. \quad (1.23)$$

L'équation (1.23) est égale à 0 si

$$A = DF(x) \quad \text{ou} \quad F(x) = Ax. \quad (1.24)$$

Donc tout ce passe comme si on avait à résoudre le système en (A, x) suivant

$$\begin{cases} A^* = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \\ A = DF(x). \end{cases} \quad (1.25)$$

Pour le résoudre, il faut faire en quelque sorte une substitution qui peut dans ce cas motiver le choix de la matrice $A_0 = DF(x_0)$, x_0 étant un point arbitraire pris dans un voisinage de 0 et tel que F est différentiable en x_0 .

Considérons, le système (1.10)

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), x(0) = x_0.$$

Première étape

Calcul de $A_0 = DF(x_0)$.

Deuxième étape

Pour calculer A^* à partir de A_0 , on doit d'abord résoudre

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y(t), y(0) = x_0. \quad (1.26)$$

On notera $y_0(t)$ comme étant la solution du système (1.26), cette solution s'écrit sous la forme de

$$y_0(t) = e^{tA_0} x_0. \quad (1.27)$$

La minimisation de la fonctionnelle au sens des moindres carrées

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt \quad (1.28)$$

nous conduit à A^* .

A^* est unique et est déterminée par la formule (1.18). On peut l'écrire

$$A^* = \left[\int_0^{+\infty} [F(e^{tA_0} x_0)] [e^{tA_0} x_0]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} [e^{tA_0} x_0] [e^{tA_0} x_0]^T dt \right]^{-1}. \quad (1.29)$$

A^* est par définition la linéarisation optimale de l'application non linéaire F en x_0 .

1.4 Conclusion

Par cette généralisation, nous avons voulu clore un travail commencé par Benouaz en collaboration avec Jordan.

En effet, les résultats présentés ici sur la linéarisation optimale confortent les bases théoriques de celle-ci.

DEUXIEME CHAPITRE

SYNTHESE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Chapitre 2

Synthèse des Systèmes Non Linéaires

2.1 Introduction

La synthèse d'un système non linéaire est l'étude de ses propriétés dynamiques. Si par exemple, on change les valeurs des caractéristiques dynamiques d'un système, on peut faire varier[6],[11]: le temps du régime transitoire, le premier maximum de la solution, le temps de décharge (pour une capacité), le régime de fonctionnement...

Dans l'étude des systèmes linéaires et non linéaires, des méthodes existent pour réaliser la synthèse. Ce travail s'inscrit dans la ligne des travaux réalisés par Jordan et al. [21]. Nous allons généraliser la méthode utilisée en introduisant la dérivation optimale. Pour cela rappelons brièvement la méthode de la dérivée optimale, ainsi que les différentes procédures permettant de varier les caractéristiques dynamiques des systèmes étudiés.

2.2 Rappels

2.2.1 Dérivée optimale[36]

Algorithme

On utilise itérativement le formalisme développé pour la généralisation de la méthode de linéarisation optimale.

On suppose que les matrices successives A_j sont stables, leur spectre est contenu dans $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$. La matrice initiale est la matrice Jacobienne de F en x_0 qui en principe est un point arbitraire pris dans un voisinage de 0 et tel que F soit différentiable en x_0 .

Puisque F est Lipschitzienne, on sait qu'elle est presque partout différentiable [14].

Considérons le système

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), x(0) = x_0.$$

Première étape

Calcul de $A_0 = DF(x_0)$

Deuxième étape

Calcul de A_1 à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y(t) \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt. \quad (2.2)$$

A_1 est déterminée de manière unique par la formule

$$A = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}, \quad (2.3)$$

où x est solution de l'équation (2.1). On voit ainsi que mis à part la matrice initiale, les matrices déterminées par la procédure ne sont pas les matrices Jacobiennes de F en un point donné.

Par la suite, il est nécessaire que les conditions du début de cette section soient satisfaites à chaque pas. Si nous supposons que cela est vrai, alors la procédure marche comme suit:

Troisième étape

Pour calculer A_j à partir de A_{j-1} , on doit d'abord résoudre

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{j-1}] y \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

On note $y_j(t)$ la solution de l'équation (2.4).

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t)) - A y_j(t)\|^2 dt \quad (2.5)$$

conduit à A_j .

La relation entre A_j et A_{j-1} s'écrit, alors

$$A_j \Gamma(y_j) = \int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt. \quad (2.6)$$

En supposant encore que $\Gamma(y_j)$ est inversible, A_j s'écrit

$$A_j = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt \right] [\Gamma(y_j)]^{-1}. \quad (2.7)$$

Si la suite A_j converge, alors la limite \tilde{A} est appelée la dérivée optimale de F en x_0 .

2.3 Variation de la caractéristique dynamique

2.3.1 Variation du temps du régime transitoire

La variation du temps du régime transitoire est possible grâce au changement qu'on effectue au niveau des valeurs propres du système linéaire obtenu par la méthode de la dérivation optimale. Si ces valeurs propres sont notées λ_i , et si nous voulons par exemple, faire varier le temps du régime transitoire alors, les nouvelles valeurs propres S_i du nouveau système linéaire s'écrivent

$$S_i = \frac{\lambda_i}{\eta}, \quad \eta \in \mathbb{N} : \text{Cas où nous voulons étendre le temps du régime transitoire.}$$

$$S_i = \eta \cdot \lambda_i, \quad \eta \in \mathbb{N} : \text{Cas où nous voulons réduire le temps du régime transitoire.}$$

2.3.2 Variation du régime de fonctionnement

Si par exemple, un système fonctionne en régime oscillatoire amorti et qu'on désire le faire fonctionner en régime apériodique, on doit faire varier les valeurs propres de la matrice optimale en éliminant leurs parties imaginaires. Cette procédure permet d'avoir le régime de fonctionnement souhaité.

2.4 Formalisme théorique de la synthèse

2.4.1 Idée du problème

Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, F est définie dans un certain ouvert Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^n , sous les hypothèses $H1), H2), H3)$

Le but étant de chercher à varier les caractéristiques dynamiques du système (2.8) et à lui faire correspondre par la synthèse, un système non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = L(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

correspondant au système linéaire corrigé

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{E}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

dont les valeurs propres sont S_i .

2.4.2 Formalisme

Supposant que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

est le système linéaire optimal associé au problème non linéaire (2.8) et que \tilde{A} est la matrice optimale de valeurs propres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$.

Pour faire varier la dynamique du système non linéaire (2.8), on doit changer les valeurs propres de la matrice optimale \tilde{A} . Pour cela, on doit déterminer la matrice K_B tel que

$$\frac{dx}{dt} = (\tilde{A} - K_B)x = \tilde{E}x, \quad (2.12)$$

\tilde{E} étant la matrice de transition de valeurs propres désirées $S_i, i = 1, 2, \dots, n$.

K_B étant déterminée de la manière suivante:

Soient $S_i, i = 1, 2, \dots, n$ les valeurs propres désirées, pour déterminer la matrice K_B , on doit suivre les étapes suivantes:

- Calculer les valeurs propres λ_i de la matrice optimale \tilde{A} .
- Exprimer les vecteurs propres de la matrice \tilde{A} sous forme matricielle notée M .
- Définir la matrice diagonale K dont les éléments K_{ij} sont déterminés à partir de

$$k_{ij} = \begin{cases} \lambda_i - S_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}. \quad (2.13)$$

- En utilisant la forme canonique de Jordan, et sachant que la matrice de vecteurs propres M est une matrice non singulière, la relation donnant la matrice K_B s'écrit

$$K_B = M K M^{-1}. \quad (2.14)$$

On vérifie que K_B admet comme valeurs propres $\chi_i = \lambda_i - S_i, i = 1, \dots, n$.

Une fois la matrice K_B trouvée, on calcule la matrice de transition \tilde{E}

$$\tilde{E} = \tilde{A} - K_B \quad (2.15)$$

de valeurs propres désirées $S_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Le nouveau système linéaire s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{E} x \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Une fois le système linéaire (2.16) déterminé, on va pouvoir lui faire correspondre un système non linéaire, sachant que la matrice optimale s'écrit dans ce cas sous la forme

suivante

$$\tilde{E} = \left[\int_0^{+\infty} [L(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1}, \quad (2.17)$$

$L(x(t))$ est le système non linéaire désiré.

Ce système non linéaire peut être modéliser comme suit

$$\begin{cases} l_1 = \alpha_{11}g_1 + \alpha_{12}g_2 + \cdots + \alpha_{1j}g_n + R_1 \\ l_2 = \alpha_{21}g_{[n+1]} + \alpha_{22}g_{[n+2]} + \cdots + \alpha_{2j}g_{[n+j]} + R_2 \\ l_3 = \alpha_{31}g_{[2n+1]} + \alpha_{32}g_{[2n+2]} + \cdots + \alpha_{3j}g_{[2n+j]} + R_3 \\ \vdots \\ l_i = \alpha_{i1}g_{[(i-1)n+1]} + \alpha_{i2}g_{[(i-1)n+2]} + \cdots + \alpha_{ij}g_{[(i-1)n+j]} + R_i, \end{cases} \quad (2.18)$$

d'une façon plus générale, on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{cases} l_i = R_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}g_{[(i-1)n+j]} \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

avec

$g = h(x)$: c'est une fonction de x choisie, qui peut être linéaire ou non linéaire,

R_i : constantes.

Les α_{ij} étant inconnues, on cherchera à les déterminer en faisant une identification terme à terme connaissant la matrice de transition \tilde{E} .

2.4.3 Algorithme de la synthèse

Considérons le système non linéaire suivant

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Pour effectuer la synthèse de ce système, on doit suivre les étapes suivantes:

Première étape

Déterminer le système optimal linéaire correspondant au système non linéaire initial par la méthode de la dérivée optimale. Ce système s'écrit donc

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Deuxième étape

Faire varier la dynamique du système linéaire optimal et faire la synthèse de façon à obtenir la dynamique souhaitée pour le système non linéaire. Cette variation de la dynamique s'effectue au niveau des valeurs propres de la matrice optimale \tilde{A} et on cherchera à trouver la matrice de transition \tilde{E} .

Troisième étape

Faire l'étude de la stabilité du nouveau système linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{E}x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

correspondant au système non linéaire souhaité.

Quatrième étape

Faire correspondre au nouveau système linéaire (2.16) un système non linéaire de la forme (2.19).

Cinquième étape

Faire le calcul des valeurs des éléments composant le nouveau système non linéaire.

Une fois le système non linéaire (2.19) déterminé (par le calcul des α_{ij}), on va pouvoir le résoudre numériquement et comparer les résultats obtenus avec les résultats désirés.

Application

Plusieurs exemples seront présentés et commentés dans le chapitre 4 réservé à la mise en oeuvre numérique.

TROISIEME CHAPITRE

DERIVEE OPTIMALE

D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

ORDINAIRE NON LINEAIRE

AVEC EXCITATION

Chapitre 3

Dérivée Optimale d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire avec Excitation

3.1 Introduction

Une classe d'équations différentielles ordinaires non linéaires est celle caractérisant le comportement des circuits électroniques. Parmi l'infinité de dépendances temporelles possibles, les circuits en régime libre et les circuits avec sources d'excitation sinusoïdales jouent un rôle important.

Les systèmes en régime libre servent surtout à modéliser le comportement des circuits en l'absence de signaux. C'est l'état d'équilibre du circuit avant qu'il ne soit excité par un signal de durée finie et le retour à l'état d'équilibre après l'injection de celui-ci.

Les systèmes avec sources d'excitation sinusoïdales modélisent surtout des circuits de distribution d'énergie électrique et des circuits de transmission de signaux modulés. Une des caractéristiques les plus importantes du comportement d'un circuit est sa ou ses solutions de régime. La solution de régime est surtout dictée par le comportement asymptotique des sources qui dépendent du temps.

On s'intéresse, dans cette étude aux systèmes physiques modélisant des circuits électroniques avec source d'excitation qui sont en général décrits par des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On introduira dans ce chapitre une méthode de linéarisation de ces systèmes non linéaires : la méthode de la *Dérivée Optimale*. Cette méthode de linéarisation a été déjà utilisée dans le cas des systèmes en régime libre ($u(t) = 0$)[36]; on essaiera donc de l'appliquer à des systèmes physiques avec excitation.

3.2 Problématique

Considérons le système d'équation différentielle ordinaire non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$x = (x_1, \dots, x_n)$ la fonction inconnue,

$u = (u_1, \dots, u_n)$ représente la source d'excitation qui peut être constante (continue), ou variable en fonction du temps (source sinusoïdale),

$F = (f_1, \dots, f_n)$ est une fonction définie dans un certain ouvert Ω , à valeurs dans \mathbb{R}^n .

En l'absence de toute excitation ($u(t) = 0$) le système est au point d'équilibre.

Nous avons les hypothèses suivantes:

H1) $F(0, 0) = 0$.

H2) F est continue, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz γ .

Le problème que nous nous posons peut être traduit comme suit:

— Trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

approchant l'équation non linéaire (3.1) aux mêmes conditions initiales et telle que la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t), u(t)) - Ax(t) - Bu(t)\|^2 dt \quad (3.3)$$

soit minimale. $F(x(t), u(t))$ étant comme au dessus, et $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ à déterminer.

Le problème ainsi posé est de type optimisation au sens des moindres carrés, le but étant de chercher à remplacer l'équation initiale non linéaire par une équation linéaire. Cela veut dire: chercher à faire une approximation de la solution du système (3.1) par celle de (3.2). La minimisation de la fonctionnelle $G(A, B)$ par rapport à A et B se fait par rapport à des solutions issues du point initial et tendant vers la solution de régime quand $t \rightarrow +\infty$.

