

Table des matières

Introduction Générale	4
0.1 Note historique	4
0.2 Linéarisation	5
0.3 Contribution	6
1 Rappels	8
1.1 Introduction	8
1.2 Linéarisation optimale	9
1.3 Dérivation optimale	10
1.3.1 Estimation de l'erreur	14
2 Influence du Choix de la Condition Initiale pour l'Application de la Dérivée Optimale	17
2.1 Introduction.	17
2.2 Problématique	18
2.3 Applications	18
2.3.1 Exemple-1-	18
2.3.2 Exemple-2-	26
2.3.3 Exemple-3-	33
2.4 Conclusion	41

3	Relation Entre la Dérivée Optimale et la Dérivation au Sens de Fréchet.	43
3.1	Introduction	43
3.2	Relation entre la dérivée optimale et la dérivation au sens de Fréchet en 0.	44
3.3	Problématique	44
3.4	Applications	45
3.5	Analyse des résultats	51
4	Applications - Ecueils à la bonne utilisation de la linéarisation classique	53
4.1	Introduction	53
4.2	Applications	54
4.2.1	Cas où la fonction n'est pas différentiable en 0	54
4.2.2	Cas où la différentielle en zéro est nulle	56
4.2.3	Cas d'un noeud	58
	Conclusion Générale	62
	Bibliographie	64

Introduction Générale

Introduction Générale

0.1 Note historique

Le premier enseignement sur les équations différentielles fondé explicitement sur les théories principales de la topologie générale est celui de *S.Lefchetz* (1948). Cet auteur à été suivi avec raison par pas mal d'autres ouvrages [28], [44], [19] [45] consacrés à ce sujet. Mais les différents travaux consacrés aux équations différentielles sont devenus moins accessibles aux utilisateurs. De nos jours beaucoup de non-mathématiciens, qu'ils soient ingénieurs, physiciens, économistes, ... ont besoin de plus en plus de la théorie des équations différentielles, sachant qu'ils n'ont pas reçu une formation mathématique assez avancée pour entrer de plein-pied dans des ouvrages comme ceux de *J.K.Hale* (1969) ou de *A.Halanay* (1966) (pour n'en citer que ces deux).

Il faut savoir que la plupart de ces équations sont globalement de nature non linéaire. L'analyse d'un système non linéaire pose un problème que l'on a essayé de résoudre au moyen des méthodes analytiques. L'utilisation des variables d'état pour la représentation des systèmes est apparue en premier lieu en automatique.

Son application s'est généralisée à différents domaines en particulier en électronique et électrotechnique. Cette utilisation s'est avérée pratique car elle permet d'écrire des relations vectorielles et matricielles simplifiées. Parmi ces problèmes non linéaires, une classe importante est modélisée par des équations différentielles ordinaires non linéaires de la

forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (0.1)$$

où

t : est le temps (variable indépendante).

x : est le vecteur d'état composé de variables d'état.

La théorie des équations différentielles ordinaires constitue l'un des principaux instruments des mathématiques, elle permet d'étudier une quantité de processus d'évolution déterministes, finis et différentiables.

0.2 Linéarisation

Les méthodes de linéarisation jouent donc un rôle très important dans l'étude de ces systèmes non linéaires qui sont en général, modélisés par des équations différentielles ordinaires non linéaires. Si beaucoup de systèmes peuvent admettre un domaine de comportement linéaire, la linéarité représente une approximation de la réalité. L'approximation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet de l'équation non linéaire. S'agissant de l'étude du comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre par exemple, dans le cas où la fonction n'est pas assez régulière où elle est nulle.

Ce qui justifie la recherche d'autres techniques de linéarisation pouvant donner des résultats satisfaisants concernant l'étude de ces problèmes non linéaires. Parmi ces techniques on peut citer la méthode de linéarisation optimale introduite par Vujanovic [15] et elle est basée sur le principe des moindres contraintes de Gauss. Elle consiste à minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre l'équation non linéaire et l'équation linéaire. En s'inspirant du même principe de base (Arino–Benouaz) [51],[57],[64],[58] ont associé une matrice optimale \tilde{A} définissant une application linéaire (**Dérivée optimale**) à une équation différentielle ordinaire non linéaire. Le système linéaire obtenu est une sorte de

valeur moyenne des dérivées de la fonction non linéaire le long des trajectoires partant de x_0 et allant à l'origine. Celle-ci sera vue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable dans le cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivables.

0.3 Contribution

Depuis l'événement voici une trentaine d'années d'ordinateurs puissants, les méthodes numériques remplacent de plus en plus les méthodes analytiques. Plusieurs travaux ont été consacrés à ce sujet citons à titre d'exemple [39] [40] [41] [45] [46]...

La contribution dans cette thèse est le prolongement des travaux entrepris par *Bendahmane* et *Chikhaoui* (2000) [66] [67] et *Belkhouche* et *Sabri* (2001) [69] [70], à la suite de (*Arino-Benouaz*) [54] [53] [49] [52] [51] [57] [64] [56] .

Après une introduction, nous présentons des rappels des différentes méthodes de linéarisation dans le premier chapitre.

Le chapitre deux est consacré aux tests concernant l'influence des conditions initiales. Ainsi, on compare les résultats obtenus en calculant la linéarisation classique au point d'équilibre et les résultats donnés par la dérivation optimale en choisissant des conditions initiales de plus en plus proche du point d'équilibre. La comparaison est faite en calculant l'erreur quadratique.

Dans le troisième chapitre, on étudie la relation entre la linéarisation classique au point d'équilibre et la dérivée optimale.

Enfin, les écueils qui ne permettent pas l'application de la linéarisation classique au point d'équilibre sont abordés au quatrième chapitre ainsi que l'utilisation de la dérivation optimale comme alternative. Une conclusion termine notre mémoire.

Premier Chapitre

Rappels

Chapitre 1

Rappels

1.1 Introduction

Les méthodes de linéarisation jouent un rôle important dans l'étude des équations différentielles ordinaires non linéaires, dont on peut dire que tout système linéaire n'est jamais que le modèle simplifié d'un système non-linéaire que l'on veut ignorer. Bien entendu, un certain nombre de questions propres aux problèmes linéaires peuvent se généraliser aux problèmes non linéaires si, d'une part, les perturbations dues aux non-linéarités sont petites et, d'autre part, à la structure des problèmes linéarisés correspondants qui introduit assez de régularité.

C'est pourquoi, on parvient à rester dans le domaine d'application du modèle linéaire qui est séduisant par sa simplicité dans les calculs et, pour lequel la disponibilité d'une théorie relativement complète permet de résoudre totalement les équations linéaires. Cette théorie est en fait une branche de l'algèbre linéaire.

La linéarisation la plus classique est celle déterminée par la dérivée au sens de Fréchet en ces points. L'existence d'écueils importants à la bonne utilisation de cette méthode (fonction non-linéaire ou dérivée nulle, etc.), a suscité plusieurs recherches pour établir d'autres techniques de linéarisation permettant d'approcher mieux les systèmes non linéaires; l'une d'elles, appelée *Linéarisation optimale*, est basée sur le principe de

moindres contraintes de Gauss, a été introduite à l'origine par *Vujanovic* (1973), [15] initialement pour l'étude des vibrations non linéaires. Récemment, elle a été utilisée par Jordan et al., [32][33][34] dans le cas du transfert de chaleur et de la linéarisation des équations d'états non linéaires [30].

Une nouvelle méthode de linéarisation, appelée *dérivée optimale*, a été introduite par *Arino-Benouaz* [51],[57],[58],[64], basée sur le principe des moindres carrés elle permet d'associer une application linéaire à une équation non linéaire. Elle est conçue comme une alternative à la dérivée au sens de Fréchet, indispensable au cas d'équations comportant des fonctions non régulières et en général non dérivables.

1.2 Linéarisation optimale

Considérons l'équation non-linéaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

l'application de la méthode de linéarisation optimale nécessite la vérification des hypothèses suivantes:

- i)* La solution de l'équation du système non linéaire (1.1) existe et elle est unique.
- ii)* Les circuits étudiés oscillent lentement avec le temps.
- iii)* Les systèmes non linéaires étudiés et les systèmes linéaires obtenus sont stables, c'est à dire que la matrice de l'équation linéarisée admet des valeurs propres dont les parties réelles sont négatives.

Le but étant d'associer une application linéaire à l'équation non linéaire (1.1) de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A^*x \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

En minimisant l'écart $\varepsilon(t)$ entre (1.1) et (1.2) :

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - Ax(t), \quad (1.3)$$

au sens des moindres carrés le long de la solution du système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

A étant la Jacobienne de F en 0 où $DF(x)$ existe.

La résolution du problème d'optimisation ainsi posée se réduit à la résolution de l'équation suivante

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}^* \int_0^{+\infty} dt x_k x_j = \int_0^{+\infty} dt x_j f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

ce qui permet d'aboutir au problème linéaire optimale¹

$$\dot{x} = A^*x, \quad (1.6)$$

sous les mêmes conditions initiales que le problème non linéaire.

1.3 Dérivation optimale

Afin de mieux situer la problématique, nous allons rappeler la méthode de la dérivée optimale qui est en fait une approximation globale,[51],[57],[58], [64], qui se distingue du cas linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire. L'approche suivie est de type optimisation.

Son utilisation est liée aux cas d'équations comportant des fonctions non régulières et, en général, non dérivables. Elle permet d'associer une matrice optimale \tilde{A} définissant une

¹Les programmes ont été élaborés dans les travaux de Bensnane dans le cadre de sa thèse de Magister.

application linéaire (1.7) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

à une équation différentielle ordinaire non linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.8)$$

dans laquelle F vérifie les hypothèses suivantes

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re}z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe. Cette hypothèse permet un choix de la matrice initiale pour démarrer la procédure de calcul de la méthode. A cet effet les valeurs propres de la matrice initiale choisie doivent être à partie réelle strictement négative.

Dans la pratique, toute matrice initiale stable permet de retrouver le résultat escompté par l'application de cette procédure.

H3) F est continue, et Lipschitzienne. Cette hypothèse assure la régularité de presque partout différentiable.