3.3 Formalisme

La minimisation de la fonctionnelle $G(A, B)$ est obtenue en calculant la différentielle par rapport à A et B . Cette minimisation nous permet de calculer les matrices optimales \tilde{A} et \tilde{B} , telle que

$$\begin{cases} DG(A) \alpha = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t)), \alpha x(t) \rangle dt \\ DG(A) \beta = 2 \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t)), \beta x(t) \rangle dt \end{cases} \quad (3.4)$$

pour toutes matrices α et β , en particulier pour les matrices telle que

$$\begin{cases} \alpha_{l,m} = 1; \alpha_{ij} = 0 \\ \beta_{l,m} = 1; \beta_{ij} = 0 \end{cases} \text{ si } (i,j) \neq (l,m). \quad (3.5)$$

Pour la matrice A , on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t)), \alpha x(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{+\infty} [Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t))]_l x_m(t) dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Supposons que A minimise (3.3) le long d'une fonction donnée x . La relation (3.6) est égale à zéro, et

$$\left(\int_0^{+\infty} [Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t))]_l x_m(t) dt \right)_{\forall 1 \leq l, m \leq n} = 0. \quad (3.7)$$

En notant (a_{ij}) le terme général de la matrice A et (b_{ij}) le terme général de la matrice B , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[a_{l,j} \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} + b_{l,j} \left(\int_0^{+\infty} u_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \right] \\ &= \left(\int_0^{+\infty} f_l(x(t), u(t)) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En posant

$$\begin{cases} \Gamma_A(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Phi_A(u, x) = \int_0^{+\infty} [u(t)] [x(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} u_j(t) x_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Psi_A(x, u) = \int_0^{+\infty} [F(x(t), u(t))] [x(t)]^T dt, \end{cases} \quad (3.9)$$

on obtient

$$A\Gamma_A(x) + B\Phi_A(u, x) = \Psi_A(x, u) . \quad (3.10)$$

Pour la matrice B , on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \langle Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t)), \beta x(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{+\infty} [Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t))]_l u_m(t) dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Supposons que B minimise (3.3) le long d'une fonction donnée u . La relation (3.11) est égale à zéro, et:

$$\left(\int_0^{+\infty} [Ax(t) + Bu(t) - F(x(t), u(t))]_l u_m(t) dt \right)_{\forall 1 \leq l, m \leq n} = 0. \quad (3.12)$$

En notant (a_{ij}) le terme général de la matrice A et (b_{ij}) le terme général de la matrice B , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[a_{l,j} \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) u_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} + b_{l,j} \left(\int_0^{+\infty} u_j(t) u_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \right] \\ &= \left(\int_0^{+\infty} f_l(x(t), u(t)) u_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

En posant

$$\begin{cases} \Gamma_B(u) = \int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} u_j(t) u_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Phi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [u(t)]^T dt = \left(\int_0^{+\infty} x_j(t) u_m(t) dt \right)_{1 \leq j, m \leq n} \\ \Psi_B(x, u) = \int_0^{+\infty} [F(x(t), u(t))] [u(t)]^T dt, \end{cases} \quad (3.14)$$

on obtient

$$A\Phi_B(x, u) + B\Gamma_B(u) = \Psi_B(x, u) . \quad (3.15)$$

Les équations (3.10) et (3.15) nous permettent d'avoir les matrices A et B

$$\begin{cases} A = [\Psi_A(x, u) - (B) \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B = [\Psi_B(x, u) - (A) \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Les matrices A et B sont définies et uniques à conditions que les matrices $\Gamma_A(x)$ et $\Gamma_B(u)$ soient inversibles.

3.4 Procédure de calcul

3.4.1 Schéma de la procédure de la dérivée optimale

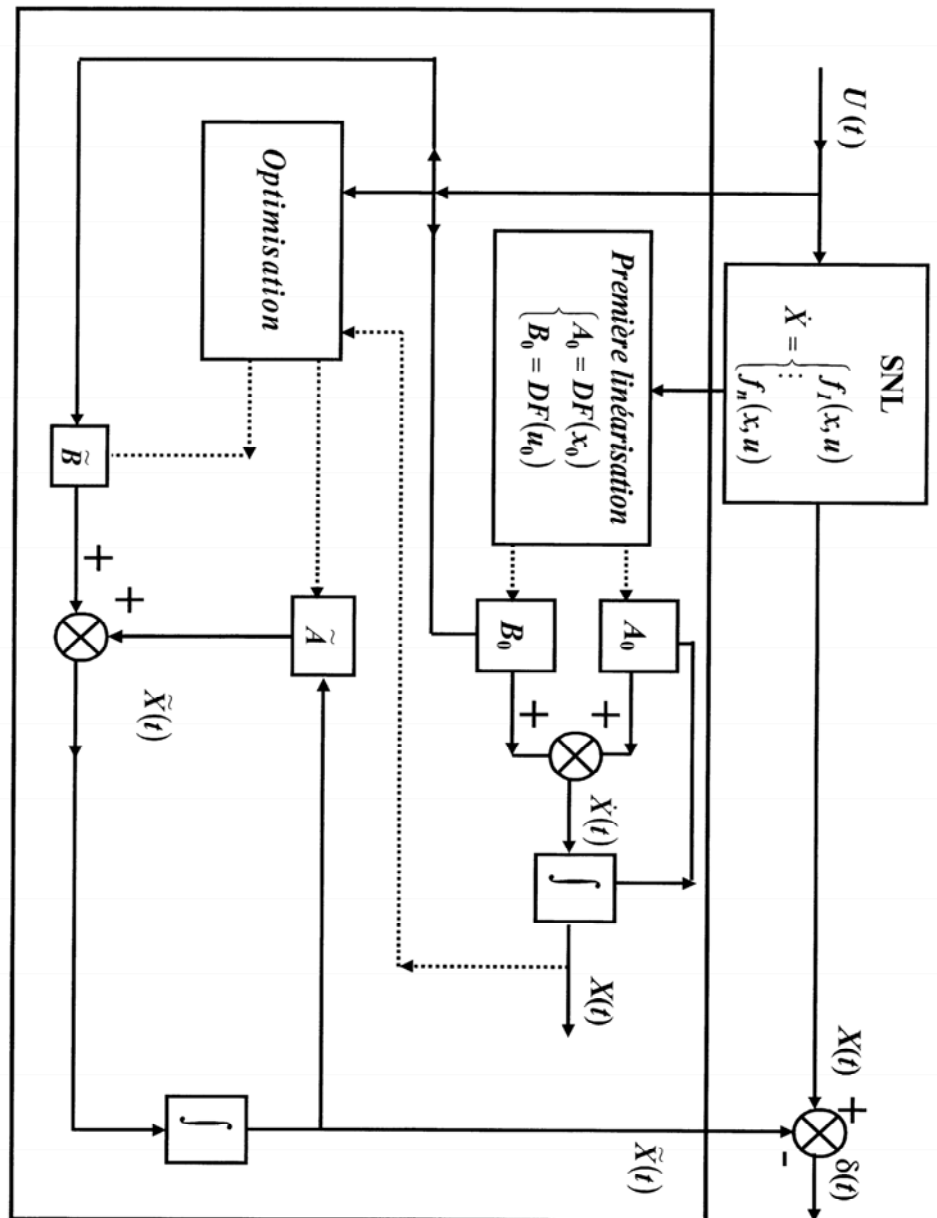


Figure (3.1) Schéma de la procédure de la dérivée optimale

3.4.2 Procédure de calcul

On va utiliser le calcul précédent de manière itérative. On suppose que les matrices successives A_j et B_j sont de type stable, leur spectre est contenu dans $\{z : \text{Re } z < 0\}$. Les matrices initiales A_0 et B_0 sont respectivement les matrices Jacobienne de F en x_0 ou $DF(x)$ existe, et en u_0 ou $DF(u)$ existe. x_0 étant la condition initiale et u_0 représente l'excitation à l'instant $t = 0$.

Considérons le système (3.1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Première étape

$$\text{Calcul de } \begin{cases} A_0 = DF(x_0) \\ B_0 = DF(u_0). \end{cases}$$

Deuxième étape

Calcul de A_1 et B_1 à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y(t) + B_0 v(t) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

qui s'écrit sous la forme suivante

$$y(t) = e^{tA_0} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_0} B_0 v(s) ds, \quad (3.19)$$

en minimisant la fonctionnelle

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t), v(t)) - Ay(t) - Bv(t)\|^2 dt. \quad (3.20)$$

A_1 et B_1 sont déterminées de manière unique par le système d'équations (3.16), où x est remplacé par y et $v(t)$ étant l'excitation à l'instant t .

On voit ainsi que mis à part les matrices initiales, les matrices déterminées par la procédure ne sont pas les matrices Jacobienne de F en un point donné. Par la suite, il est nécessaire que les conditions du début de cette étude soient satisfaites à chaque pas.

Si nous supposons que cela est vrai alors, la procédure marche comme suit:

Troisième étape

Pour calculer A_j à partir de A_{j-1} et B_j à partir de B_{j-1} , on doit d'abord résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{(j-1)}] y(t) + [B_{(j-1)}] v(t) \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.21)$$

On notera y_j la solution de l'équation (3.21) qui s'écrit

$$y_j(t) = e^{tA_{(j-1)}}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_{(j-1)}}B_{(j-1)}v_j(s) ds \quad (3.22)$$

et v_j l'excitation à l'instant t .

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t), v_j(t)) - Ay_j(t) - Bv_j(t)\|^2 dt \quad (3.23)$$

conduit à

$$[A_j] = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), v_j(t))] [y_j(t)]^T dt - (B_j) (\Phi(v_j, y_j)) \right] [\Gamma(y_j)]^{-1} \quad (3.24)$$

$$[B_j] = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), v_j(t))] [v_j(t)]^T dt - (A_j) (\Phi(y_j, v_j)) \right] [\Gamma(v_j)]^{-1}. \quad (3.25)$$

Si les suites (A_j, B_j) convergent, alors (\tilde{A}, \tilde{B}) représentent la dérivation optimale de $F(x(t), u(t))$ au point (x_0, u) .

3.5 Propriétés de la procédure

Nous considérons maintenant la situation où la procédure converge.

3.5.1 Cas où l'application F est linéaire

Si F est linéaire, alors la procédure donne F à la première itération.

Dans ce cas le système d'équations (3.16) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = \left(\int_0^{+\infty} [Ax(t) + Bu(t)] [x(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right)^{-1} \\ - (B) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [x(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right)^{-1} \\ \tilde{B} = \left(\int_0^{+\infty} [Ax(t) + Bu(t)] [u(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right)^{-1} \\ - (A) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [u(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right)^{-1}, \end{array} \right. \quad (3.26)$$

ce qui nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = (A) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right)^{-1} \\ + (B) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [x(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right)^{-1} \\ - (B) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [x(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right)^{-1} \\ \tilde{B} = (B) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right)^{-1} \\ + (A) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [u(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right)^{-1} \\ - (A) \left(\int_0^{+\infty} [x(t)] [u(t)]^T dt \right) \left(\int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right)^{-1}. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Alors on obtient $\tilde{A} = A$ et $\tilde{B} = B$, c'est à dire que la procédure donne \tilde{A} et \tilde{B} à la première itération.

On peut donc affirmer que la dérivée optimale d'un système linéaire est le système lui

même.

3.5.2 Cas général, où le système est la somme d'un terme linéaire et d'un terme non linéaire

Premier cas

Dans ce cas, nous allons considérer que le système non linéaire s'écrit

$$F(x(t), u(t)) = Mx(t) + F^*(x(t), u(t)), \quad (3.28)$$

où M est linéaire.

On a les équations (3.10) et (3.15) qui s'écrivent sous les formes suivantes pour A_1 et B_1 ,

$$\begin{aligned} A_1 \Gamma_A(x) + B_1 \Phi_A(u, x) &= \int_0^{+\infty} [Mx(t) + F^*(x(t), u(t))] [x(t)]^T dt \\ B_1 \Gamma_B(u) + A_1 \Phi_B(x, u) &= \int_0^{+\infty} [Mx(t) + F^*(x(t), u(t))] [u(t)]^T dt, \end{aligned} \quad (3.29)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} A_1 &= M + [\Psi_A^*(x, u) - B_1 \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_1 &= [M \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1} + [\Psi_B^*(x, u) - A_1 \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_A^*(x, u) &= \int_0^{+\infty} [F^*(x(t), u(t))] [x(t)]^T dt \\ \Psi_B^*(x, u) &= \int_0^{+\infty} [F^*(x(t), u(t))] [u(t)]^T dt, \end{aligned} \quad (3.31)$$

finalement

$$\begin{aligned} A_1 &= M + A_1^* \\ B_1 &= [M \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1} + B_1^* \end{aligned} \quad (3.32)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1^* &= [\Psi_A^*(x, u) - B_1 \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_1^* &= [\Psi_B^*(x, u) - A_1 \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Maintenant, pour tout j , nous avons

$$\begin{aligned} A_j &= M + A_j^* \\ B_j &= [M \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1} + B_j^* \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec

$$\begin{aligned} A_j^* &= [\Psi_A^*(x, u) - B_j \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_j^* &= [\Psi_B^*(x, u) - A_j \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Deuxième cas

Dans ce cas on considère que le système non linéaire s'écrit

$$F(x(t), u(t)) = F^*(x(t), u(t)) + Lu(t) \quad (3.36)$$

où L est linéaire.

On a les équations (3.10) et (3.15) qui s'écrivent sous les formes suivantes pour A_1 et B_1

$$\begin{aligned} A_1 \Gamma_A(x) + B_1 \Phi_A(u, x) &= \int_0^{+\infty} [F^*(x(t), u(t)) + Lx(t)] [x(t)]^T dt \\ B_1 \Gamma_B(u) + A_1 \Phi_B(x, u) &= \int_0^{+\infty} [F^*(x(t), u(t)) + Lx(t)] [u(t)]^T dt \end{aligned} \quad (3.37)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} A_1 &= [\Psi_A^*(x, u) - B_1 \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} + [L \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_1 &= [\Psi_B^*(x, u) - A_1 \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1} + L \end{aligned} \quad (3.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_A^*(x, u) &= \int_0^{+\infty} [F^*(x(t), u(t))] [x(t)]^T dt \\ \Psi_B^*(x, u) &= \int_0^{+\infty} [F^*(x(t), u(t))] [u(t)]^T dt, \end{aligned} \quad (3.39)$$

finalement

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^* + [L \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_1 &= B_1^* + L \end{aligned} \tag{3.40}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1^* &= [\Psi_A^*(x, u) - B_1 \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_1^* &= [\Psi_B^*(x, u) - A_1 \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Maintenant, pour tout j , nous avons

$$\begin{aligned} A_j &= A_j^* + [L \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_j &= B_j^* + L \end{aligned} \tag{3.42}$$

avec

$$\begin{aligned} A_j^* &= [\Psi_A^*(x, u) - B_j \Phi_A(u, x)] [\Gamma_A(x)]^{-1} \\ B_j^* &= [\Psi_B^*(x, u) - A_j \Phi_B(x, u)] [\Gamma_B(u)]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Si en particulier, certaines composantes de F sont linéaires, alors les composantes correspondantes de F^* sont égales à zéro, et les composantes correspondantes de A_j et B_j sont celle de F .

Si f_k est linéaire, alors la $k^{\text{ième}}$ ligne des matrices A_j et B_j est égale à f_k .

3.6 Ordre de l'approximation

Nous allons estimer l'écart définissant l'erreur, ce qui va permettre de préciser l'ordre de l'approximation. Ceci revient en fait à évaluer $\|x(t) - \tilde{y}(t)\|$, où x est la solution de l'équation (3.1) et \tilde{y} est la solution du système (3.2), les deux solutions ayant la même valeur initiale. Il s'agit là d'une estimation globale.

Considérons la fonctionnelle définie par

$$G(A, B) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t), v(t)) - Ay(t) - Bv(t)\|^2 dt. \tag{3.44}$$

Pour calculer les premières matrices (A_1, B_1) de la suite définie par les relations (3.24) et (3.25), on part des matrices A_0 et B_0 quelconques et on minimise la fonctionnelle

$$\int_0^{+\infty} \|F(y_0(t), v(t)) - Ay_0(t) - Bv(t)\|^2 dt \quad (3.45)$$

où $y_0(t)$ est la solution du système

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0y(t) + B_0v(t) \\ y(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.46)$$

A_1 et B_1 minimise la relation (3.3) au sens des moindres carrés le long de la solution $y_0(t)$ du système (3.46) et on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \|F(y_0(t), v(t)) - A_1y_0(t) - B_1v(t)\|^2 dt \\ & \leq \int_0^{+\infty} \|F(y_0(t), v(t)) - Ay_0(t) - Bv(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.47)$$

A et B étant des matrices quelconques appartenant à l'espace des matrices admissibles. De la même manière A_j et B_j minimise (3.3) au sens des moindres carrés le long de la solution

$$y_j(t) = e^{tA_{j-1}}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_{j-1}}B_{j-1}v(s) ds \quad (3.48)$$

du système

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_{j-1}y(t) + B_{j-1}v(t) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.49)$$

et on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t), v(t)) - (A_{j+1})y_j(t) - (B_{j+1})v(t)\|^2 dt \\ & \leq \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t), v(t)) - Ay_j(t) - Bv(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (3.50)$$

pour tout A_j et B_j .

A la limite ($j \rightarrow +\infty$), on obtient:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t), v(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t) - \tilde{B}v(t) \right\|^2 dt \\ & \leq \int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t), v(t)) - A\tilde{y}(t) - Bv(t) \right\|^2 dt. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t), v(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t) - \tilde{B}v(t) \right\|^2 dt = \\ & \inf_{(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} \left[\int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t), v(t)) - A\tilde{y}(t) - Bv(t) \right\|^2 dt \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que $\text{Re } \sigma(A, B) \in]-\infty, 0[$.

Maintenant, si on considère que

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)) + \text{constante}. \quad (3.53)$$

Ce qui est possible dans le cas où $v(t) = \text{constante}$, et

$$v(t) = [E] H(t), \quad (3.54)$$

E : constante.

$H(t)$: fonction de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t) \right\|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t)) - A\tilde{y}(t) \right\|^2 dt \quad (3.55)$$

en particulier pour $A = DF(0)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t)) - \tilde{A}\tilde{y}(t) \right\|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} \left\| F(\tilde{y}(t)) - DF(0)\tilde{y}(t) \right\|^2 dt. \quad (3.56)$$

Ce qui nous amène à la proposition suivante

Proposition 3.1 *Sous les hypothèses sur F et pour tout $T > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que:*

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq M(\|x_0\|^2) \quad (3.57)$$

pour tout $0 \leq t \leq T$, et tout x_0 dans un voisinage de 0 , indépendant de T .

Donc, l'approximation proposée est d'ordre deux au moins en fonction de la donnée initiale en général, elle est de l'ordre de la non linéarité.

La proposition (3.1) est déjà démontrée dans la thèse de Benouaz (voir référence [36])

Application

Plusieurs exemples seront présentés et commentés dans le chapitre 4 réservé à la mise en oeuvre numérique.

QUATRIEME CHAPITRE

MISE EN OEUVRE

NUMERIQUE

Chapitre 4

Mise en Oeuvre Numérique

4.1 Introduction

Nous allons consacrer ce dernier chapitre à la mise en oeuvre numérique des études théoriques faites dans le deuxième et le troisième chapitre, c'est à dire : l'étude de la synthèse des systèmes non linéaires et l'étude de la dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation.

Nous présentons les différents organigrammes qui ont permis l'élaboration des programmes. Précisons que la résolution des équations différentielles a été faite à l'aide de la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4. Le logiciel utilisé pour tracer les courbes est Origin. On a utilisé le logiciel de calcul Matlab dans les applications de la synthèse des systèmes non linéaires, tandis que pour les applications de la dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation, on a utilisé un programme Fortran disponible dans[36].

Enfin, nous proposons un certain nombre d'exemples de systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires, pour lesquelles on applique les approches introduites.

4.2 Synthèse des systèmes non linéaires

4.2.1 Schéma général

La procédure de calcul est basée sur le schéma présenté au chapitre II.

Entrées $[x_0, \tilde{A}, t_0, t_f]$

Niveau (I) : Calcul de la matrice K_B

$$K_B = M K M^{-1}, \quad (4.1)$$

avec:

M : matrice de vecteurs propres de la matrice optimale \tilde{A} .

K : matrice diagonale, telle que

$$K = \begin{cases} \lambda_i - S_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (4.2)$$

Niveau (II) : Calcul de la matrice de transition \tilde{E}

$$\tilde{E} = \tilde{A} - K_B. \quad (4.3)$$

Niveau (III) : Calcul des coefficients α_{ij} .

Niveau (IV) : Calcul des valeurs des éléments composants le nouveau système non linéaire, à partir des coefficients α_{ij} .

La formule générale de calcul des coefficients α_{ij} peut s'écrire

$$[E] [\Gamma] = \int_0^{+\infty} [L(x)] [x]^T dt = [\alpha] [GX], \quad (4.4)$$

avec

$$[GX] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} (x_1 \cdots x_n) \\ \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} g_{n+1} \\ \vdots \\ g_{n+n} \end{pmatrix} (x_1 \cdots x_n) \\ \vdots \\ \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} g_{[(n-1)n+1]} \\ \vdots \\ g_{[(n-1)n+n]} \end{pmatrix} (x_1 \cdots x_n) \end{bmatrix} dt \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

et

$$[\Gamma] = \int_0^{+\infty} [x][x]^T dt = \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} x_1^2 & \cdots & x_n x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 x_n & \cdots & x_n^2 \end{bmatrix} dt. \quad (4.7)$$

Les éléments des matrices $[GX]$ et $[\Gamma]$ sont calculés directement par le logiciel Matlab.

4.2.2 Organigramme

Les principales étapes suivies par le programme pour trouver les coefficients α_{ij} sont :

1. Lecture des données $[\tilde{A}, x_0, t_0, t_f]$
2. Initialisation des matrices $[GX], [\Gamma]$
3. Calcul des valeurs propres λ_i et la matrice de vecteurs propres M de la matrice optimale \tilde{A} , et on note S_i les valeurs propres de la matrice de transition \tilde{E} .

4. Calcul de la matrice diagonale

$$K = \begin{cases} \lambda_i - S_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (4.8)$$

5. Calcul de la matrice K_B de valeurs propres $\chi_i = \lambda_i - S_i$

$$K_B = M K M^{-1}. \quad (4.9)$$

6. Calcul de la matrice de transition

$$\tilde{E} = \tilde{A} - K_B. \quad (4.10)$$

7. Résolution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{E} x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

et calcul des matrices $[GX]$, $[\Gamma]$.

8. Calcul des coefficients α_{ij} , en résolvant le système

$$[E] [\Gamma] = [\alpha] [GX]. \quad (4.12)$$

4.2.3 Application

Dans cette section nous allons illustrer notre étude par deux exemples. Le premier exemple consiste à faire varier le temps du régime transitoire et le deuxième à changer le système avec régime oscillatoire amorti en un système avec un régime apériodique.

Exemple 1. Variation du temps du régime transitoire:

Pour cela, on choisit

$$S_i = \frac{\lambda_i}{\eta}, \eta \in \mathbb{N}, \quad (4.13)$$

S_i sont les valeurs propres de la matrice de transition \tilde{E}

λ_i sont les valeurs propres de la matrice optimale \tilde{A}

La détermination de la matrice de transition \tilde{E} s'effectue à partir des valeurs propres S_i , en suivant la procédure de calcul exposée en (2.4.2). Une fois la matrice \tilde{E} calculée, on détermine le système non linéaire désiré (2.19).

Maintenant, nous allons illustrer cette étude sur un exemple qui représente un circuit électronique avec deux variables d'état et dont le caractère non linéaire provient de la présence d'une diode de caractéristique non linéaire (i, v) .

Considérons le circuit suivant

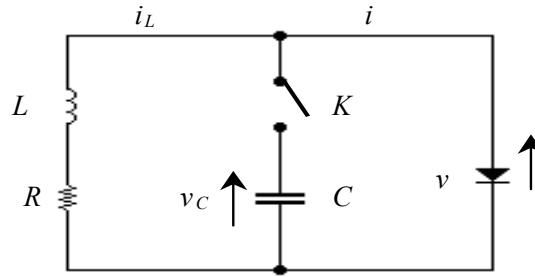


Figure (4.1)

On peut distinguer deux variables indépendantes représentées par la chute de tension v_C aux bornes de la capacité et par le courant circulant dans la bobine i_L . On suppose que la capacité C est chargée initialement. On se propose d'étudier le comportement du circuit après la fermeture de l'interrupteur K à $t = 0$.

Lorsqu'une tension v est appliquée à une diode dans le sens direct, la loi de variation du courant qui passe par celle-ci est approchée par[2]

$$i = av + bv^2. \quad (4.14)$$

Les lois de Kirschoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit nous conduisent aux équations d'état

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{a}{C}x - \frac{b}{C}x^2 - \frac{1}{C}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{L}x - \frac{R}{L}y, \end{cases} \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{cases} x = v_C \\ y = i_L. \end{cases} \quad (4.16)$$

On suppose que les coefficients de la caractéristique non linéaire de la droite ne varient pas. Pour l'équation (2.19) on pose

$$\begin{cases} g_1 = -x \\ g_2 = -bx^2 - y \\ g_3 = x \\ g_4 = y \\ R_1 = R_2 = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

on obtient

$$\begin{cases} l_1 = \alpha_{11}g_1 + \alpha_{12}g_2 + R_1 = -\alpha_{11}x - \alpha_{12}(bx^2 + y) \\ l_2 = \alpha_{21}g_3 + \alpha_{22}g_4 + R_2 = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y. \end{cases} \quad (4.18)$$

Pour l'exemple du circuit représenté par la figure (4.1), on applique la procédure de synthèse décrite dans la section (2.4.2), ce qui va nous permettre de déterminer les coefficients α_{ij} .

Les valeurs des composants du circuit sont

$$\begin{aligned} R &= 100 \Omega & a &= 3.5 \times 10^{-3} A/V \\ C &= 5 \times 10^{-6} F & b &= 10^{-2} A/V^2 \\ L &= 0.5 \times 10^{-3} H . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le système (4.15) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -700x - 2 \times 10^3 x^2 - 2 \times 10^5 y \\ \frac{dy}{dt} = 2 \times 10^3 x - 2 \times 10^5 y \end{cases}, (x_0, y_0) = (5, 0), \quad (4.20)$$

sa linéarisation en $(x_0, y_0) = (5, 0)$ donne

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -207 \times 10^2 & -2 \times 10^5 \\ 2 \times 10^3 & -2 \times 10^5 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

A la 4^{ème} itération, la procédure de calcul nous donne ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.330 \times 10^4 & 4.338 \times 10^5 \\ 2 \times 10^3 & -2 \times 10^5 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Cette matrice optimale \tilde{A} admet comme valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -8.768 \times 10^3 \\ \lambda_2 &= -2.045 \times 10^5. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Le but dans cet exemple est de faire étendre le temps du régime transitoire du circuit étudié. Pour cela, nous prendrons les valeurs propres S_1 et S_2 de la matrice de transition \tilde{E} comme suit

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\lambda_1}{4} = -2.192 \times 10^3 \\ S_2 &= \frac{\lambda_2}{4} = -5.113 \times 10^4. \end{aligned} \quad (4.24)$$

A partir de ces valeurs propres, on peut déduire la matrice de transition en suivant la procédure de calcul exposée dans la section (2.4.2) et on obtient

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} -3.325 \times 10^3 & 1.0845 \times 10^5 \\ 0.5 \times 10^3 & -0.5 \times 10^5 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

La matrice de transition \tilde{E} admet comme valeurs propres choisies initialement (S_1 et S_2). Maintenant, connaissant cette matrice de transition, on identifie les coefficients α_{ij} qui constituent les inconnus dans l'expression du système non linéaire désiré (4.18).

Après calculs on aboutit aux résultats suivants

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 1.1397 \times 10^2 & \alpha_{12} &= 5.1 \times 10^2 \\ \alpha_{21} &= 0.5 \times 10^3 & \alpha_{22} &= -0.5 \times 10^5. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le système non linéaire (4.18) s'écrit

$$\begin{cases} l_1 = -1.1397 \times 10^2 x - 5.1 \times 10^4 (10^{-2} x^2 + y) \\ l_2 = 0.5 \times 10^3 x - 0.5 \times 10^5 y \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (5, 0), \quad (4.27)$$

et on déduit les valeurs des éléments qui composent le nouveau système non linéaire

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{a}{C} \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{C} \implies C = 1.9607 \times 10^{-5} F \\ \alpha_{21} &= \frac{1}{L} \implies L = 2 \times 10^{-3} H \\ \alpha_{22} &= -\frac{R}{L} \implies R = 100 \Omega . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dans les figures (4.2) et (4.3), la courbe (1) correspond à la solution du système non linéaire initial (4.20), la courbe (2) à la solution du système non linéaire désiré (4.27) et la courbe (3) à la solution correspondante au système linéaire (4.25).

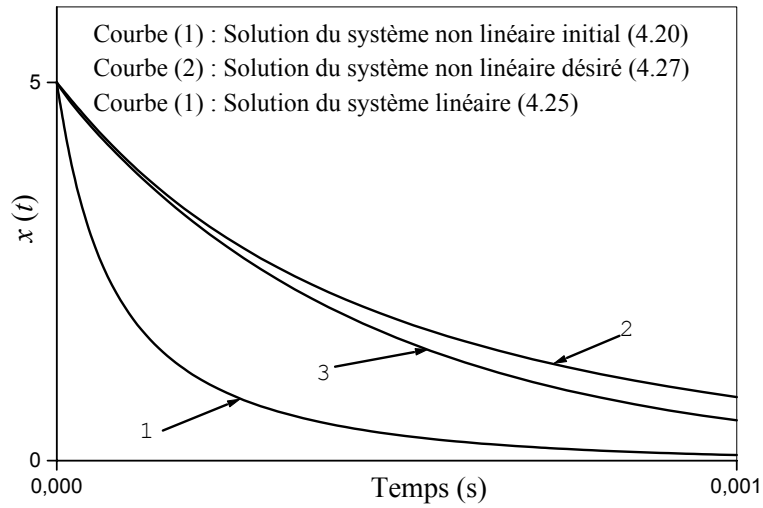


Figure (4.2)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (5, 0)$$

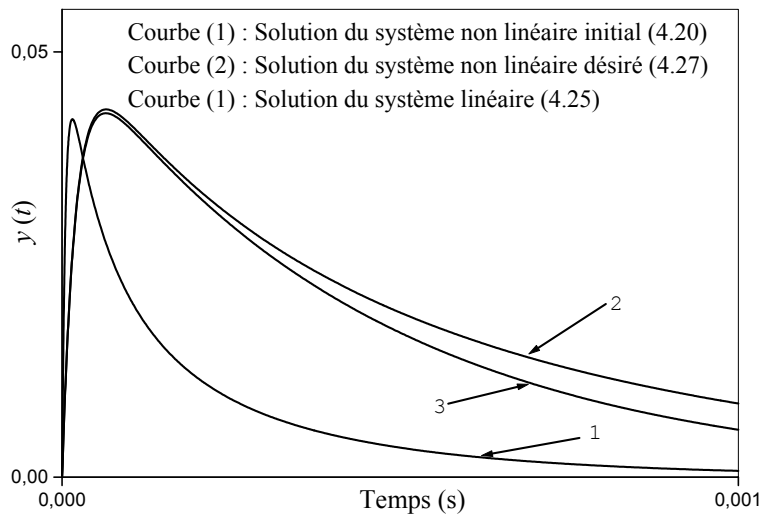


Figure (4.3)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (5, 0)$$

On peut remarquer sur les deux figures qu'il y a une variation du temps du régime transitoire, puisqu'on voit bien que la courbe représentative du système non linéaire (4.27) converge lentement vers le régime permanent par rapport à la courbe représentative du système non linéaire initial (4.15).