La méthode consiste à déterminer une application linéaire \tilde{A} de (1.7) qui permet d'approcher l'équation non linéaire (1.8) sous les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrées de l'écart $\varepsilon(t)$ entre la partie non linéaire $F(x(t))$ et la partie linéaire $Ax(t)$, soit :

$$\varepsilon(t) = F(x(t)) - \tilde{A}x(t). \quad (1.9)$$

Pour ce faire, on considère la fonctionnelle suivante

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt. \quad (1.10)$$

La minimisation de celle-ci le long d'une solution donnée permet de construire une procédure itérative permettant de déterminer, une application linéaire définie comme étant la dérivée optimale de l'équation différentielle ordinaire non linéaire (1.8) qui démarre avec la linéarisation par dérivation au sens de Fréchet $DF(x)$ calculée en x_0 si celle-ci existe en x_0 .

En introduisant la fonction Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt, \quad (1.11)$$

la matrice optimale \tilde{A} recherchée s'écrit alors

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x)]^{-1} \quad (1.12)$$

où \tilde{A} est définie et unique à condition que $\Gamma(x)$ soit inversible.

Algorithme de la procédure

Considérons le système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

1ère étape:

On calcule $A_0 = DF(x_0)$, $DF(x_0)$ étant la matrice Jacobienne de F en x_0 qui, en principe, est un point arbitraire pris au voisinage de 0.

2ème étape:

Le calcul de A_1 , à partir de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_0 y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

s'effectue en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - Ay(t)\|^2 dt \quad (1.15)$$

où A_1 est déterminée de manière unique, par l'équation (1.12).

3ème étape:

Pour calculer A_j , à partir de A_{j-1} , le système suivant doit être résolu au préalable

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = [A_{j-1}]y \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

et notons y_j la solution de l'équation (1.16).

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t)) - Ay_j(t)\|^2 dt \quad (1.17)$$

conduit à A_j qui s'écrit

$$A_j = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j)] [y_j]^T dt \right] [\Gamma(y_j)]^{-1}. \quad (1.18)$$

En supposant que $\Gamma(x)$ est inversible, et si la suite A_j converge, alors la limite \tilde{A} est appelée la dérivée optimale de F en x_0 .

Procédure de calcul

La mise en oeuvre de la méthode est disponible en langage Fortran² et en utilisant le logiciel de calcul Matlab.

L'essentiel des étapes de calcul peut se résumer comme suit

²Les programmes ont été élaborés par Benouaz dans le cadre de sa thèse de doctorat d'Etat.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Entrées: Introduction des éléments $[x_0, A_0]$

Etape 1: Calcul de A_1 à partir de A_0 par la formule:

$$A_1 = \left[\int_0^{+\infty} \left[F(e^{A_0 t} x_0) \right] \left[e^{A_0 t} x_0 \right]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} \left[e^{A_0 t} x_0 \right] \left[e^{A_0 t} x_0 \right]^T dt \right]^{-1} \quad (1.20)$$

Etape 2: Calcul de $A_{(j)}$ à partir de $A_{(j-1)}$ par la formule:

$$A_{(j)} = \left[\int_0^{+\infty} \left[F(e^{A_{(j-1)} t} x_0) \right] \left[e^{A_{(j-1)} t} x_0 \right]^T dt \right] \left[\int_0^{+\infty} \left[e^{A_{(j-1)} t} x_0 \right] \left[e^{A_{(j-1)} t} x_0 \right]^T dt \right]^{-1} \quad (1.21)$$

Etape 3: calcul de

$$\left\| A_{(j)} - A_{(j-1)} \right\| \quad (1.22)$$

Etape 4: Si

$$\left\| A_{(j)} - A_{(j-1)} \right\| < \varepsilon \quad (1.23)$$

où ε représente un niveau d'approximation désiré, alors on prend $\tilde{A} = A_{(j)}$. \tilde{A} est la dérivée optimale de F en x_0 . Sinon, $A_{(j-1)} = A_{(j)}$ et, dans ces conditions, on retourne à l'**Etape 2**.

1.3.1 Estimation de l'erreur

Nous allons estimer l'écart définissant l'erreur, ce qui va permettre de préciser l'ordre de l'approximation. Ceci revient en fait à évaluer $\|x(t) - \tilde{y}(t)\|$, où x est la solution de l'équation (1.7) et \tilde{y} est la solution du système (1.8), les deux solutions ayant la même valeur initiale. Il s'agit là d'une estimation globale.

Proposition 1 [57], sous les hypothèses H1), H2) et H3) sur la fonction F et pour tout $T > 0$ il existe $M \geq 0$ tels que:

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq M (\|x_0\|)^2 \quad (1.24)$$

pour $0 \leq t \leq T$, et tout x_0 dans un voisinage de 0, indépendant de T .

Cette proposition,[57], montre que la méthode de la dérivation optimale est au moins d'ordre 2 en fonction de la donnée initial et dépend en général de la non linéarité du problème initial considéré.

Deuxième Chapitre

Influence des Conditions Initiales

Chapitre 2

Influence du Choix de la Condition Initiale pour l'Application de la Dérivée Optimale

2.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré aux résultats relatifs aux propriétés de la méthode de dérivation optimale introduite par *Benouaz* et *Arino* [51], [57], [58], [64], et particulièrement à l'ordre d'approximation de la méthode.

En effet, l'ordre de la méthode de dérivation optimale dépend de la condition initiale.

Nous allons présenter des exemples mettant en valeur l'aspect théorique en relation avec l'influence du choix des conditions initiales sur la qualité de l'approximation.

Dans son travail, *A. Chikhaoui* [67], a présenté une étude comparative à partir de l'erreur relative pour des conditions initiales près de l'origine.

En particulier, il a fait une comparaison entre les résultats obtenus par la dérivée optimale et ceux du système non linéaire pour différentes conditions initiales, en tenant compte de l'ordre de la méthode.

Le modèle étudié dans sa thèse est celui d'un circuit électronique assez particulier: l'am-

plificateur chaotique. Les résultats obtenus sont meilleurs en se plaçant très près de l'origine. La conséquence immédiate est que ce choix des conditions initiales est plus approprié à l'utilisation de la méthode de dérivation optimale.

A la suite de ces travaux, *F. Belkhouche* [69] a fait une comparaison entre la dérivée optimale et la linéarisation classique à partir d'une condition initiale donnée. Il est arrivé à la conclusion que l'approximation par dérivation optimale est meilleure au voisinage de la donnée initiale. Plus, on s'approche de l'origine, meilleure est la linéarisation classique, quand elle existe.

2.2 Problématique

Notre but est de montrer que, si on utilise la procédure de dérivation optimale en tenant compte de ses propriétés et, en particulier, de l'ordre, on peut améliorer les résultats de l'approximation proposée.

On va présenter trois applications concernant un modèle physique en utilisant plusieurs conditions initiales et on comparera les résultats obtenus avec ceux de la linéarisation classique par un calcul d'erreur (erreur quadratique).

2.3 Applications

2.3.1 Exemple-1-

Le fonctionnement du circuit électronique suivant est représenté par deux variables d'états (la chute de tension V_{c1} au borne de la première capacité et la chute de tension V_{c2} au borne de la seconde capacité). La non linéarité est due à l'utilisation d'une diode non linéaire.

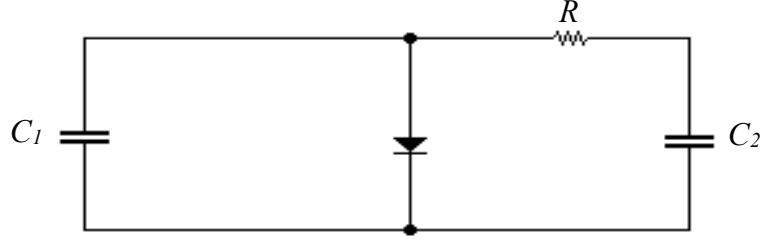


Figure (II.1)

Lorsqu'une tension V_c est appliquée à la diode dans le sens direct, le modèle de la diode est donné par:

$$f(V_{c1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_{c1} < 0 \\ a \cdot V_{c1} + bV_{c1}^2 + dV_{c1}^4 & \text{si } V_{c1} \geq 0. \end{cases}$$

Les paramètres de ce circuit sont

$$\begin{aligned} R &= 33 \cdot 10^2 \Omega & a &= 10^{-4} \\ C_1 &= 220 \cdot 10^{-4} F & b &= 10^{-5} \\ C_2 &= 350 \cdot 10^{-4} F & d &= 10^{-6}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

A partir des lois de Kirchhoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit, on obtient les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{dV_{c1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} \left(a \cdot V_{c1} + bV_{c1}^2 + dV_{c1}^4 + \frac{V_{c1} - V_{c2}}{R} \right) \\ \frac{dV_{c2}}{dt} = \frac{1}{RC_2} [V_{c1} - V_{c2}]. \end{cases} \quad (2.2)$$

On pose

$$\begin{cases} x = V_{c1} \\ y = V_{c2}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Alors le système (2.2) s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{a}{C_1}x - \frac{b}{C_1}x^2 - \frac{d}{C_1}x^4 - \frac{1}{RC_1}x + \frac{1}{RC_1}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC_2}x - \frac{1}{RC_2}y. \end{cases} \quad (2.4)$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs, le système s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(1.8 \cdot 10^{-2}x + 4.45 \cdot 10^{-5}(10x^2 + x^4) - 1.38 \cdot 10^{-2}y) \\ \frac{dy}{dt} = 8.66 \cdot 10^{-3}(x - y). \end{cases} \quad (2.5)$$

Linéarisation Classique

La linéarisation classique est obtenue en calculant la dérivation au sens de Fréchet au point d'équilibre $(0, 0)$. Le calcul donne

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} -1.8 \cdot 10^{-2} & 1.38 \cdot 10^{-2} \\ 8.66 \cdot 10^{-3} & -8.66 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Dérivation optimale

La dérivée optimale est obtenue en appliquant l'algorithme en (1.3).