Exemple 2. Variation du régime de fonctionnement

Dans ce deuxième exemple on cherche par la synthèse, à changer le régime de fonctionnement d'un système non linéaire fonctionnant en régime oscillatoire amorti, en un système fonctionnant en régime apériodique.

Pour cela on choisit

$$S_i = \underbrace{(\alpha \pm \beta i)}_{\lambda_i} \mp \beta i, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$

S_i sont les valeurs propres de la matrice de transition \tilde{E} .

λ_i sont les valeurs propres de la matrice optimale \tilde{A} .

La détermination de la matrice de transition \tilde{E} s'effectue à partir des valeurs propres S_i , en suivant la procédure de calcul exposée dans la section (2.4.2). Une fois la matrice \tilde{E} calculée, on détermine le système non linéaire (2.19).

Nous allons illustrer cette étude en étudiant le système modélisant le circuit [29] suivant

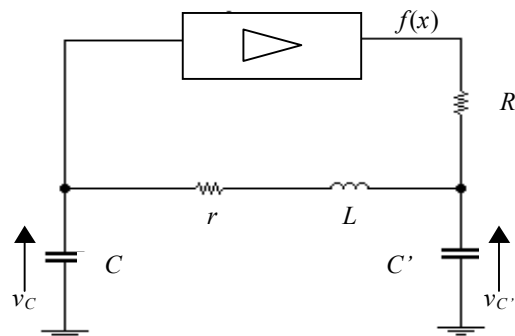


Figure (4.4)

Le modèle est donné par les équations d'états suivantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \delta y + z \\ \frac{dz}{dt} = \gamma [\alpha f(x) - z] - \sigma y \end{cases} \quad (4.29)$$

avec

$$\begin{cases} x = v_C \\ y = \sqrt{\frac{L}{C}} i \\ z = v_{C'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma = \frac{\sqrt{LC}}{RC'} \\ \delta = r \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \sigma = \frac{C}{C'} \end{cases} \quad (4.30)$$

La non linéarité de la caractéristique $f(x)$ a pu être approchée par

$$f(x) = \begin{cases} 0.528 & \text{si } x \leq -1.2 \\ x - x^3 & \text{si } -1.2 < x < 1.2 \\ -0.528 & \text{si } x \geq 1.2. \end{cases} \quad (4.31)$$

Le paramètre α caractérise le gain de l'amplificateur non linéaire. L'étude détaillée de l'amplificateur[29] montre que sa stabilité dépend de ce paramètre :

- Si $\alpha < 1$: le système présente un seul point d'équilibre stable.
- Si $\alpha \geq 1$: dans ce cas, le point d'équilibre qui été stable pour $\alpha < 1$ devient instable et laisse apparaître deux autres points d'équilibres stables (P_+ et P_-) qui sont symétriques par rapport à l'origine.

L'étude envisagée portera sur une valeur de $\alpha = 0.75$.

En posant

$$\begin{cases} g_1 = 0 & g_2 = y & g_3 = 0 & R_1 = 0 \\ g_4 = -x & g_5 = -y & g_6 = y & R_2 = 0 \\ g_7 = x - x^3 & g_8 = y & g_9 = -z & R_3 = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

le système (2.19) s'écrit

$$\begin{cases} l_1 = \alpha_{11}g_1 + \alpha_{12}g_2 + \alpha_{13}g_3 + R_1 = \alpha_{12}y \\ l_2 = \alpha_{21}g_4 + \alpha_{22}g_5 + \alpha_{23}g_6 + R_2 = -\alpha_{21}x - \alpha_{22}y + \alpha_{23}z \\ l_3 = \alpha_{31}g_7 + \alpha_{32}g_8 + \alpha_{33}g_9 + R_3 = \alpha_{31}(x - x^3) + \alpha_{32}y - \alpha_{33}z, \end{cases} \quad (4.33)$$

les coefficients α_{ij} sont obtenus par identification (2.17). Pour faire cette résolution, on doit tout d'abord trouver la matrice de transition \tilde{E} , qui est calculée par la procédure vue dans la section (2.4.2).

La valeur des composants du circuit étudié sont

$$\begin{aligned} R &= 3380 \Omega & C &= 343 \text{ nF} \\ r &= 347 \Omega & C' &= 225 \text{ nF} \\ L &= 145 \text{ mH}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

($\gamma = 0.2932, \delta = 0.5337, \sigma = 1.5244$),

donc le système (4.29) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 0.5337y + z \\ \frac{dz}{dt} = 0.2932 [0.75(x - x^3) - z] - 1.5244y \end{cases} \quad (x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.5, 0.6). \quad (4.35)$$

La Jacobienne en $(x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.5, 0.6)$ est donnée par

$$DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.1143 & -1.5244 & -0.2932 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

En utilisant la procédure de calcul de la dérivée optimale, la matrice optimale \tilde{A} est

domnée à la 4^{ème} itération ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.1118 & -1.5248 & -0.2145 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Cette matrice admet comme valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3.9306 \times 10^{-2} \\ \lambda_2 &= -3.5445 \times 10^{-1} + 1.5766 i \\ \lambda_3 &= -3.5445 \times 10^{-1} - 1.5766 i. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Le but dans cet exemple est de faire changer le régime de fonctionnement du circuit étudié. Ce circuit fonctionne en régime oscillatoire amorti et on désire le faire fonctionner en régime apériodique. Afin de pouvoir faire ce changement nous allons poser les valeurs propres S_1 , S_2 et S_3 de la matrice de transition \tilde{E} comme suit

$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_1 = -3.9306 \times 10^{-2} \\ S_2 &= \lambda_2 - 1.5766 i = -3.5445 \times 10^{-1} \\ S_3 &= \lambda_3 + 1.5766 i = -3.5445 \times 10^{-1}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

A partir de ces valeurs propres on peut déduire la matrice de transition \tilde{E} suivant la procédure de calcul exposé dans la section (2.4.2)

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} -0.1580 & 0.0213 & 0.1219 \\ -0.0077 & -0.3552 & -0.0047 \\ 0.1926 & 0.0209 & -0.2349 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Une fois la matrice \tilde{E} déterminée, on va pouvoir trouver les α_{ij} qui constituent les inconnues dans l'expression du système non linéaire désiré (4.33).

Après calcul, on aboutit au résultat suivant

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= 0 & \alpha_{12} &= 0.0186 & \alpha_{13} &= 0 \\
\alpha_{21} &= 0.0077 & \alpha_{22} &= 0.3552 & \alpha_{23} &= -0.0047 \\
\alpha_{31} &= -0.3303 \times 10^{-4} & \alpha_{32} &= -0.0570 & \alpha_{33} &= 0.0415.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Le système non linéaire désiré (4.33) s'écrit

$$\begin{cases} l_1 = 0.0186 y \\ l_2 = -0.0077 x - 0.3552 y - 0.0047 z \\ l_3 = -0.3303 \times 10^{-4} (x - x^3) - 0.057 y - 0.0415 z. \end{cases} \tag{4.42}$$

Maintenant, en faisant une identification entre les deux systèmes non linéaires (4.29) et (4.33) (initial et désiré), on peut déduire les valeurs des éléments qui composent le nouveau système non linéaire (4.33)

$$\begin{aligned}
\delta &= \alpha_{22} = 0.3552 \\
\gamma &= -\alpha_{33} = 0.057 \\
\sigma &= \alpha_{32} = 0.0415.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

On résout numériquement le système non linéaire (4.42) aux conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.5, 0.6)$, la solution obtenue sera représentée par la courbe (2) dans les figures (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8). Sur les mêmes figures la courbe (1) représente la solution du système non linéaire initial (4.35).

Les figures (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8) montrent clairement le changement effectué au niveau du régime de fonctionnement du circuit étudié. Nous remarquons que nous avons pu faire changer le régime de fonctionnement de ce circuit qui fonctionnait au début en régime oscillatoire amorti, en un circuit fonctionnant en régime apériodique. Bien sur, ce changement de régime a pu être possible en faisant varier la caractéristique dynamique du circuit.

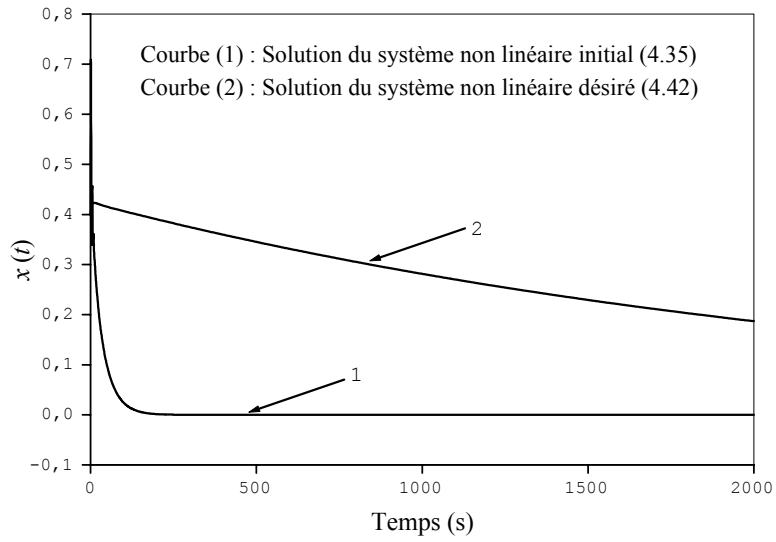


Figure (4.5)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.5, 0.6)$$

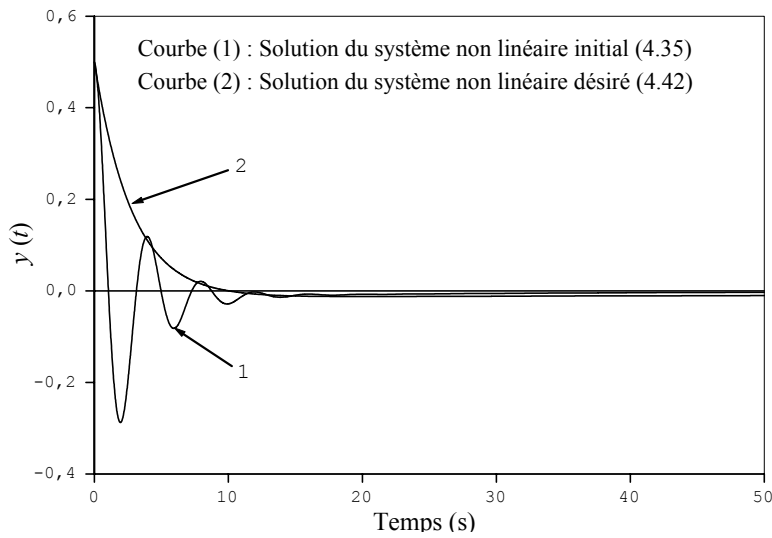


Figure (4.6)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.5, 0.6)$$

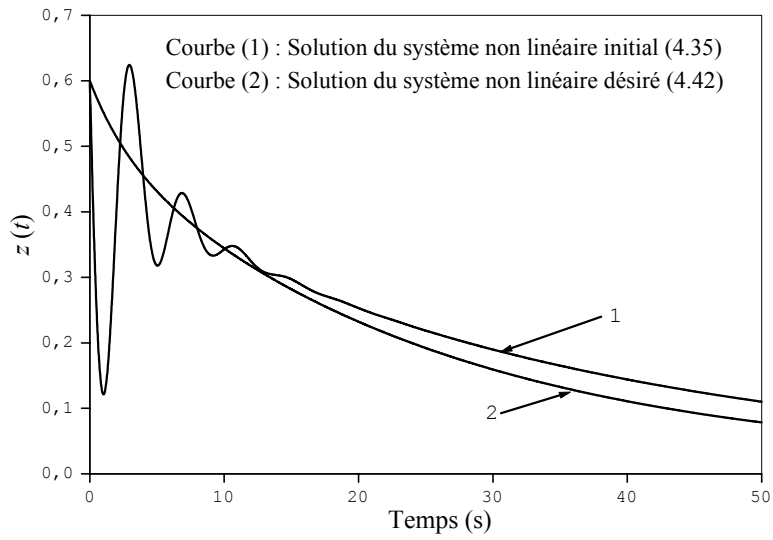


Figure (4.7)

Solution de la variable z en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.5, 0.6)$$

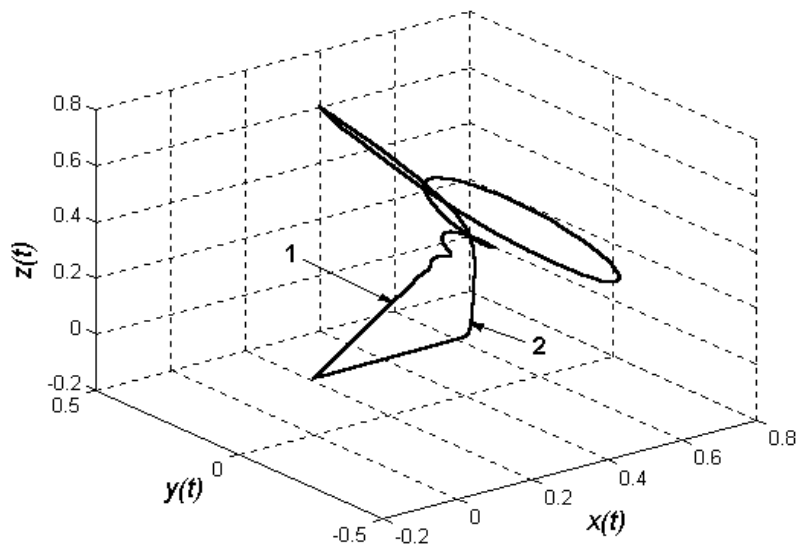


Figure (4.8)

Plan de phase $(x(t), y(t), z(t))$ pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.4, 0.5, 0.6)$

4.2.4 Conclusion

A travers ces deux exemples, nous avons pu montrer l'importance de l'étude de la synthèse d'un système non linéaire en utilisant la méthode de la dérivée optimale. Ceci est confirmé par les résultats obtenus, puisqu'on a pu mettre en valeur deux des principaux buts de la synthèse, c'est à dire : faire varier le temps du régime transitoire et faire changer le régime de fonctionnement des circuits étudiés.

Par conséquent nous estimons que, compte tenu des propriétés [36] que présente la dérivée optimale, cette étude de la synthèse peut être appliquée dans plusieurs classes de problèmes non linéaires.

4.3 Dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation

4.3.1 Schéma général

La procédure de calcul est basée sur le schéma présenté au chapitre III.

Entrées: $[x_0, u, A_0, B_0, \varepsilon]$.

Niveau (I) : Calcul de A_1 à partir de A_0 et de B_1 à partir de B_0

Niveau (II) : Calcul de $A_{(j)}$ à partir de $A_{(j-1)}$ et $B_{(j)}$ à partir de $B_{(j-1)}$

$$A_{(j)} = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), u(t))] [y_j(t)]^T dt - B_{(j)} \left[\int_0^{+\infty} [u(t)] [y_j(t)]^T dt \right] \right] \left[\int_0^{+\infty} [y_j(t)] [y_j(t)]^T dt \right]^{-1} \quad (4.44)$$

$$B_{(j)} = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t), u(t))] [u(t)]^T dt - A_{(j)} \left[\int_0^{+\infty} [y_j(t)] [u(t)]^T dt \right] \right] \left[\int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right]^{-1}, \quad (4.45)$$

avec

$$y_j(t) = e^{tA_{(j-1)}}x_0 + \int_0^{+\infty} e^{(t-s)A_{(j-1)}}B_{(j-1)}u(s) ds. \quad (4.46)$$

Niveau (III) : Calcul de

$$\|A_{(j)} - A_{(j-1)}\| \quad (4.47)$$

$$\|B_{(j)} - B_{(j-1)}\| \quad (4.48)$$

Niveau (IV) : Si

$$\|A_{(j)} - A_{(j-1)}\| < \varepsilon \quad (4.49)$$

$$\|B_{(j)} - B_{(j-1)}\| < \varepsilon \quad (4.50)$$

où ε représente le niveau d'approximation désiré, alors $\tilde{A} = A_{(j)}$ et $\tilde{B} = B_{(j)}$. \tilde{A} et \tilde{B} constituent les dérivées optimales de F en x . Sinon $A_{(j-1)} = A_{(j)}$ et $B_{(j-1)} = B_{(j)}$ et on va au niveau (II).

Les formules générales de calcul des suites $[A_j]$ et $[B_j]$ peuvent s'écrire

$$[A_j][\Gamma_x] = \int_0^{+\infty} [F(x, u)] [x]^T dt - [B_j][\Gamma_{u,x}] = [FX] - [B_j][\Gamma_{u,x}] \quad (4.51)$$

$$[B_j][\Gamma_u] = \int_0^{+\infty} [F(x, u)] [u]^T dt - [A_j][\Gamma_{x,u}] = [FU] - [A_j][\Gamma_{x,u}], \quad (4.52)$$

avec

$$[FX] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} x_1 f_1(x, u) dt & \cdots & \int_0^{+\infty} x_n f_1(x, u) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{+\infty} x_1 f_n(x, u) dt & \cdots & \int_0^{+\infty} x_n f_n(x, u) dt \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

$$[FU] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} u_1 f_1(x, u) dt & \cdots & \int_0^{+\infty} u_n f_1(x, u) dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{+\infty} u_1 f_n(x, u) dt & \cdots & \int_0^{+\infty} u_n f_n(x, u) dt \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

$$[\Gamma_{u,x}] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} x_1 u_1 dt & \cdots & \int_0^{+\infty} x_n u_1 dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{+\infty} x_1 u_n dt & \cdots & \int_0^{+\infty} x_n u_n dt \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

$$[\Gamma_{x,u}] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} u_1 x_1 dt & \cdots & \int_0^{+\infty} u_n x_1 dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{+\infty} u_1 x_n dt & \cdots & \int_0^{+\infty} u_n x_n dt \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

$$[\Gamma_x] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} x_1^2 dt & \cdots & \int_0^{+\infty} x_n x_1 dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{+\infty} x_1 x_n dt & \cdots & \int_0^{+\infty} x_n^2 dt \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

$$[\Gamma_u] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} u_1^2 dt & \cdots & \int_0^{+\infty} u_n u_1 dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{+\infty} u_1 u_n dt & \cdots & \int_0^{+\infty} u_n^2 dt \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Les éléments des matrices $[\Gamma_x]$, $[\Gamma_u]$, $[\Gamma_{x,u}]$, $[\Gamma_{u,x}]$, $[FX]$, $[FU]$ sont sous forme d'intégrales. Pour calculer toutes ces intégrales, il nous faut connaître l'expression des $x(t)$, solutions des différentes équations. Techniquement, on doit faire appel à la procédure de calcul de l'intégrale un nombre de fois égales au nombre d'intégrales composant les matrices, c'est à dire $2n^2$ fois. Afin d'éviter ce problème dans le programme, on va les écrire sous forme de série.

4.3.2 Organigramme

Les principales étapes suivies par le programme pour résoudre le problème de la dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation sont :

1. Lecture des données du problème d'approximation $[A_0, B_0, x_0, u, \varepsilon]$.

2. Initialisation des matrices $[\Gamma_x], [\Gamma_u], [\Gamma_{x,u}], [\Gamma_{u,x}], [FX], [FU]$.
3. Résolution de l'équation linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_{(j)}x(t) + B_{(j)}u(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.59)$$

et calcul des matrices $[\Gamma_x], [\Gamma_u], [\Gamma_{x,u}], [\Gamma_{u,x}], [FX], [FU]$.

4. Calcul des matrices $A_{(j)}$ et $B_{(j)}$, en résolvant le système

$$\begin{cases} A_{(j)} [\Gamma_x] = [FX] - B_{(j)} [\Gamma_{u,x}] \\ B_{(j)} [\Gamma_u] = [FU] - A_{(j)} [\Gamma_{x,u}]. \end{cases} \quad (4.60)$$

5. Test d'arrêt pour le niveau d'approximation désiré

$$\|A_{(j)} - A_{(j-1)}\| < \varepsilon \quad (4.61)$$

$$\|B_{(j)} - B_{(j-1)}\| < \varepsilon. \quad (4.62)$$

6. Calcul des valeurs propres des matrices $A_{(j)}$ et $B_{(j)}$, pour le suivi de la stabilité.
7. Dans le cas où le niveau d'approximation $-\varepsilon-$ désiré est atteint, alors

$$\tilde{A} = A_{(j)} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = B_{(j)}. \quad (4.63)$$

Sinon, on réinitialise les données et on recommence en 2.

4.3.3 Application

On présente dans cette section des applications relatives à la procédure de la dérivée optimale d'une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation.

Ceux-ci vont nous permettre d'illustrer par des courbes ou de comparer par un calcul d'erreur relative, les résultats obtenus.

Le calcul de l'erreur relative se fait en utilisant la relation suivante

$$E_r = \frac{\|x(t) - \tilde{y}(t)\|}{\|x(t)\|}, \quad (4.64)$$

$x(t)$ représente la solution du système non linéaire,

$\tilde{y}(t)$ représente la solution du système obtenu à partir de la dérivée optimale

Exemple 1

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.05(x + x^3) - y + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0) \quad (4.65)$$

Dans un premier temps, on va prendre $u(t) = [1] H(t)$, avec $H(t)$ est la fonction Heaviside, tel que

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Cette excitation est représentée dans la figure(4.9).

Par dérivation au sens de Fréchet de l'équation (4.65), on obtient $DF(x_0, y_0)$ et $DF(u_0)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -0.05 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

et

$$DF(u_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

En appliquant la linéarisation par la méthode de la dérivée optimale, on obtient après 6 itérations les matrices optimales suivantes ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.1116 & -0.98206 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

et

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

et notre système linéaire s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1116 & -0.98206 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.71)$$

Les figures (4.10) et (4.11) représentent les courbes représentatives des composantes respectives $(x(t), y(t))$ de la solution des systèmes (4.65) et (4.71) en fonction du temps. La figure (4.12) représente l'erreur relative en fonction du temps. Dans le tableau (IV.1) on représente les valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ de l'équation non linéaire, son approximation au sens de la dérivée optimale, ainsi que l'erreur relative.

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. De plus, l'erreur relative atteint son maximum au temps $t = 5s$, 5.46% et reste donc très petite. Cette erreur devient presque nulle quand $t \geq 10s$, c'est à dire quand les solutions atteignent le point de fonctionnement. A ce niveau la solution du système non linéaire est confondue avec celle du système linéaire optimal.

t	$X_{nl}(t)$	$X_{lin}(t)$	$Y_{nl}(t)$	$Y_{lin}(t)$	Er
0	0	0	0	0	0
1	8.5682271E-01	8.3957301E-01	3.4390457E-01	3.3668608E-01	2.05E-02
2	1.1497690E+00	1.1502381E+00	7.7577266E-01	7.7856602E-01	2.00E-03
3	1.0910956E+00	1.0988597E+00	1.0140109E+00	1.0277626E+00	1.03E-02
4	9.6896398E-01	9.6766829E-01	1.0167600E+00	1.0232552E+00	3.86E-03
5	8.9420956E-01	9.4078212E-01	9.5290740E-01	1.0073466E+00	5.46E-02
6	8.8865817E-01	9.0091576E-01	9.0660891E-01	9.6945109E-01	4.15E-02
7	9.0508904E-01	8.8052931E-01	9.0130037E-01	9.0943264E-01	1.80E-02
8	9.1708413E-01	8.9650748E-01	9.0864166E-01	8.9667105E-01	1.78E-02
9	9.1980404E-01	9.1300823E-01	9.1437273E-01	9.0332345E-01	9.73E-03
10	9.1806250E-01	9.1908009E-01	9.1762672E-01	9.1307231E-01	3.03E-03
11	9.1624726E-01	9.1833832E-01	9.1720428E-01	9.1614751E-01	1.71E-03
12	9.1547006E-01	9.1433070E-01	9.1628626E-01	9.1553575E-01	1.03E-03
13	9.1539947E-01	9.1379568E-01	9.1572387E-01	9.1446176E-01	1.56E-03
14	9.1561425E-01	9.1395204E-01	9.1562873E-01	9.1414600E-01	1.71E-03
15	9.1578457E-01	9.1424837E-01	9.1568859E-01	9.1414511E-01	1.68E-03
16	9.1583949E-01	9.1437869E-01	9.1577067E-01	9.1425489E-01	1.62E-03
17	9.1584010E-01	9.1441981E-01	9.1581592E-01	9.1435900E-01	1.57E-03
18	9.1582040E-01	9.1439994E-01	9.1582133E-01	9.1438563E-01	1.55E-03
19	9.1580612E-01	9.1436968E-01	9.1436968E-01	9.1438190E-01	7.90E-04
20	9.1580235E-01	9.1435782E-01	9.1580910E-01	9.1437030E-01	1.57E-03

Tableau (IV.I) : Valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ du système non linéaire (4.65) et du système linéaire optimal (4.71), ainsi que l'erreur relative Er .

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont : $t_0 = 0$, $t_f = 20$ s, $\varepsilon = 10^{-6}$.

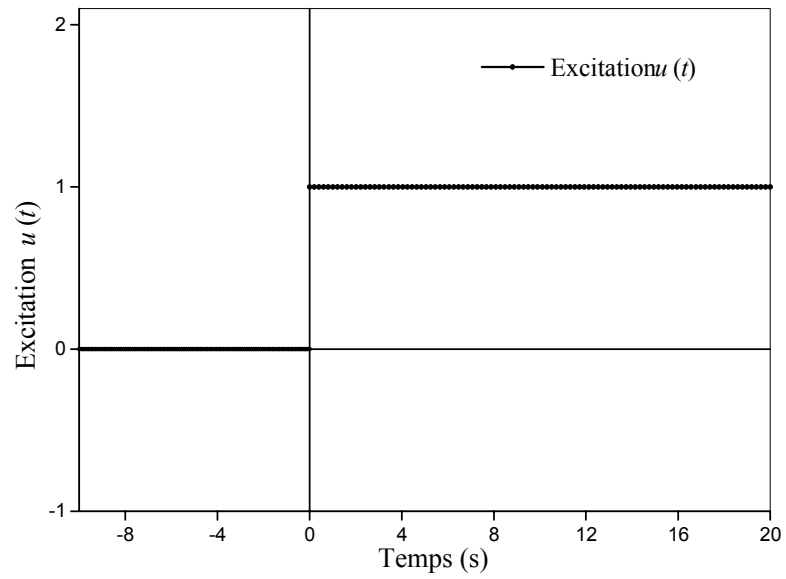


Figure (4.9)