Rappelons que le calcul de l'erreur quadratique se fait en utilisant la relation suivante

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \|x_i(t) - \tilde{y}_i(t)\|^2, \quad (2.7)$$

où

$x(t)$ représente la solution du système non linéaire.

$\tilde{y}(t)$ représente la solution du système linéaire.

Résultats de la Méthode Pour l'étude de ce système on a choisi d'utiliser plusieurs conditions initiales. Les résultats obtenus (les matrices optimales données par la dérivée optimale) sont exposés dans les tableaux (II.1) avec l'erreur quadratique maximale.

Conditions Initiales	Matrice de la D.O	$E_{Q_{max}}$ due à la D.O	$E_{Q_{max}}$ due à la L.C
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-1})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0187 & 0.0142 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$2.1302E - 04$	$3.5140E - 04$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-1})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0181 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$7.5438E - 06$	$1.0367E-05$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0181 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$7.4729E - 09$	$2.2644E - 08$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0180 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$8.5925E - 10$	$1.0691E - 09$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0180 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$7.0425E - 13$	$2.2132E - 12$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-3})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0179 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$9.0836E - 14$	$1.0969E - 13$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0179 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$2.2657E - 17$	$1.3572E - 16$
$(x_0, y_0) = (8 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0178 & 0.0138 \\ 0.0087 & -0.0087 \end{bmatrix}$	$3.249E - 21$	$3.481E - 21$

Tableau (II.1) : Il représente les valeurs des conditions initiales, matrices de la dérivée optimale ainsi que l'erreur quadratique maximale $E_{Q_{max}}$ due à la D.O et à la linéarisation classique.

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont $t_0 = 0$, $t_f = 15s$.

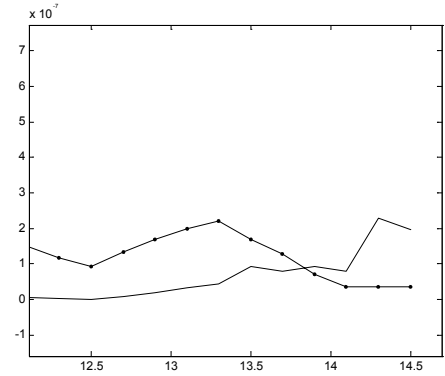
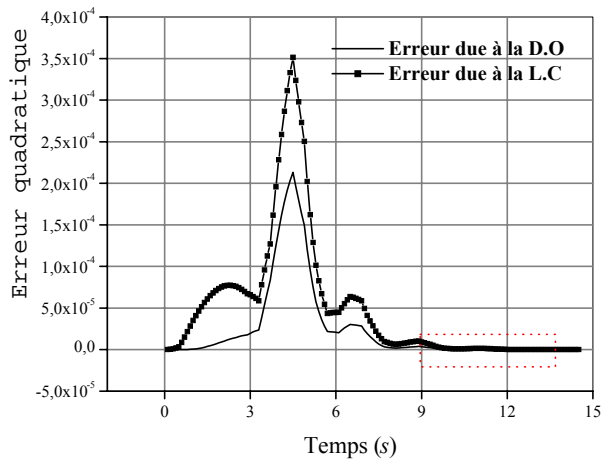


Figure -II.2.a-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (8E - 01, 5E - 01)$

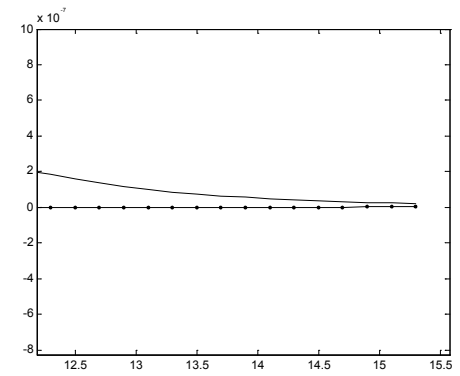
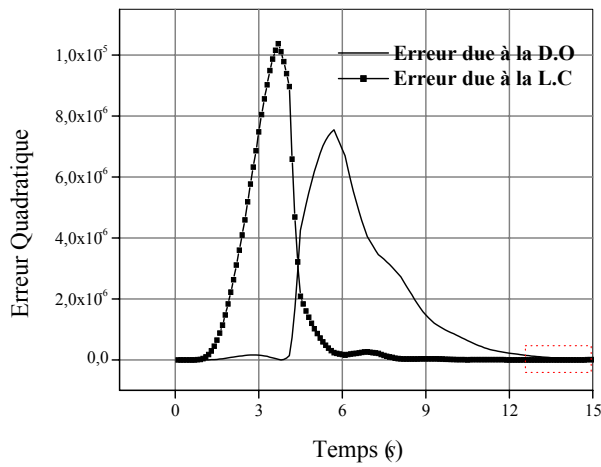


Figure -II.2.b-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (8E - 02, 5E - 01)$

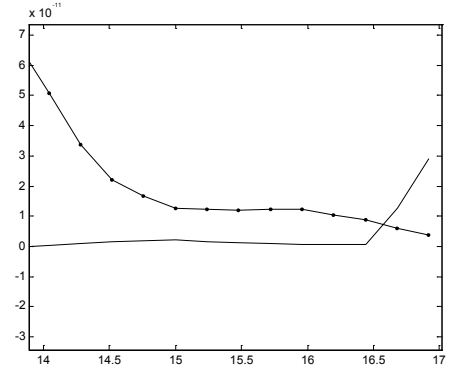
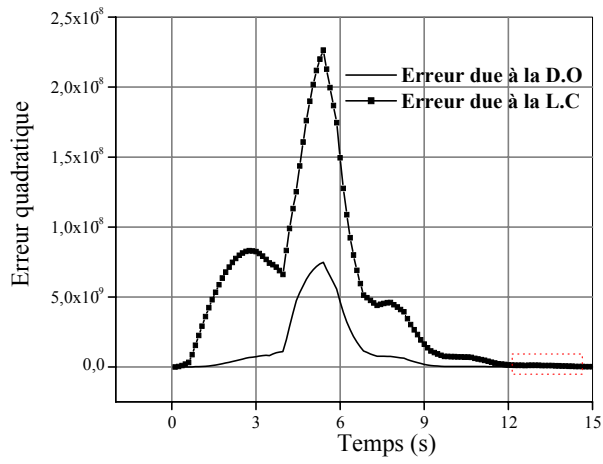


Figure -II.2.c-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(8E - 02, 5E - 02)$

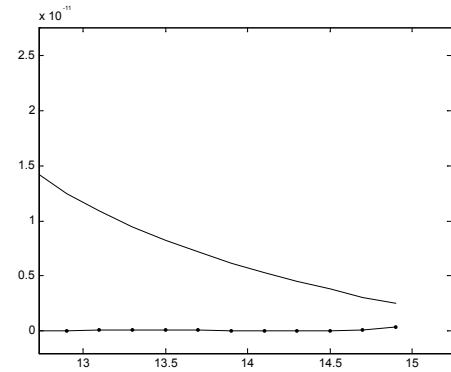
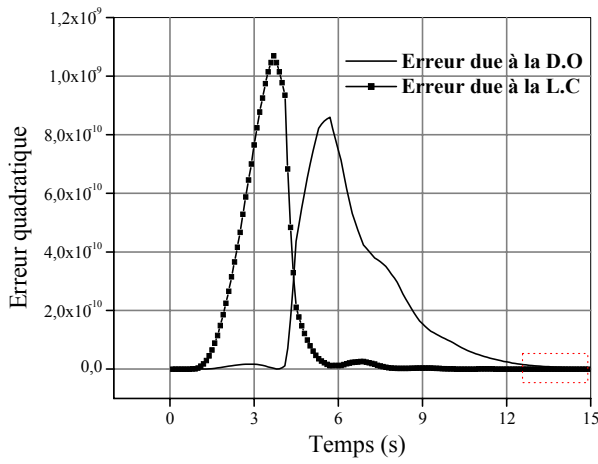


Figure -II.2.d-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(8E - 03, 5E - 02)$

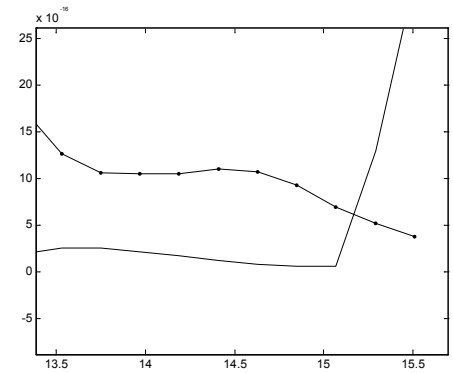
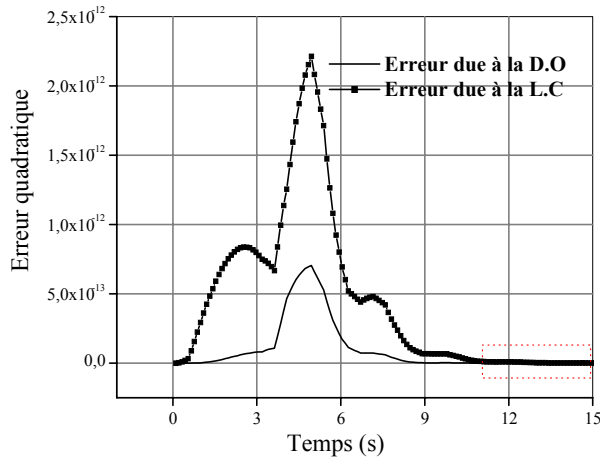


Figure -II.2.e-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(8E - 03, 5E - 03)$