Excitation u en fonction du temps $u(t) = [1] [H(t)]$

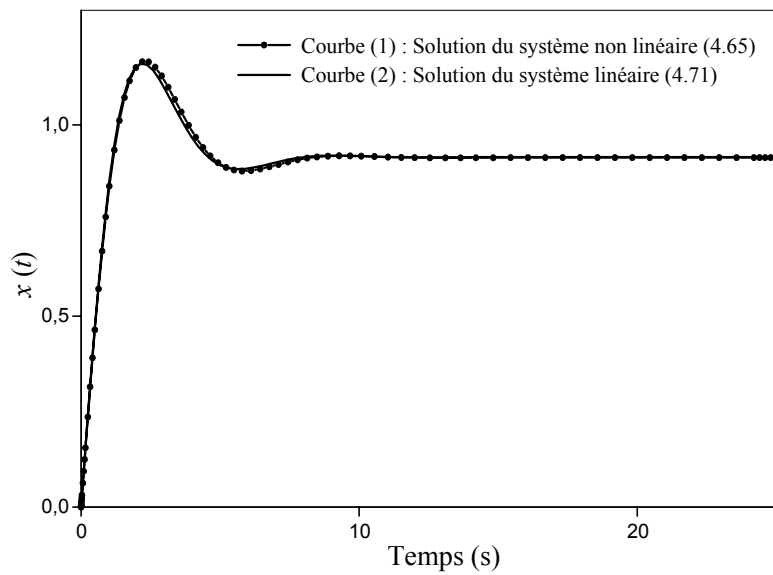


Figure (4.10)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

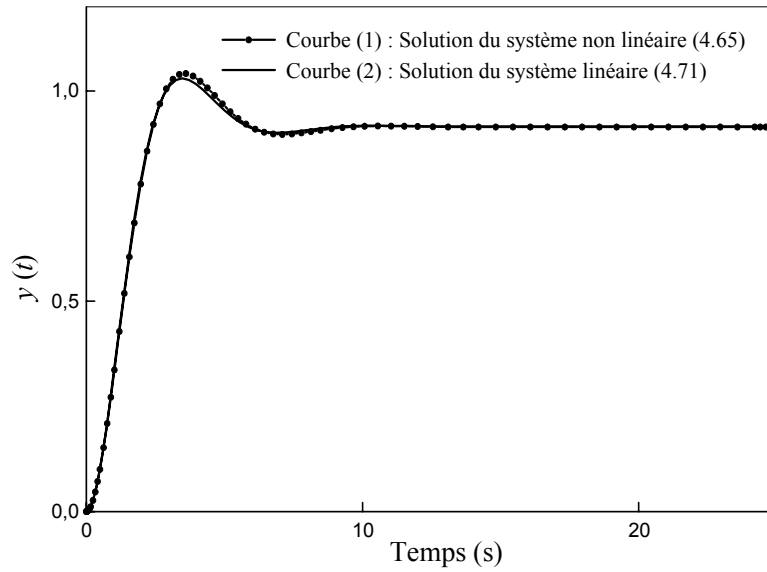


Figure (4.11)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

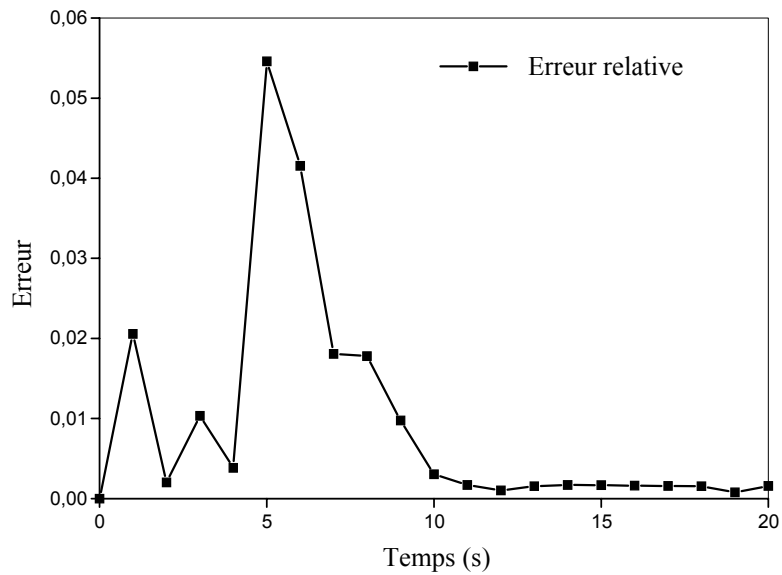


Figure (4.12)

Erreur relative en fonction du temps du système non linéaire (4.65) par rapport au système linéaire optimal (4.71)

Maintenant, on prend $u(t) = [\sin(t)] H(t)$, c'est à dire une source d'excitation sinusoïdale. Le système (4.65) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.05(x + x^3) - y + \sin(t) \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0). \quad (4.72)$$

L'excitation $u(t)$ est représentée dans la figure(4.13).

Par dérivation au sens de Fréchet de l'équation (4.72) on obtient $DF(x_0, y_0)$ et $DF(u_0)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -0.05 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

et

$$DF(u_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Après 8 itérations , la procédure de calcul donne ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.018169 & -1.17729 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

et

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Le système linéaire optimale s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.018169 & -1.17729 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.77)$$

Les courbes des figures (4.14) et (4.15) représentent le graphe des composantes respectives $(x(t), y(t))$ de la solution des systèmes (4.72) et (4.77) en fonction du temps, la figure (4.16) représente l'erreur relative en fonction du temps. Le tableau (IV.2) représente

les valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ de l'équation non linéaire, de son approximation au sens de la dérivée optimale, ainsi que l'erreur relative.

t	$X_{nl}(t)$	$X_{lin}(t)$	$Y_{nl}(t)$	$Y_{lin}(t)$	Er
0	0	0	0	0	0
1	4.1961556E-01	5.1433576E-01	1.1778367E-01	1.6212416E-01	3.01E-01
2	1.0156058E+00	1.0002883E+00	5.8266740E-01	5.6496473E-01	2.27E-02
3	6.8623616E-01	6.7332213E-01	7.8972242E-01	7.7518599E-01	1.86E-02
4	-3.5090786E-01	-4.1585347E-01	3.6716928E-01	3.2852265E-01	1.45E-01
5	-1.1602343E+00	-1.2835548E+00	-3.8226839E-01	-5.8806111E-01	3.22E-01
6	-9.2655676E-01	-8.9086194E-01	-8.8573330E-01	-9.2941828E-01	4.39E-02
7	1.0771542E-01	3.0478041E-01	-5.6812871E-01	-4.8982547E-01	3.83E-01
8	1.1084564E+00	1.2232922E+00	2.4257666E-01	3.3479344E-01	2.41E-01
9	1.0077569E+00	1.0808106E+00	8.8484267E-01	9.4888054E-01	7.24E-02
10	-2.4167008E-01	-8.6188729E-02	4.9881535E-01	6.3293490E-01	3.56E-01
11	-1.0559944E+00	-1.1268209E+00	-1.6741530E-01	-1.8363051E-01	8.19E-02
12	-1.1656846E+00	-1.1684872E+00	-8.2483708E-01	-9.3419337E-01	6.74E-02
13	-2.9641653E-01	-3.4374209E-02	-7.6049283E-01	-6.9788212E-01	2.83E-01
14	8.4970532E-01	8.9503422E-01	-5.2650220E-02	-6.6077606E-02	1.54E-01
15	1.1832073E+00	1.3150547E+00	8.1093590E-01	8.3726708E-01	7.19E-02
16	3.4068041E-01	3.6965573E-01	7.7682665E-01	8.4085965E-01	8.37E-02
17	-9.9088441E-01	-1.0244578E+00	-9.0691367E-02	-6.2317888E-02	1.73E-01
18	-1.2558166E+00	-1.3303073E+00	-6.9895766E-01	-8.1485603E-01	1.12E-01
19	-6.1093312E-01	-4.4636266E-01	-8.5743504E-01	-8.6733087E-01	1.40E-01
20	5.4165545E-01	7.8339519E-01	-3.0373725E-01	-1.6632194E-01	3.49E-01

Tableau (IV.2) : Valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ du système non linéaire (4.72) et du système linéaire optimal (4.77), ainsi que l'erreur relative Er .

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont : $t_0 = 0$, $t_f = 20$ s, $\varepsilon = 10^{-6}$.

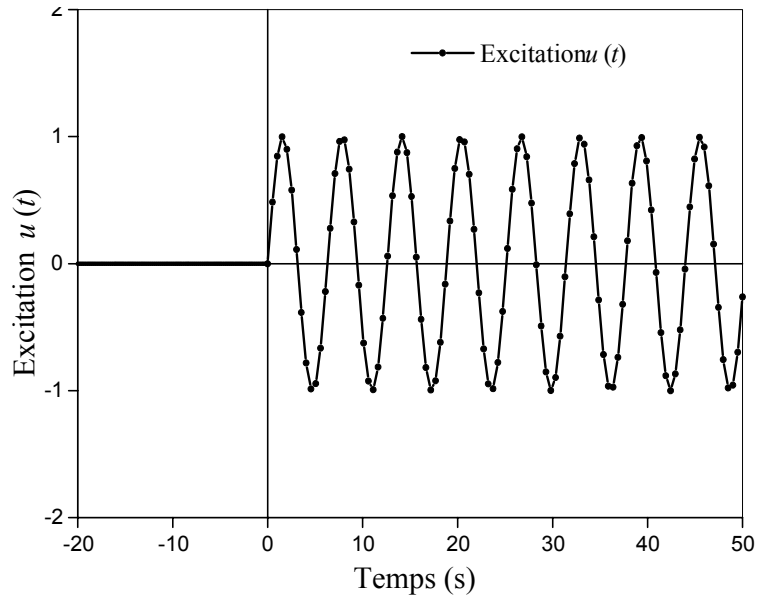


Figure (4.13)

Excitation u en fonction du temps $u(t) = [\sin(t)] [H(t)]$

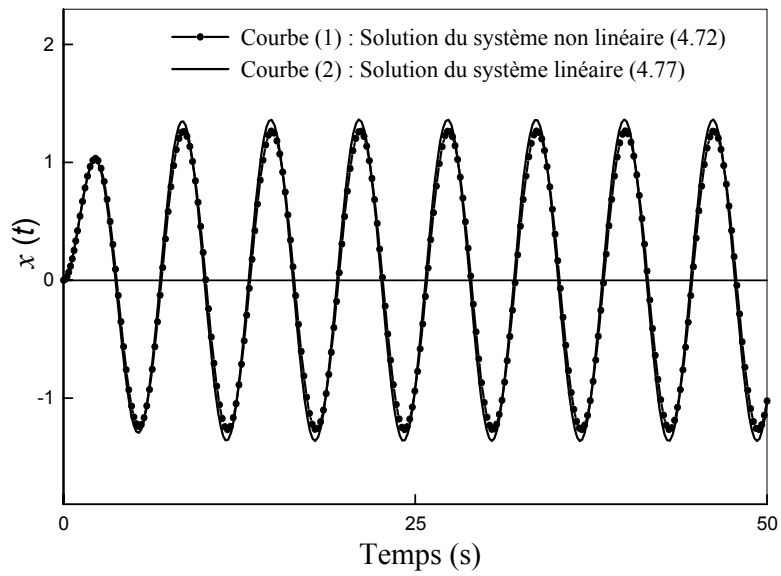


Figure (4.14)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

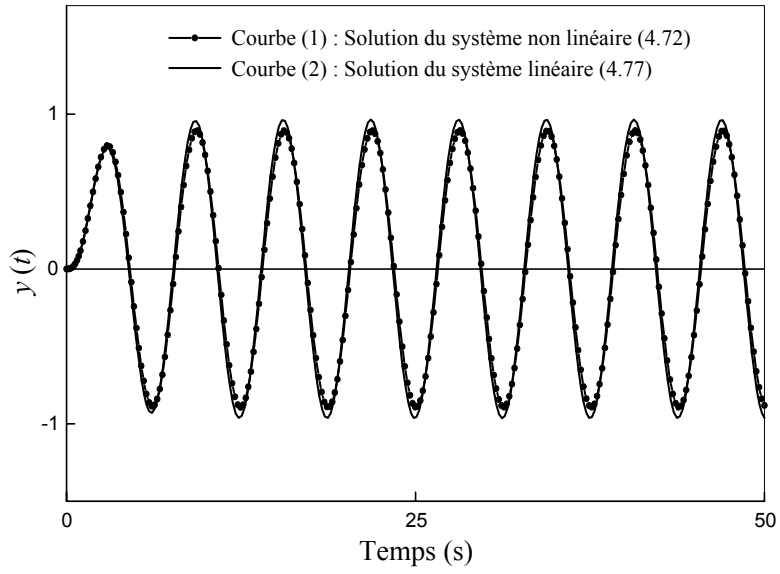


Figure (4.15)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0, 0)$

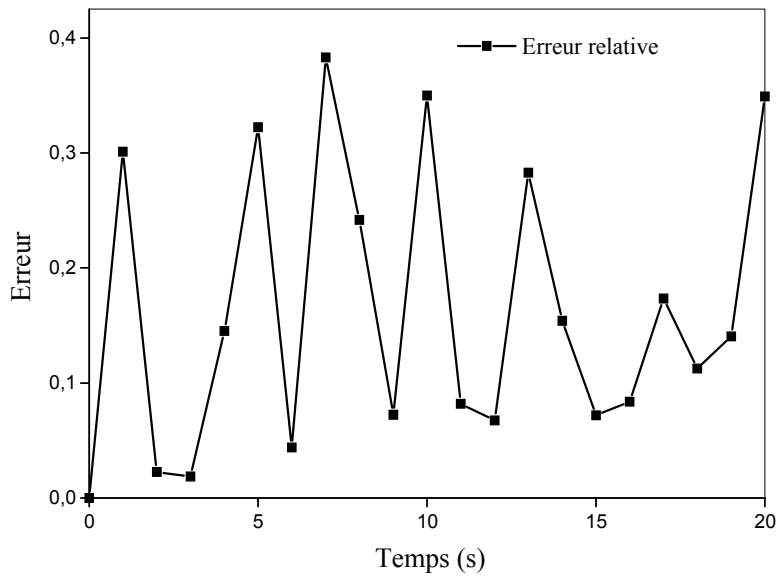


Figure (4.16)

Erreur relative en fonction du temps du système non linéaire (4.72) par rapport au système linéaire optimal (4.77)

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. De plus, l'erreur relative atteint son maximum au temps $t = 7s$, 38.3%. Cette erreur est sous forme de pics. Chaque pic est dû au décalage qui existe au niveau des pics des solutions du système non linéaire et du système linéaire optimal.

Exemple 2

L'exemple suivant est un système physique modélisant un circuit électronique simple.

Considérons le schéma suivant

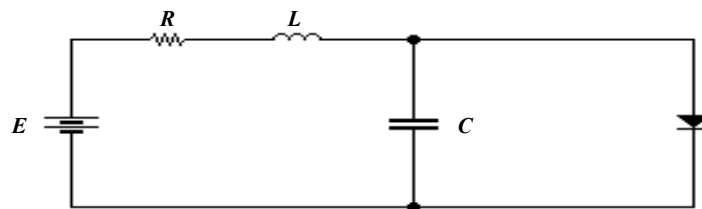


Figure (4.17)

C'est un circuit présentant deux variables d'état (la chute de tension v_c aux bornes de la capacité et le courant i_L circulant dans la bobine) et dont le caractère non linéaire provient de la présence d'une diode de caractéristique non linéaire (i, v) . Ce circuit est excité par une source de tension constante E .

Lorsqu'une tension v est appliquée à une diode dans le sens direct, la loi de variation du courant qui passe par celle-ci est approchée par

$$i = av + bv^2. \quad (4.78)$$

Les paramètres choisis dans le circuit sont

$$\begin{aligned} R &= 100 \Omega & a &= 3,5 \times 10^{-3} A/V \\ C &= 5 \times 10^{-6} F & b &= 10^{-2} A/V^2 \\ L &= 0,5 \times 10^{-3} H & E &= 20 V. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Les lois de Kirschhoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit nous donnent les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} [E - R i_L - v_C] \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} [i_L - (a v_C + b v_C^2)] \end{cases}, (i_{L_0}, v_{C_0}) = (0, 0). \quad (4.80)$$

On pose

$$\begin{cases} x = i_L \\ y = v_C \end{cases}, \quad (4.81)$$

alors le système (4.80) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L} x - \frac{1}{L} y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C} x - \frac{a}{C} y - \frac{b}{C} y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0). \quad (4.82)$$

En tenant compte des valeurs des composants du circuit, le système (4.82) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2 \times 10^5 x - 2 \times 10^3 y + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = 2 \times 10^5 x - 7 \times 10^2 y - 2 \times 10^3 y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0), \quad (4.83)$$

avec: $u(t) = \frac{E}{L} H(t) = [40000] H(t)$, $H(t)$ étant la fonction Heaviside. Cette excitation $u(t)$ est représentée dans la figure (4.18).