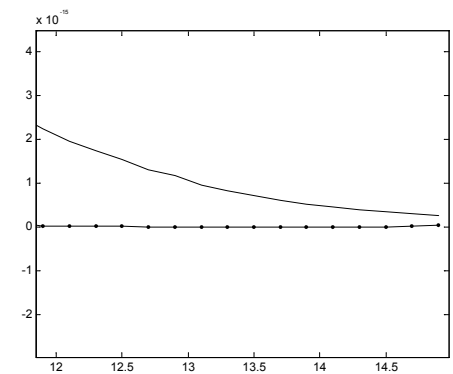
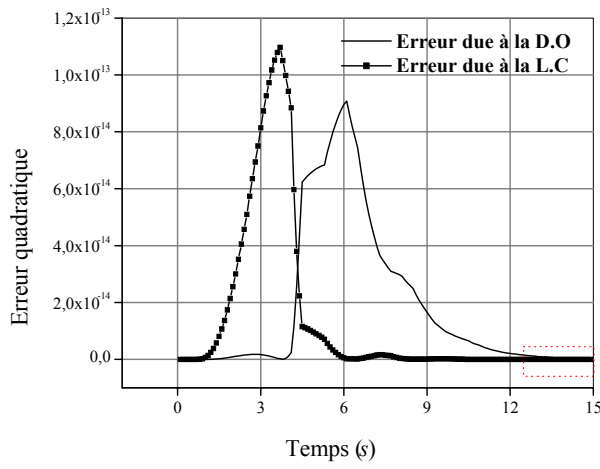


Figure -II.2.f-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(8E - 04, 5E - 03)$

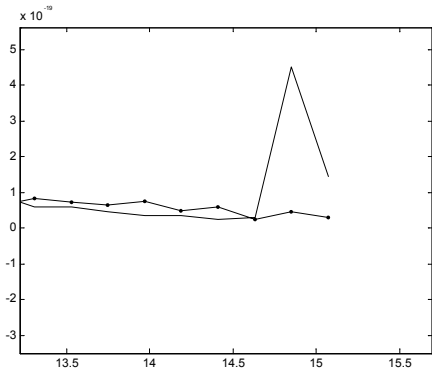
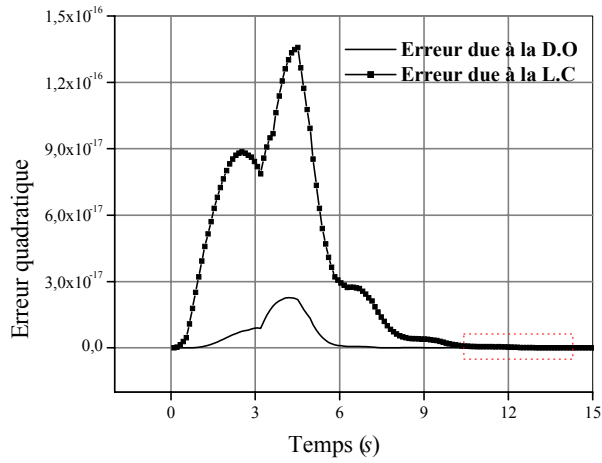


Figure -II.2.g-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(8E - 04, 5E - 04)$

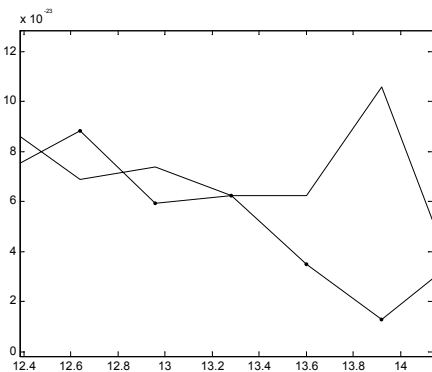
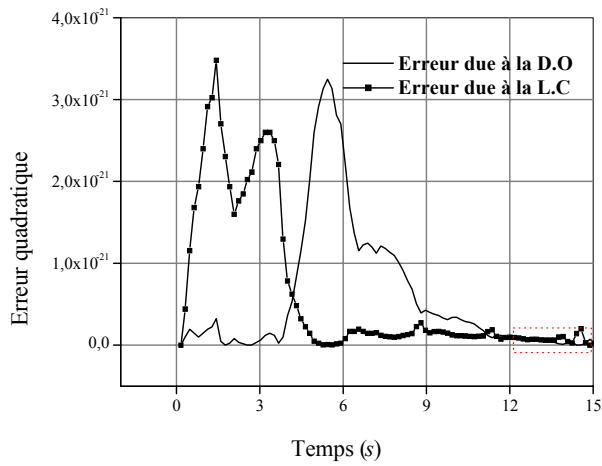


Figure -II.2.h-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0)=(8E - 05, 5E - 05)$

Analyse des résultats

Après les représentations graphiques des erreurs quadratiques, on a pu déduire à partir des figures (II.2) et le tableau (II.1) les analyses suivantes:

- Pour un temps $t < t_i$ (t_i étant le temps à partir du quel l'inversion a lieu) suffisamment éloigné, de l'origine la méthode de linéarisation classique donne une erreur importante par rapport à la méthode de la dérivée optimale. Pour un temps $t > t_i$ la méthode de la linéarisation classique donne des résultats meilleures que ceux de la dérivée optimale pour toutes les conditions initiales considérées près de l'origine. Pour $t = t_i$ les deux méthodes donnent la même marge d'erreur.
- Le choix des conditions initiales joue un rôle très important dans l'utilisation de la méthode de la dérivée optimale.

2.3.2 Exemple-2-

Dans ce deuxième exemple on va faire l'application d'un système qui a été utilisé dans les travaux de *F. Belkhouche* dans l'étude de l'influence des conditions initiales.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - ry(1-y) \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (2.8)$$

où $r = 8.55$. On se propose de faire le calcul de la dérivée optimale et de l'erreur quadratique au lieu de l'erreur absolue pour les mêmes conditions initiales utilisées par l'auteur. Le tableau (II.2) donne les matrices optimales (dérivée optimale) ainsi que l'erreur quadratique maximale correspondante, et la figure (II.3) montre le comportement de l'erreur quadratique.

Linéarisation Classique

La linéarisation classique est obtenue en calculant la dérivation au sens de Fréchet au point d'équilibre $(0, 0)$. Le calcul donne

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -8.55 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Dérivation optimale

La dérivée optimale est obtenue en appliquant l'algorithme en (1.3).

Rappelons que le calcul de l'erreur quadratique se fait en utilisant la relation suivante

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \|x_i(t) - \tilde{y}_i(t)\|^2, \quad (2.10)$$

où

$x(t)$ représente la solution du système non linéaire.

$\tilde{y}(t)$ représente la solution du système linéaire.

Résultats de la Méthode Pour l'étude de ce système on a choisi d'utiliser plusieurs conditions initiales. Les résultats obtenus (les matrices optimales données par la dérivée optimale) sont exposés dans le tableau (II.2) avec l'erreur quadratique maximale.

Conditions Initiales	Matrice de la D.O	$E_{Q_{max}}$ due à la D.O	$E_{Q_{max}}$ due à la L.C
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-1})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.1759 & -3.7333 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	0.3545	1.1348
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-1}, 5 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.0044 & -8.3194 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$4.5196E - 04$	$1.0083E-04$
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.0188 & -8.4225 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$1.4857E - 04$	$8.2931E - 05$
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -8.5278 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$7.8751E - 09$	$7.1658E - 09$
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -8.5477 \\ 1 & -2.22E - 16 \end{bmatrix}$	$4.5216E - 13$	$5.3504E - 13$
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -8.5487 \\ 1 & -5.55E - 16 \end{bmatrix}$	$2.3893E - 13$	$3.5788E - 13$
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-5}, 5 \cdot 10^{-5})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -8.5498 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$4.6499E - 17$	$5.4567E - 17$
$(x_0, y_0) = (1 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-6})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -8.5499 \\ 1 & 1.11E - 16 \end{bmatrix}$	$1.867E - 18$	$1.7049E - 18$

Tableau (II.2) : Il représente les valeurs des conditions initiales, matrices de la dérivée optimale ainsi que l'erreur quadratique maximale $E_{Q_{max}}$ due à la DO et la linéarisation classique.

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont $t_0 = 0$, $t_f = 15$ s.

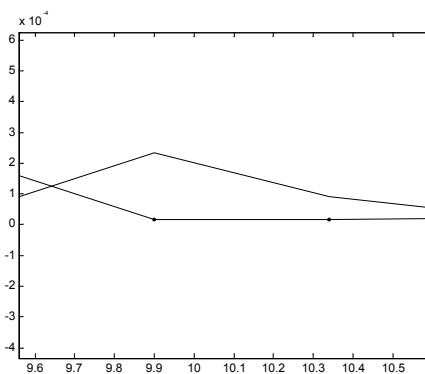
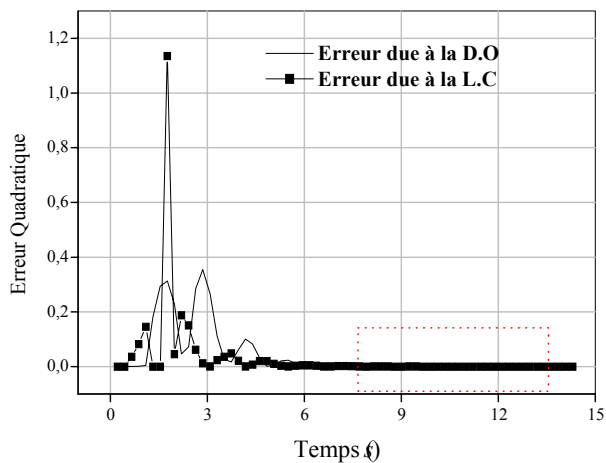


Figure -II.3.a -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 1, 5E - 1)$

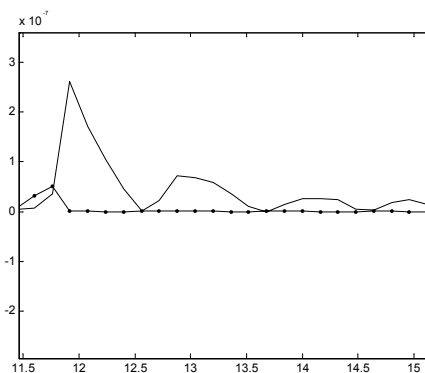
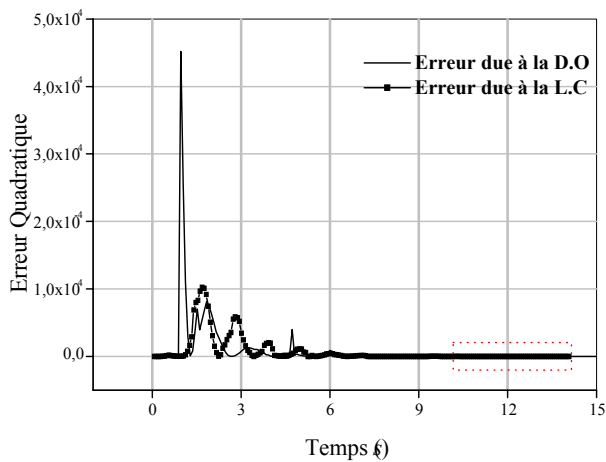


Figure -II.3.b -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 1, 5E - 2)$

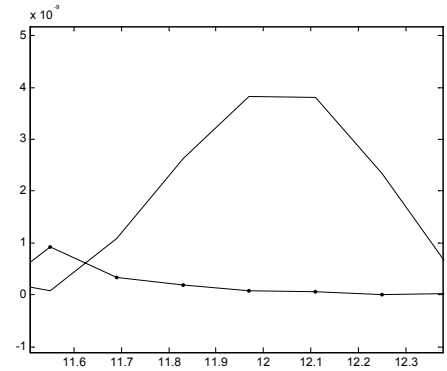
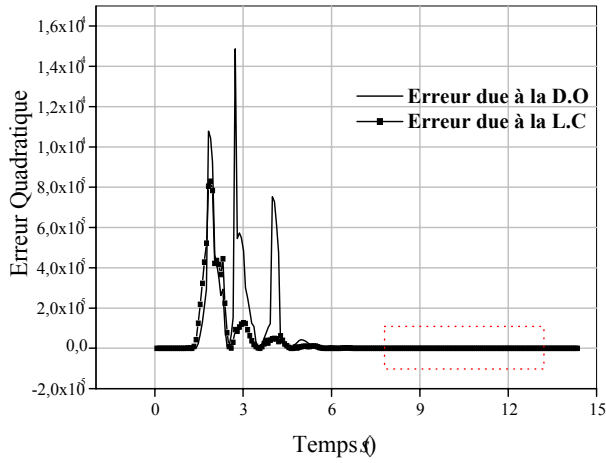


Figure -II.3.c -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 2, 5E - 2)$

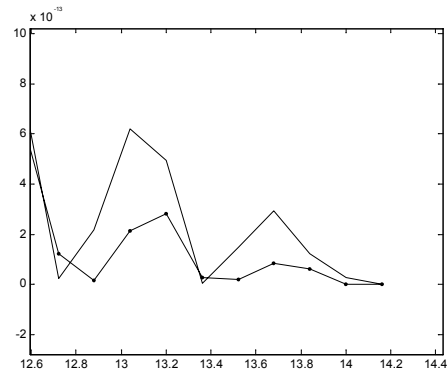
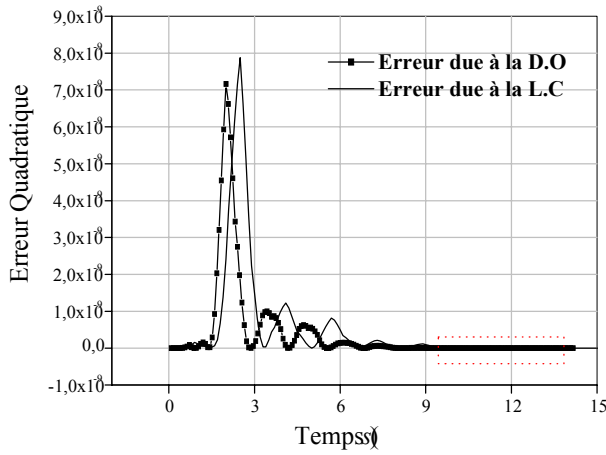


Figure -II.3.d -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 2, 5E - 3)$

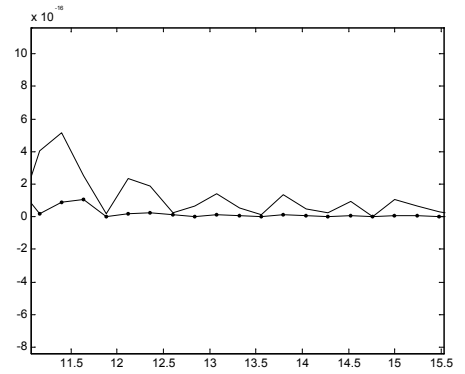
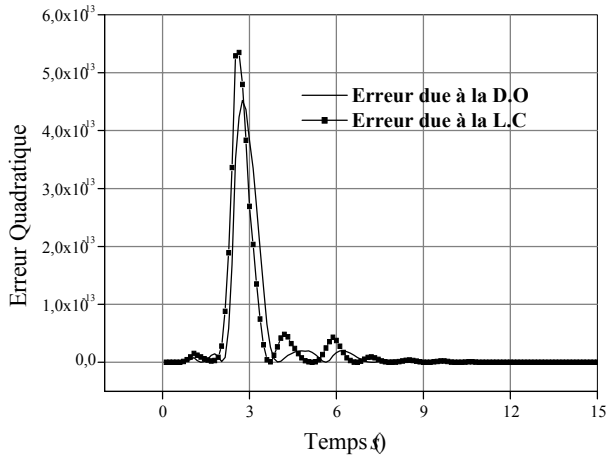


Figure -II.3.e -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 3, 5E - 4)$

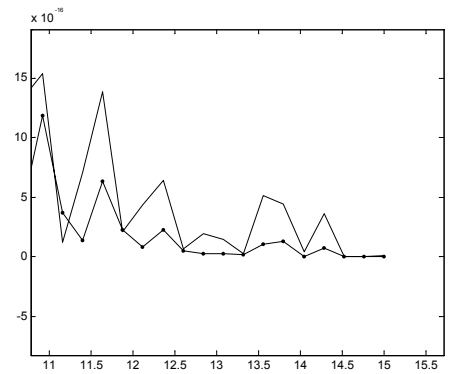
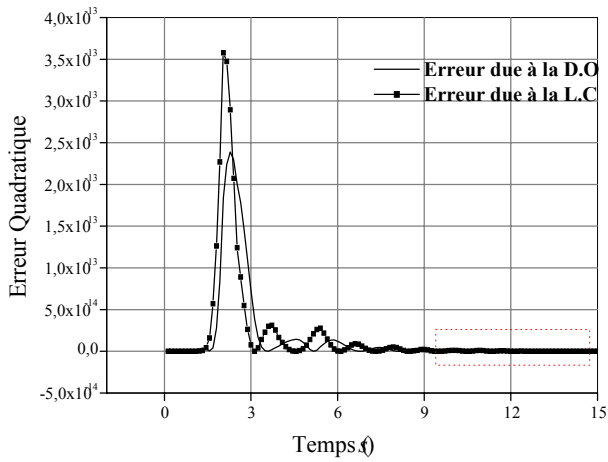


Figure -II.3.f -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 4, 5E - 4)$

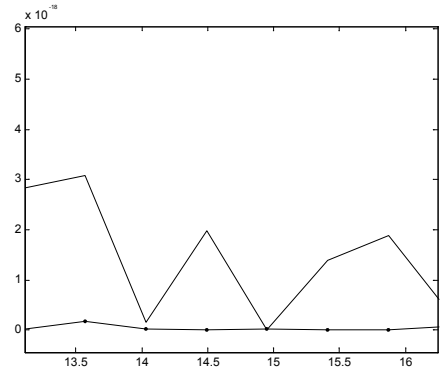
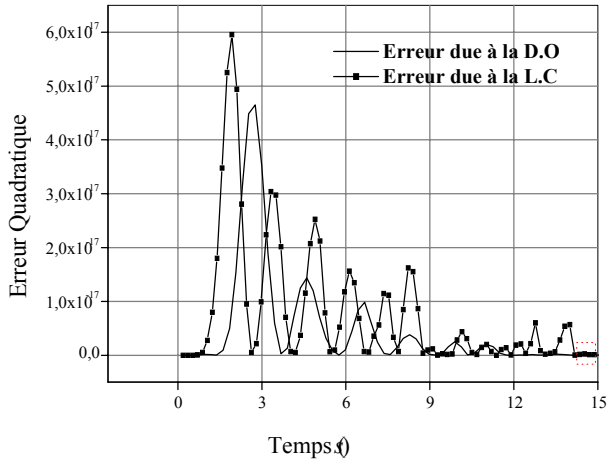


Figure -II.3.g -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 5, 5E - 5)$

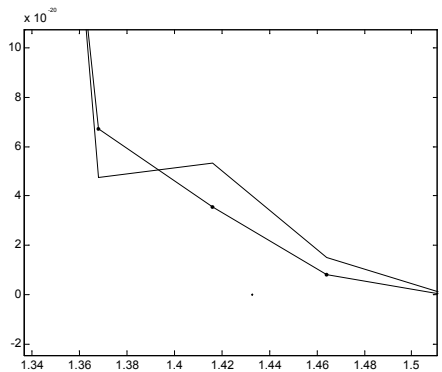
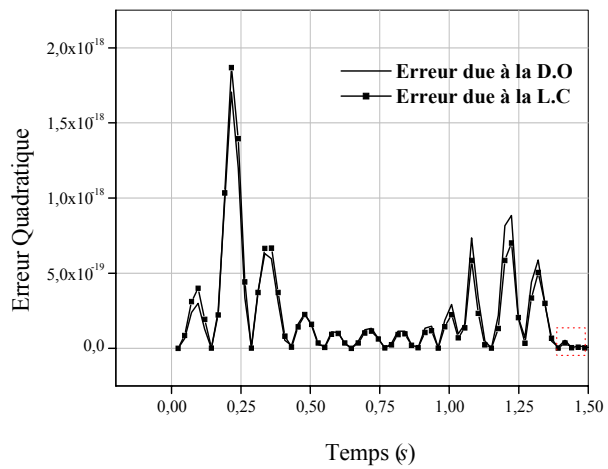


Figure -II.3.h -

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1E - 5, 5E - 6)$

Analyse des résultats

L'analyse des erreurs quadratiques permet de déduire que:

L'utilisation de l'erreur quadratique est plus adaptée pour notre problème que l'erreur absolue utilisée par l'auteur.