Pour déterminer les valeurs du régime permanent dans le cas du système non linéaire, on résoud le système suivant

$$\begin{cases} 0 = -2 \times 10^5 x - 2 \times 10^3 y + 40000 \\ 0 = 2 \times 10^5 x - 7 \times 10^2 y - 2 \times 10^3 y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Le calcul donne

$$\begin{cases} x = 0.1615 \\ y = 3.8477. \end{cases}$$

Par dérivation au sens de Fréchet de l'équation (4.83) on obtient $DF(x_0, y_0)$ et $DF(u_0)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & -2 \times 10^3 \\ 2 \times 10^5 & -7 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

et

$$DF(u_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

En appliquant la procédure développée en (3.4.2), et après 10 itérations ($\varepsilon = 10^{-6}$), le système linéaire optimal s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & -2 \times 10^3 \\ 2.5033 \times 10^5 & -0.1042 \times 10^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.86)$$

t	$Xnl(t)$	$Xlin(t)$	$Ynl(t)$	$Ylin(t)$	Er
0	0	0	0	0	0
1E-04	1.7242217E-01	1.7310679E-01	2.8470647E+00	2.7632788E+00	1.67E-02
2E-04	1.6340370E-01	1.6447235E-01	3.6757347E+00	3.5761583E+00	1.68E-02
3E-04	1.6190409E-01	1.6211874E-01	3.8180343E+00	3.7923883E+00	4.02E-03
4E-04	1.6167634E-01	1.6149270E-01	3.8430680E+00	3.8501572E+00	1.49E-03
5E-04	1.6164222E-01	1.6134099E-01	3.8468883E+00	3.8656574E+00	3.37E-03
6E-04	1.6150508E-01	1.6130722E-01	3.8476875E+00	3.8698650E+00	3.49E-03
7E-04	1.6155259E-01	1.6130694E-01	3.8477371E+00	3.8709950E+00	3.78E-03
8E-04	1.6157708E-01	1.6118673E-01	3.8477261E+00	3.8714594E+00	4.29E-03
9E-04	1.6159409E-01	1.6120531E-01	3.8477098E+00	3.8715148E+00	4.29E-03
1E-03	1.6143925E-01	1.6126149E-01	3.8478806E+00	3.8714607E+00	3.61E-03

Tableau (IV.3) : Valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ du système non linéaire (4.83) et du système linéaire optimal (4.86), ainsi que l'erreur relative Er .

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont : $t_0 = 0, t_f = 1E-3 s, \varepsilon = 10^{-6}$.

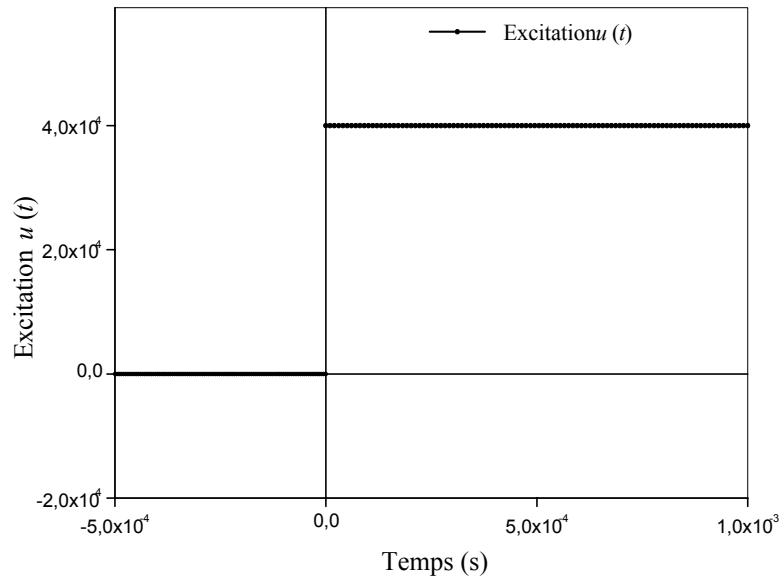


Figure (4.18)

Excitation u en fonction du temps $u(t) = \left[\frac{E}{L} \right] [H(t)]$

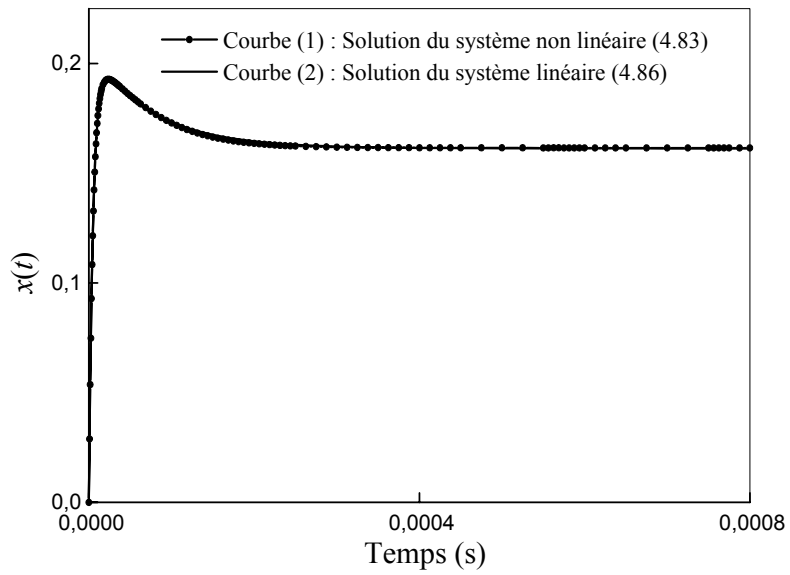


Figure (4.19)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

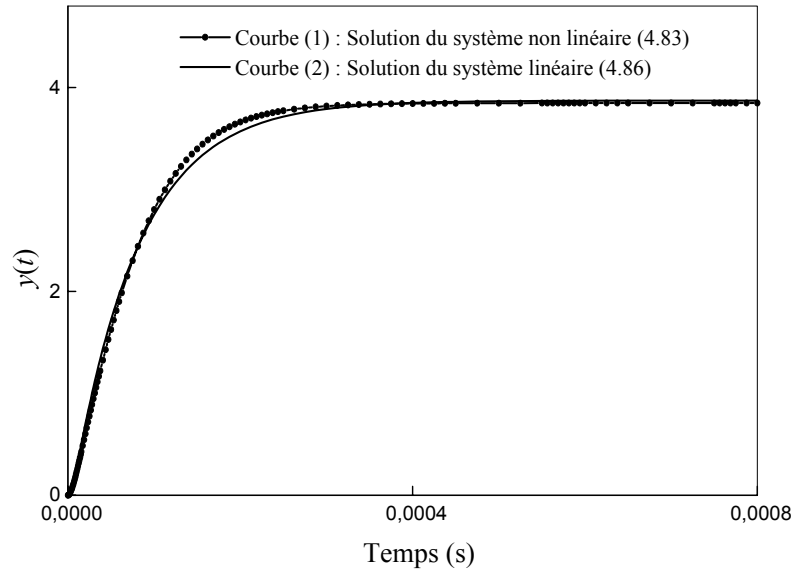


Figure (4.20)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0, 0)$

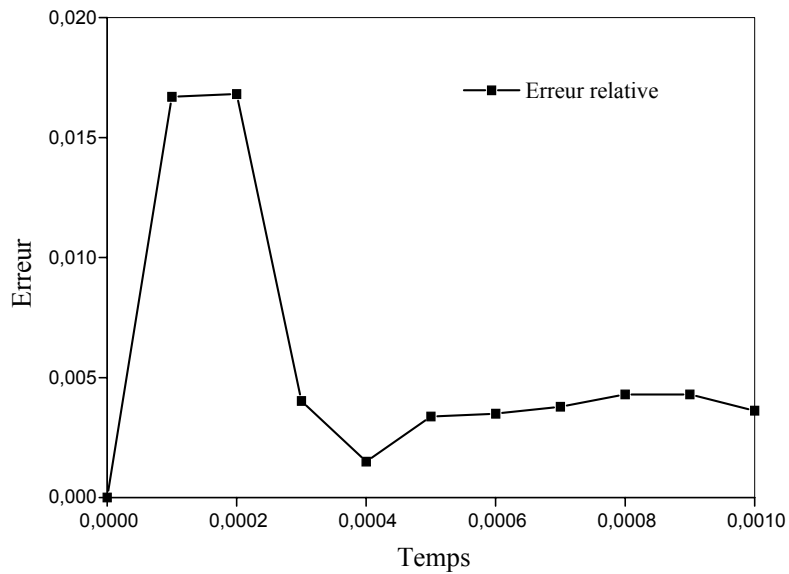


Figure (4.21)

Erreur relative en fonction du temps du système non linéaire (4.83) par rapport au système linéaire optimal (4.86)

Les figures (4.19) et (4.20) représentent les composantes respectives $(x(t), y(t))$ de la solution des systèmes (4.83) et (4.86) en fonction du temps. La figure (4.21) représente l'erreur relative en fonction du temps. Le tableau (IV.3) représente les valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ de l'équation non linéaire, de son approximation au sens de la dérivée optimale, ainsi que l'erreur relative.

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. De plus l'erreur relative atteint son maximum au temps $t = 2E - 4s$, 1.68% et reste donc très petite. Cette erreur devient presque nulle quand $t \geq 4E - 4s$, c'est à dire quand les solutions atteignent le point de fonctionnement. A ce niveau la solution du système non linéaire est confondue avec celle du système linéaire optimal.

Maintenant nous allons utiliser le même circuit précédent, seule l'excitation change, c'est à dire que l'on applique une excitation alternative $e(t)$

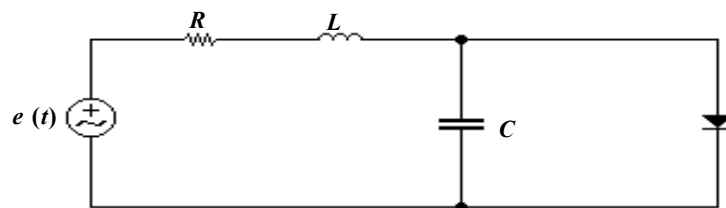


Figure (4.22)

avec

$$e(t) = e \cos(\omega t). \quad (4.87)$$

Le système (4.82) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2 \times 10^5 x - 2 \times 10^3 y + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = 2 \times 10^5 x - 7 \times 10^2 y - 2 \times 10^3 y^2 \end{cases}, (x_0, y_0) = (0, 0), \quad (4.88)$$

avec: $u(t) = \frac{e}{L} \cos(100 \pi t) H(t)$, $e = 0.2$ Volts. L'excitation $u(t)$ est représentée dans la figure(4.23).

Par dérivation au sens de Fréchet de l'équation (4.88), on obtient $DF(x_0, y_0)$ et $DF(u_0)$

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -2 \times 10^5 & -2 \times 10^3 \\ 2 \times 10^5 & -7 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

et

$$DF(u_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

En appliquant la linéarisation par la méthode de la dérivée optimale et après 9 itérations, on obtient les matrices optimales suivantes ($\varepsilon = 10^{-6}$)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.2419 \times 10^5 & -2.28346 \times 10^3 \\ 1.97255 \times 10^5 & -6.8753 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

et

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

et notre système linéaire optimal s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2419 \times 10^5 & -2.28346 \times 10^3 \\ 1.97255 \times 10^5 & -6.8753 \times 10^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (4.93)$$

Les courbes des figures (4.24) et (4.25) représentent le graphe des composantes respectives $(x(t), y(t))$ de la solution des systèmes (4.88) et (4.93) en fonction du temps. La figure (4.26) représente l'erreur relative en fonction du temps. Le tableau (IV.4) représente les valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ de l'équation non linéaire, de son approximation au sens de la dérivée optimale, ainsi que l'erreur relative.

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. De plus, l'erreur relative atteint son maximum au temps $t = 7s$, 31%. Cette erreur est sous forme de pics. Chaque pic est dû au décalage qui existe au niveau des pics des solutions du système non linéaire et du

système linéaire optimal.

t	$X_{nl}(t)$	$X_{lin}(t)$	$Y_{nl}(t)$	$Y_{lin}(t)$	Er
0	0	0	0	0	0
0.5E-02	-1.5997212E-04	-1.9609472E-04	1.6253648E-02	1.0793472E-02	2.80E-01
1.0E-02	-3.4991234E-04	-5.2781036E-04	-1.6507091E-01	-1.4648974E-01	3.10E-01
1.5E-02	1.8140720E-04	1.9502064E-04	-1.8507829E-02	-1.0976465E-02	2.40E-01
2.0E-02	6.6538146E-04	5.2853815E-04	1.3351527E-01	1.4646631E-01	1.51E-01
2.5E-02	-1.5935063E-04	-1.9436020E-04	1.6685160E-02	1.1217328E-02	2.73E-01
3.0E-02	-3.5082611E-04	-5.2838885E-04	-1.6496412E-01	-1.4646678E-01	3.09E-01
3.5E-02	1.8056840E-04	1.9272798E-04	-1.8874112E-02	-1.1533968E-02	2.28E-01
4.0E-02	6.6547437E-04	5.2869669E-04	1.3347568E-01	1.4644743E-01	1.51E-01
4.5E-02	-1.5674648E-04	-1.9317058E-04	1.6961559E-02	1.1485750E-02	2.77E-01
5.0E-02	-3.5154606E-04	-5.2922690E-04	-1.6486740E-01	-1.4641398E-01	3.08E-01
5.5E-02	1.7845521E-04	1.9159153E-04	-1.9442508E-02	-1.1905060E-02	2.30E-01
6.0E-02	6.6543965E-04	5.2919075E-04	1.3343172E-01	1.4640835E-01	1.51E-01
6.5E-02	-1.5487337E-04	-1.9124085E-04	1.7461175E-02	1.1952182E-02	2.75E-01
7.0E-02	-3.5194545E-04	-5.2970901E-04	-1.6477657E-01	-1.4638954E-01	3.08E-01
7.5E-02	1.7618689E-04	1.8955843E-04	-2.0078456E-02	-1.2287018E-02	2.31E-01
8.0E-02	6.6593859E-04	5.3024976E-04	1.3338650E-01	1.4635662E-01	1.50E-01
8.5E-02	-1.5326390E-04	-1.8924306E-04	1.7880745E-02	1.2573782E-02	2.65E-01
9.0E-02	-3.5321262E-04	-5.2951436E-04	-1.6471033E-01	-1.4635124E-01	3.05E-01
9.5E-02	1.7480754E-04	1.8925931E-04	-2.0547840E-02	-1.2833809E-02	2.29E-01
1.0E-01	6.6637228E-04	5.3064070E-04	1.3333751E-01	1.4631094E-01	1.50E-01

Tableau (IV.4) : Valeurs de la solution à des instants $t \in [0, T]$ du système non linéaire (4.88) et du système linéaire optimal (4.93), ainsi que l'erreur relative Er .

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont : $t_0 = 0$, $t_f = 0.1$ s, $\varepsilon = 10^{-6}$.

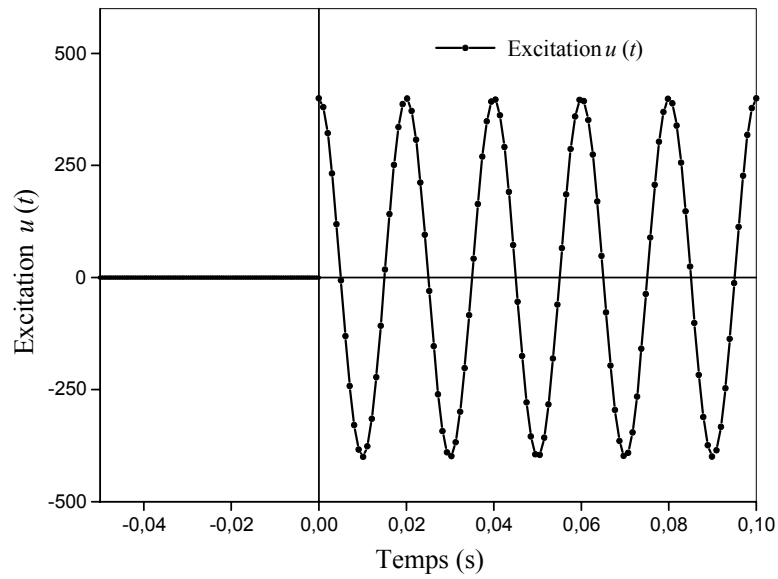
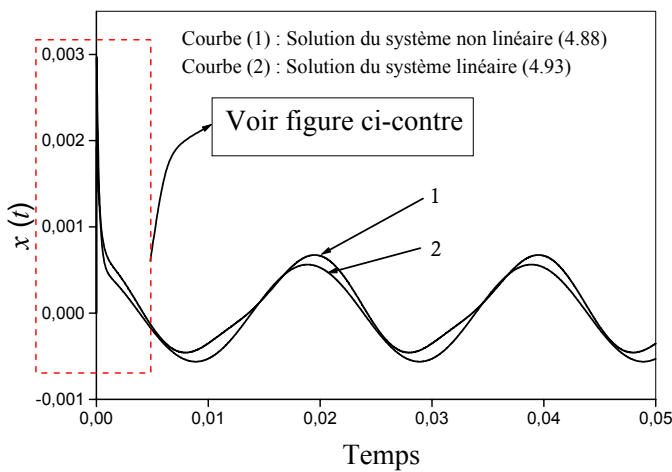
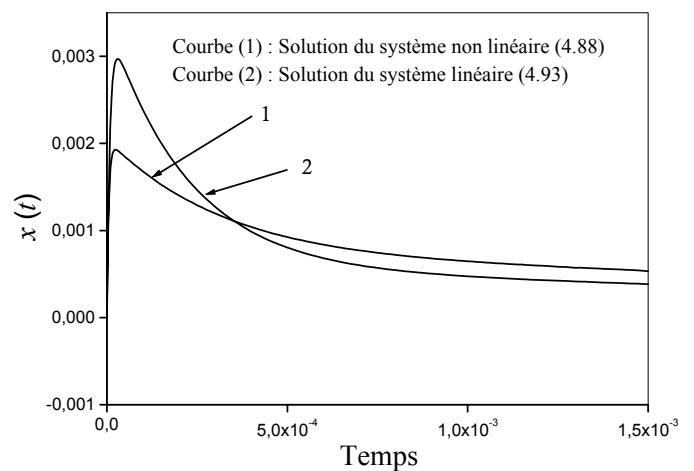


Figure (4.23)

Excitation u en fonction du temps $u(t) = \left[\frac{e(t)}{L} \right] [H(t)]$



Solution $x(t) = x_P(t) + x_T(t)$



Solution $x_T(t)$ du régime transitoire

Figure (4.24)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

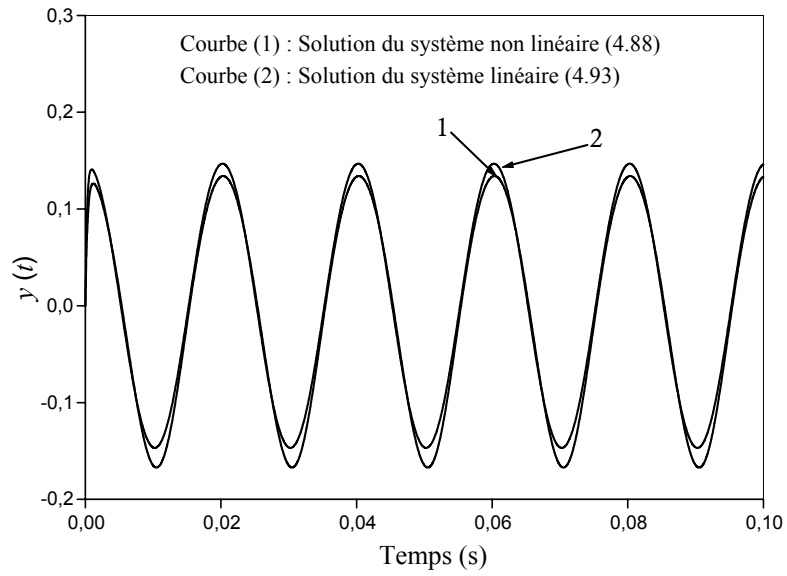


Figure (4.25)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (0, 0)$

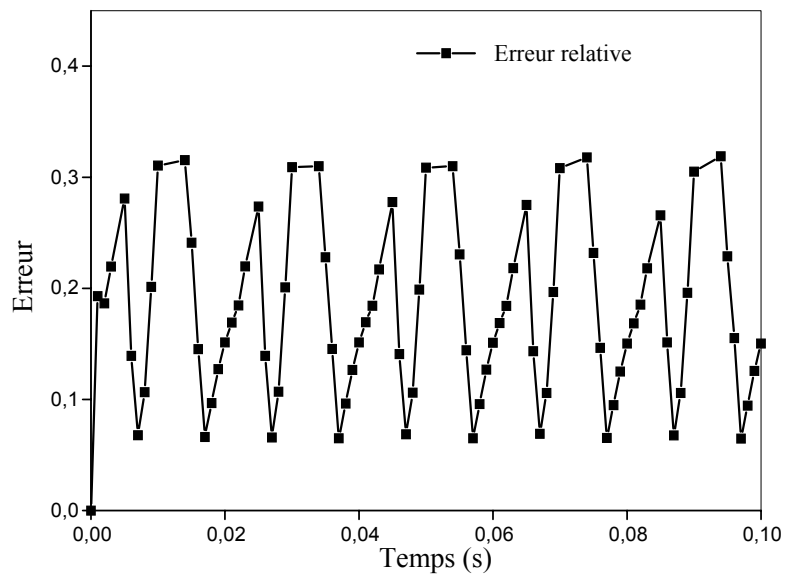


Figure (4.26)

Erreur relative en fonction du temps du système non linéaire (4.88) par rapport au système linéaire optimal (4.93)

4.3.4 Commentaire général

Les exemples exposés montrent que l'approximation obtenue par dérivation optimale donne des résultats satisfaisants par rapport aux résultats exacts tout en respectant la dynamique du problème initial.

Nous remarquons bien que les solutions obtenues convergent toutes vers la solution de régime quand $t \rightarrow +\infty$. L'allure de cette solution de régime diffère d'un système à l'autre et ceci selon la nature de la source d'excitation qu'on applique au système étudié. Cela est confirmé par le fait qu'on a obtenu des solutions de régime constantes dans le cas où on applique des sources d'excitations constantes et des solutions de régime sinusoïdales dans le cas où les sources d'excitations sont sinusoïdales.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous avons appliqué la méthode de la dérivée optimale à des systèmes physiques décrits par des équations différentielles ordinaires non linéaires.

Les principaux résultats de notre travail sont les suivants :

1. A partir des résultats acquis lors de l'introduction de la dérivation optimale, nous avons pu donner une généralisation de la méthode de linéarisation optimale, développé par Jordan et al., en précisant:
 - l'existence et l'unicité de la meilleure approximation au sens des moindres carrés,
 - le choix de la matrice initiale $A_0 = DF(x_0)$,
 - la forme générale à la matrice optimale, obtenue.
2. Nous avons étendu l'application de la méthode de la dérivée optimale pour réaliser la synthèse des systèmes non linéaires.
3. Nous avons appliqué la procédure de la dérivée optimale à une équation différentielle ordinaire non linéaire avec excitation, en précisant l'ordre de cette approximation.

Enfin, le travail entrepris dans le cadre de cette thèse a ouvert une direction de recherche qui mérite à notre avis d'être approfondie, en particulier :

1. L'application de la dérivée optimale pour faire l'étude de la synthèse des systèmes non linéaires excités.

2. L'analyse de la stabilité des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec excitation, en utilisant la dérivation optimale.

Bibliographie

- [1] **E. A. Coddington and N. Levinson**, (1955), *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill.
- [2] **J. Cuningham**, (1958), *Introduction to Non-Linear Analysis*, Mc-Graw.Hill, New-York.
- [3] **W. Ralston & Wilf**, (1960), *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, New York, pp.110-120 .
- [4] **R. E. Kalman, E. J. E. Bertran**, (1960), *Control System Analysis and Design via Second Method of Liapunov*, Journal of Basic Engeneering, 371-393.
- [5] **J. Hale**, (1969), *Ordinary Differential Equations*, Springer Verlag.
- [6] **A. Fossard**, (1972), *Commande des Systèmes Multidimensionnels*, Dunod.
- [7] **B. Vujanovic**, (1973), *Application of the Optimal Linearization Method to the Heat Transfer Problem*, International, Int. Heat. Mass Transfer, vol.16, pp. 1111-1117.
- [8] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations Différentielles Ordinaires, Tome I, Théorie générale*, Masson et C^{ie}.
- [9] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations Différentielles Ordinaires, Tome II, Stabilité et Solutions Périodiques*, Masson et C^{ie}.
- [10] **L. Pontriaguine, V. Boltianski, R. Gamkrélidzé, E. Michtchenko**, (1974), *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*, Edition Mir. Moscou.

- [11] **A. Volovoich**, (1974), *Linear Multivariable Systems*, New-York Springer.
- [12] **V. Arnold**, (1974), *Equations Différentielles Ordinaires*, Edition Mir. Moscou.
- [13] **B. Vujanovic, B. Baclic**, (1975), *Application of Gauss Principale of Least Constraint to the Non-Linear Heat Transfer Problem*, Int. Heat. Mass Transfer, vol.13, pp. 721-730. Pergamon Press, Oxford.
- [14] **W. Rudin**, (1975), *Analyse Complexe et Réelle*, Masson et C^{ie}.
- [15] **L. Pontriaguine**, (1975), *Equations Différentielles Ordinaires*, Edition Mir. Moscou.
- [16] **J. Ch. Gill, P. Decaulne, M. Pelegrin**, (1975), *Systèmes Asservis Non Linéaires (Tome1 et Tome 2)*, Dunod Automatique.
- [17] **J. C. Gill**, (1977), *Introduction aux Systèmes Asservis Non Linéaires*, Dunod Université.
- [18] **H. Reinhart**, (1982), *Equation Différentielles, Fondements et Applications*. Gauthier-Villars.
- [19] **M. Hasler, J. Neiryneck**, (1985), *Circuits Non Linéaires*, Presses Polytechniques Romandes.
- [20] **A. Jordan et al**, (1986), *Transient State Temperature Distribution in a Cylindrical Electrical Conductor: Non Linear Effects*, Revue de Physique Appliquées, 21.
- [21] **A. Z. Bensenane**, (1986), *Linéarisation Optimale des Equations d'Etat Non Linéaires*, Thèse de Magister, Tlemcen.
- [22] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal Linearization Method Applied to the Resolution of State Equation*, RAIRO-APII, 21, pp. 175-185.

- [23] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal Linearization of Non-Linear State Equation*, RAIRO-APII, 21, pp. 263-271.
- [24] **M. Siboni & J.-Cl. Mardon**, (1988), *Approximations et Equations Différentielles. Analyse Numérique II*, Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts.
- [25] **F. Verhulst**, (1989), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag.
- [26] **J. P. Demailly**, (1991), *Analyse Numérique et Equations Différentielles*. Presses universitaires de Grenoble.
- [27] **A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot**, (1993), *Systèmes Non Linéaires (Tome1: Modélisation-Estimation)*, Masson.
- [28] **A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot**, (1993), *Systèmes Non Linéaires (Tome3: Commande)*, Masson.
- [29] **N.F. Rulkov; L.S. Tsimring; H.D.I. Abarbanel**, (1994), *Tracking Unstable Orbits in Chaos Using Dissipative Feedback Control*, Physical review E, Vol. 50, N°1.
- [30] **T. Benouaz et O. Arino**, (1994), *Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire*, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [31] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995), *Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure*, Appl. Math. and Comp sci., N° 1, Vol. 5, pp 33-48.
- [32] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995) *Relation Entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique*, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N₀.95/10.

- [33] **T. Benouaz**, (16-20 June 1995), *Approximation of a Non-Linear Ordinary Differential Equation by an Optimal Procedure*, Proceeding of the 2nd International Conference on Differential Equations in Marrakech, Maroc.
- [34] **T. Benouaz**, (13-17 August 1995), *Least Square Approximation of a Non-Linear Ordinary Differential Equation: The Scalar Case*, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp.19-22 , Plovdiv, Bulgaria.
- [35] **T. Benouaz**, (3-5 December 1996), *Lyapounov Function Generated by Least Square Approximation*, Deuxième conférence Maghrébine sur l'Automatique Vol.1 pp.73-75, Tlemcen.
- [36] **T. Benouaz**, (1996), *Contribution a l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire*, Thèse de Doctorat d'Etat, Tlemcen.
- [37] **T. Benouaz and O. Arino**, (1996), *Least Square Approximation of a Non-Linear Ordinary Differential Equation*, Computers Math. Applic., Vol. 31, N° 8, pp 69-84.
- [38] **S.A. Lazzouni**, (1998), *Analyse des Aspects Qualitatifs de Certaines Classes de Circuits Electroniques Non Linéaires*, Thèse de Magister, Tlemcen.
- [39] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998), *Optimal Approximation of the Initial Value Problem*, Computers Math. Applic. , Vol. 36, N°1, pp. 21-32.
- [40] **T. Benouaz, F. Bendahmane, A. Chikhaoui**, (1999), *Generalisation of the Optimal Linearization of Nonlinear Ordinary Differential Equation*, Submitted for publication in Mathematics and Computer in Simulation Journal.
- [41] **T. Benouaz**, (August 1999), *Optimal Derivative of a Non-Linear Ordinary Differential Equation*, To appear in the Proceeding of the Equadiff 99, Berlin, Allemagne.