En fait, on peut remarquer que dans les travaux de *F. Belkhouche [69]* l'erreur absolue diminue de 0.5 pour (0.1, 0.5) à 2.10^{-10} pour $(1E - 6, 5E - 6)$ et de 1.2 pour (0.1, 0.5) à 2.10^{-18} pour $(1E - 6, 5E - 6)$ pour l'erreur quadratique et cette différence est considérable dans l'application de cette dernière.

Ceci se justifie par le fait que les deux méthodes comparées sont locales.

2.3.3 Exemple-3-

Considérons le circuit suivant ou la diode induit une non linéarité cubique

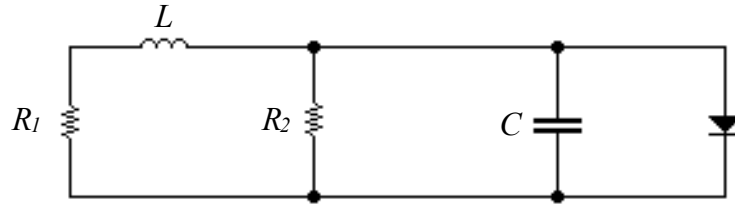


Figure (II.4)

Lorsqu'une tension V_c est appliquée à la diode dans le sens direct, le modèle de la diode est donné par:

$$f(V_c) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_c < 0 \\ a.V_c + bV_c^3 & \text{si } V_c \geq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Les paramètres de ce circuit sont

$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \Omega & L &= 10^{-3} H \\ R_2 &= 15 \Omega & a &= 2 \cdot 10^{-6} \\ C &= 1 F & b &= 1 \cdot 10^3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A partir des lois de Kirchhoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit, on obtient les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R_1}{L}i - \frac{1}{L}V_c \\ \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}i - \left(\frac{1}{R_2C} + a + bV_c^2\right)V_c. \end{cases} \quad (2.13)$$

On pose

$$\begin{cases} x = i \\ y = V_c. \end{cases} \quad (2.14)$$

Alors le système (2.13) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{R_1}{L}x - \frac{1}{L}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}x - \left(\frac{1}{R_2C} + a + by^2\right)y. \end{cases} \quad (2.15)$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs, le système s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1 \cdot 10^4 x - 1 \cdot 10^3 y \\ \frac{dy}{dt} = x - 6,67 \cdot 10^{-2} y - 1 \cdot 10^3 y^3. \end{cases} \quad (2.16)$$

Linéarisation Classique

La linéarisation classique est obtenue en calculant la dérivation au sens de Fréchet au point d'équilibre $(0, 0)$. Le calcul donne

$$DF(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 \cdot 10^4 & -1 \cdot 10^3 \\ 1 & -6.67 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Dérivation optimale

La dérivée optimale est obtenue en appliquant l'algorithme cité en (1.3).

Rappelons que le calcul de l'erreur quadratique se fait en utilisant la relation suivante

$$E_Q = \sum_{i=1}^n \|x_i(t) - \tilde{y}_i(t)\|^2, \quad (2.18)$$

où

$x(t)$ représente la solution du système non linéaire.

$\tilde{y}(t)$ représente la solution du système linéaire.

Résultats de la Méthode Pour l'étude de ce système on a choisi d'utiliser plusieurs conditions initiales. Les résultats obtenus (les matrices optimales données par la dérivée optimale) sont exposés dans le tableau (II.3) avec l'erreur quadratique maximale.

Conditions Initiales	Matrice de la D.O	E_{Qmax} due à la D.O	E_{Qmax} due à la L.C
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-2}, 8 \cdot 10^{-1})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 0.97703 & -0.4187 \end{bmatrix}$	$7.2497E - 05$	$8.7117E - 06$
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-2}, 8 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 0.99996 & -0.2584 \end{bmatrix}$	$4.8732E - 06$	$7.5832E-06$
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-2})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 0.99977 & -0.2582 \end{bmatrix}$	$7.5885E - 11$	$1.0116E - 11$
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-3}, 8 \cdot 10^{-3})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 0.99999 & -0.0001 \end{bmatrix}$	$5.1004E - 12$	$7.8415E - 12$
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-3})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 0.99999 & -0.0001 \end{bmatrix}$	$3.9313E - 17$	$1.2673E - 17$
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-4}, 8 \cdot 10^{-4})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 1 & -0.0001 \end{bmatrix}$	$4.4521E - 18$	$7.1182E - 18$
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-5}, 8 \cdot 10^{-4})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 0.99999 & -0.0001 \end{bmatrix}$	$6.4516E - 20$	$6.4516E - 20$
$(x_0, y_0) = (5 \cdot 10^{-5}, 8 \cdot 10^{-5})$	$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1E+04 & -1E+03 \\ 1 & -0.0001 \end{bmatrix}$	$1.0404E - 22$	$1.0404E - 22$

Tableau (II.3) : Il représente les valeurs des conditions initiales, matrices de la dérivée optimale ainsi que l'erreur quadratique maximale E_{Qmax} due à la D.O et la linéarisation classique.

Les valeurs des caractéristiques utilisées dans ce calcul sont $t_0 = 0$, $t_f = 15s$.

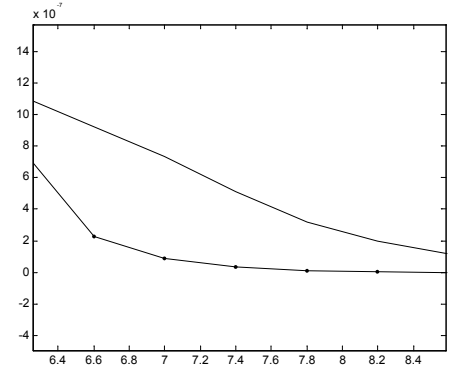
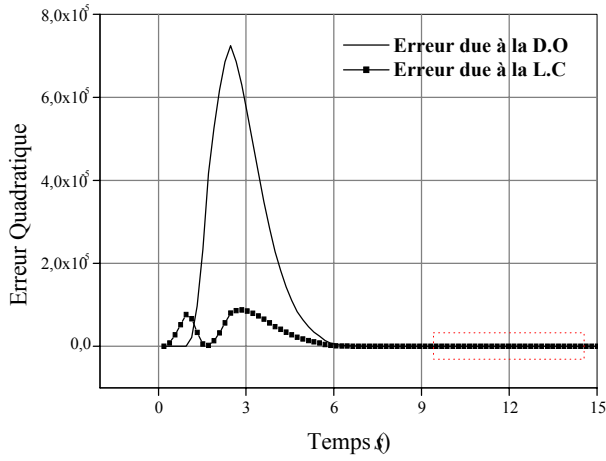


Figure -II.5.a-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 02, 8E - 01)$

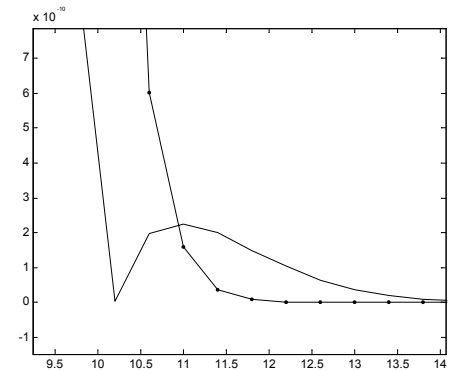
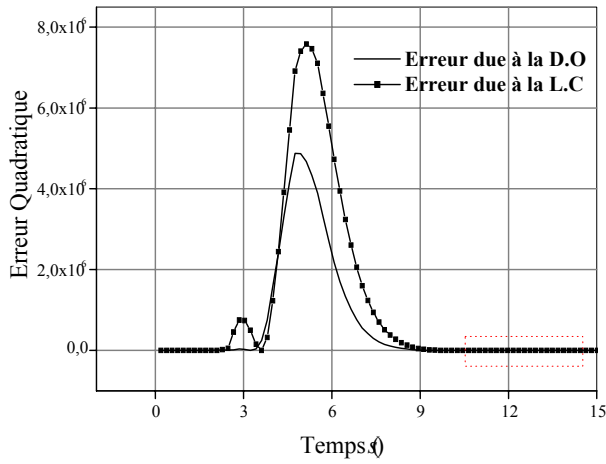


Figure -II.5.b-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 2, 8E - 2)$

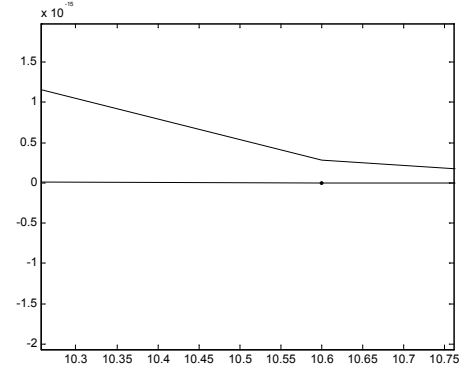
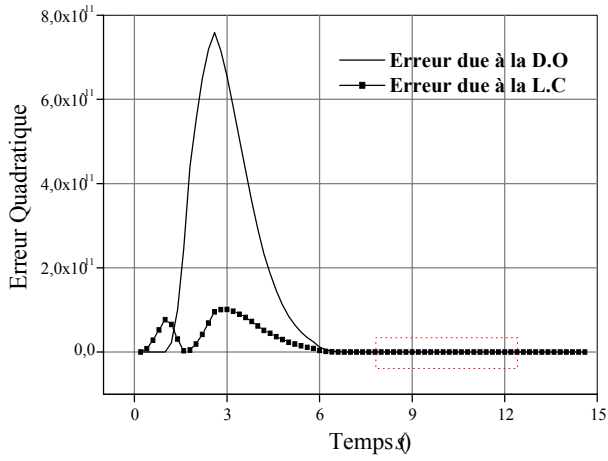


Figure -II.5.c-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 3, 8E - 2)$

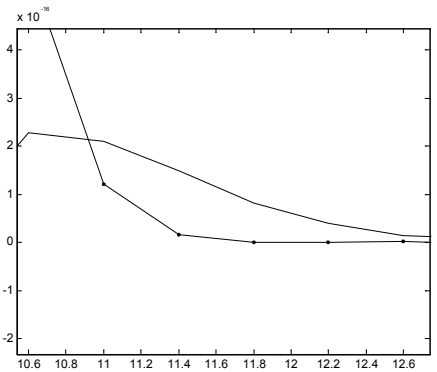
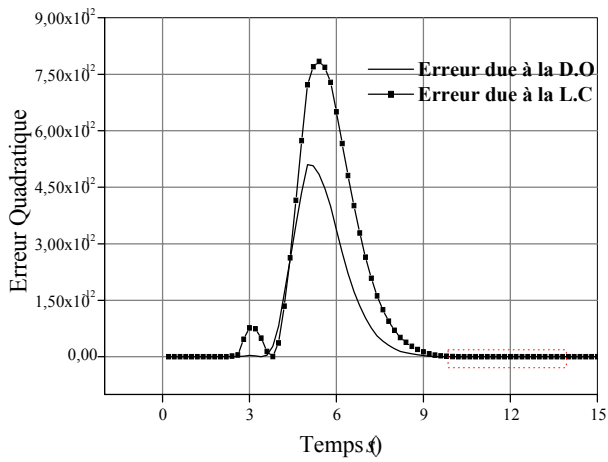


Figure -II.5.d-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 3, 8E - 3)$

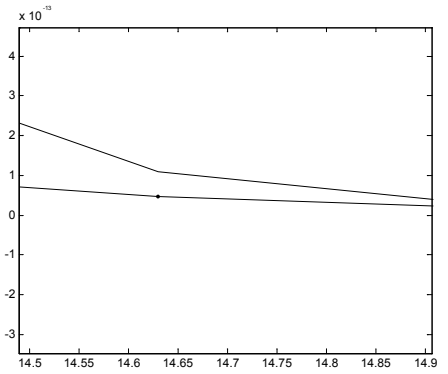
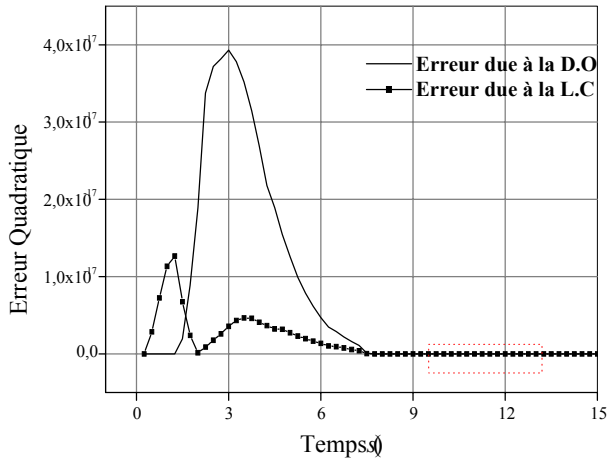


Figure -II.5.e-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 4, 8E - 3)$

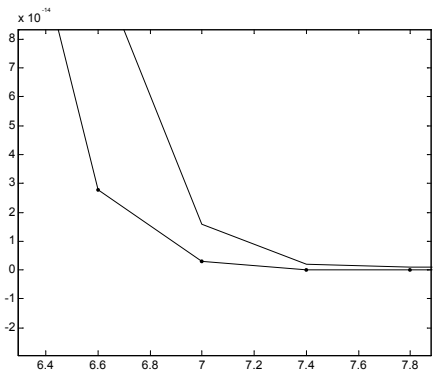
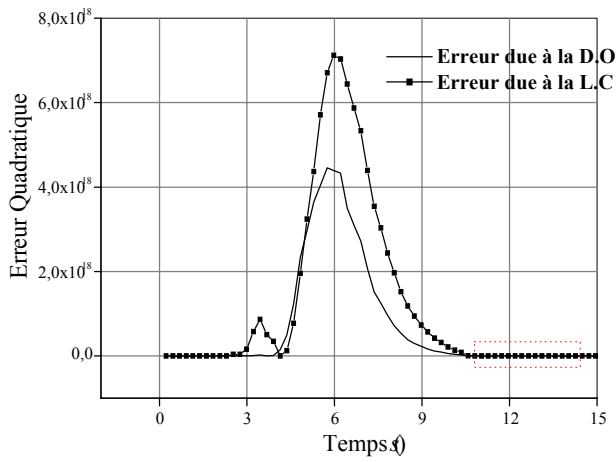


Figure -II.5.f-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 4, 8E - 4)$

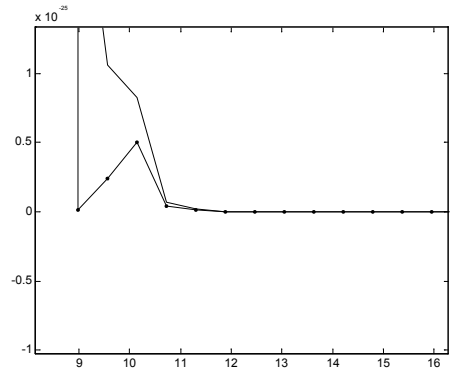
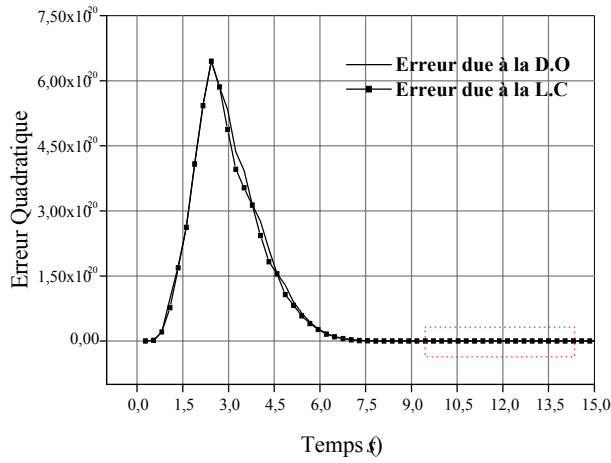


Figure -II.5.g-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 5, 8E - 4)$

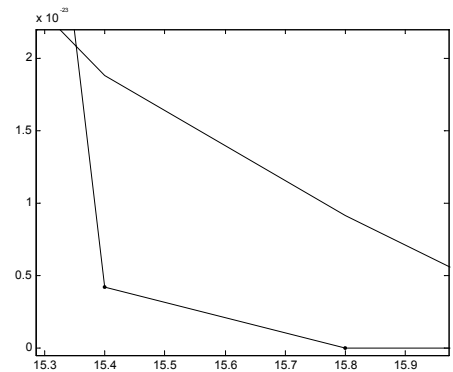
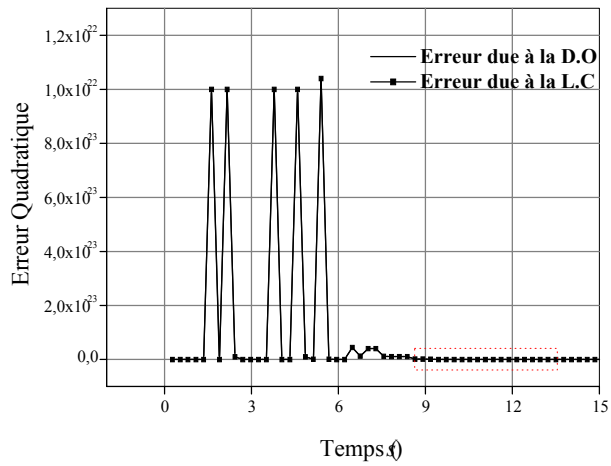


Figure -II.5.h-

Erreur Quadratique pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (5E - 5, 8E - 5)$

Analyse des résultats

Après les représentations graphiques des erreurs quadratiques, on a pu déduire à partir des figures (II.5) et le tableau (II.3) les analyses suivantes:

- Pour un temps $t < t_i$ (t_i étant le temps à partir duquel l'inversion a lieu) suffisamment éloigné de l'origine la méthode de linéarisation classique donne une erreur importante par rapport à celle de la méthode de la dérivée optimale. Pour un temps $t > t_i$ la méthode de la linéarisation classique donne des résultats meilleurs que ceux de la dérivée optimale pour toutes les conditions initiales considérées près de l'origine. Pour $t = t_i$ les deux méthodes donnent la même marge d'erreur.
- Le choix des conditions initiales joue un rôle très important dans l'utilisation de la méthode de la dérivée optimale.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré l'influence du choix des conditions initiales sur la qualité de la méthode de la dérivée optimale, et ceci à partir d'un calcul d'erreur quadratique.

Troisième chapitre

Relation Entre La Dérivée Optimale et La Dérivée au Sens de Fréchet

Chapitre 3

Relation Entre la Dérivée Optimale et la Dérivation au Sens de Fréchet.

3.1 Introduction

Les méthodes numériques permettent en principe de calculer la réponse de n'importe quels systèmes non linéaires avec le degré de précision voulu, d'où ces méthodes nécessitent au préalable un entraînement dans la pratique. En effet, la diversité des méthodes est telle qu'il est important, pour résoudre correctement et dans les meilleures conditions un problème donné, d'avoir une idée de la méthode ou des méthodes les mieux appropriées à ce type de problèmes.

On a vu dans le chapitre 2 l'influence des conditions initiales sur l'utilisation de la méthode de la dérivée optimale. Dans ce chapitre, on va faire une comparaison entre la linéarisation classique et la dérivée optimale. Pour cela, les résultats obtenus dans le chapitre précédent vont nous servir pour faire cette étude.

Notant que le but recherché dans les travaux par *Benouaz* et *Arino* [57], [58] par l'introduction de la dérivée optimale, était d'améliorer la linéarisation, classique, et de présenter une alternative lorsque celle-ci (linéarisation classique) n'est pas calculable ou n'existe pas.

3.2 Relation entre la dérivée optimale et la dérivation au sens de Fréchet en 0.

La relation donnant la dérivée optimale s'écrit (1.3)

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))] [x(t)]^T dt \right] \left[\left[\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right] \right]^{-1}. \quad (3.1)$$

Si la dérivée de la fonction non linéaire F en 0 existe, alors:

$$F(x) = DF(0)x + o(|x|). \quad (3.2)$$

En substituant l'équation (3.2) dans l'expression (3.1), on obtient

$$\tilde{A} = DF(0) + \underbrace{\left[\int_0^{+\infty} [o(|x(t)|)] [x(t)]^T dt \right]}_{o(1)} \left[\int_0^{+\infty} [x(t)] [x(t)]^T dt \right]^{-1} \quad (3.3)$$

où $o(1)$ désigne une quantité qui tend vers 0 quand $x_0 \rightarrow 0$, en supposant que $|x(t)|$ reste de l'ordre de $|x_0|$.

La dérivée optimale de F en x_0 peut s'écrire donc

$$\tilde{A} = DF(0) + o(1). \quad (3.4)$$

3.3 Problématique

La précision sur la dérivation optimale s'écrit en fonction de la norme de la condition initiale x_0 (1.3.1) et est donnée par :

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| < O(\|x_0\|)^2.$$

Le but est d'essayer de montrer, jusqu'à quel pourcentage de la condition initiale, la précision se maintient. Il va de soi que tant que $\|x_0\|$ est "grande" dans un certain sens, l'approximation doit être bonne. Les choses se gâtent quand on approche de 0.

En effet, on montre qu'à l'approche de 0, il y a inversion de l'erreur quadratique au profit de la linéarisation classique. Ceci montre, que la linéarisation classique est meilleure à l'origine quand elle existe.

3.4 Applications

Nous allons utiliser les résultats des exemples du chapitre 2 pour faire cette étude. Ce qui va nous permettre de tracer les graphes

$$\text{erreur quadratique max} = \text{en fonction de } (\|x_0\|)$$

Les courbes sont obtenues à partir d'un lissage polynomiale à l'aide du logiciel Origine. La détermination de la valeur x_0 pour laquelle la courbe d'erreur change de comportement sera calculée à l'aide d'un programme en Matlab.

Exemple 1 *Considérons le circuit électronique suivant*

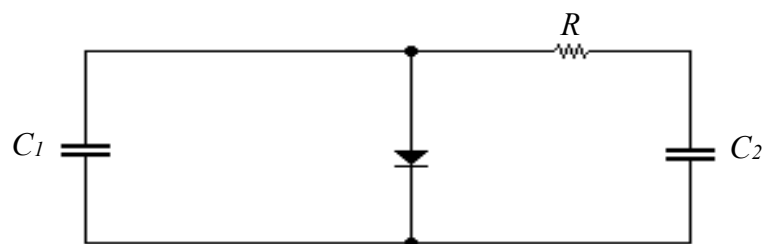


Figure (III.1)

A partir des lois de Kirchhoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit on obtient les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{a}{C_1}x - \frac{b}{C_1}x^2 - \frac{d}{C_1}x^4 - \frac{1}{RC_1}x + \frac{1}{RC_1}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC_2}x - \frac{1}{RC_2}y, \end{cases} \quad (3.5)$$

L'application numérique donne le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(1.8 \cdot 10^{-2}x + 4.45 \cdot 10^{-5}(10x^2 + x^4) - 1.38 \cdot 10^{-2}y) \\ \frac{dy}{dt} = 8.66 \cdot 10^{-3}(x - y). \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après les résultats obtenus dans le chapitre 2 section (3.1) on a les graphes suivants

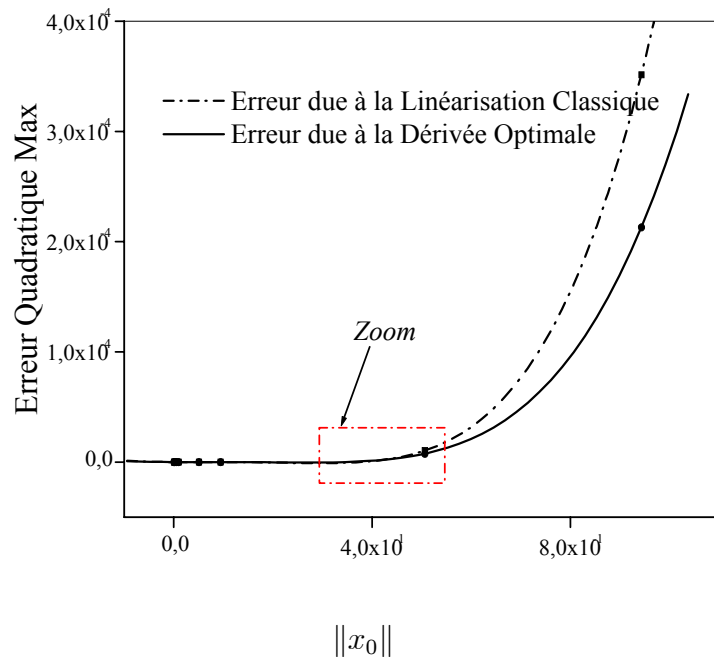
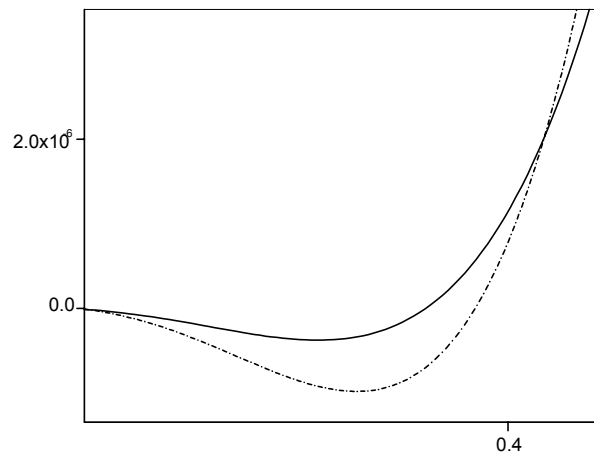


Figure (III.2)

Erreur Quadratique maximale en fonction de $\|x_0\|$.



Zoom de la partie ou se produit l'inversion de la qualité de l'approximation.

Exemple 2 *Considérons le système ordinaire non linéaire suivant*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 8.55y(1-y) \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (3.7)$$

D'après les résultats obtenus dans le chapitre 2 section (3.2) on a les graphes suivants

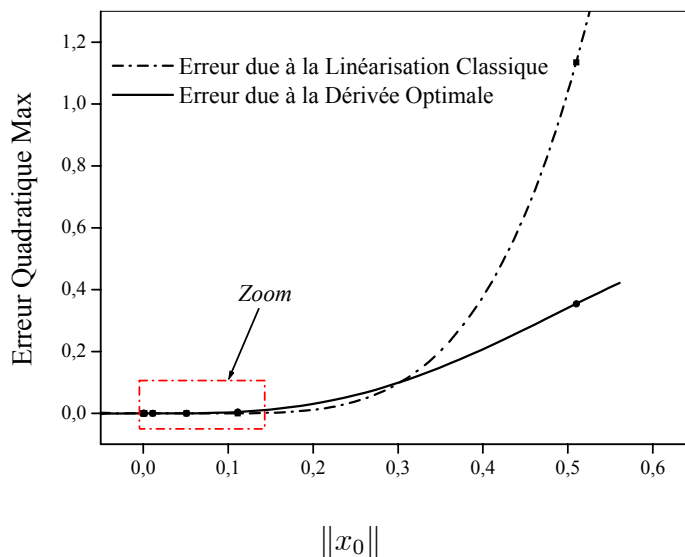
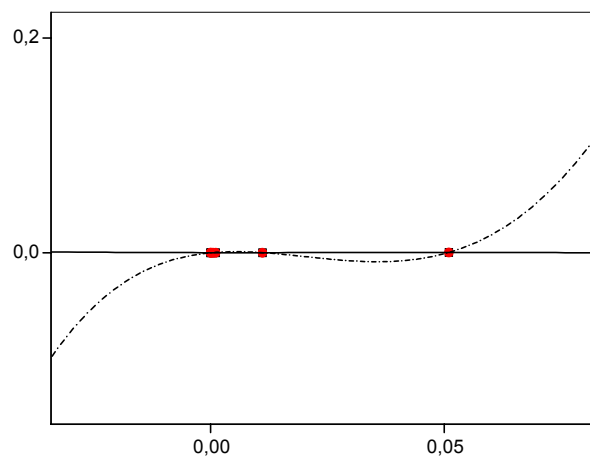


Figure (III.3)

Erreur Quadratique maximale en fonction de $\|x_0\|$.



Zoom de la partie où se produit l'inversion de la qualité de l'approximation.

Exemple 3 *Considérons le système ordinaire non linéaire suivant*

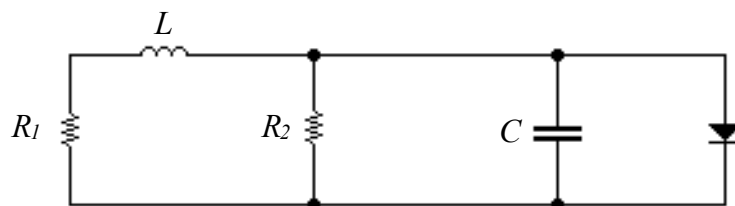


Figure (III.4)

A partir des lois de Kirchoff relatives aux noeuds et aux mailles du circuit on obtient les équations d'état suivantes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{R_1}{L}x - \frac{1}{L}y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}x - \left(\frac{1}{R_2C} + a + by^2\right)y, \end{cases} \quad (3.8)$$

L'application numérique donne le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -1 \cdot 10^4 x - 1 \cdot 10^3 y \\ \frac{dy}{dt} = x - 6,67 \cdot 10^{-2} y - 1 \cdot 10^3 y^3. \end{cases} \quad (3.9)$$

D'après les résultats obtenus dans le chapitre 2 section (3.3) on a les graphes suivants

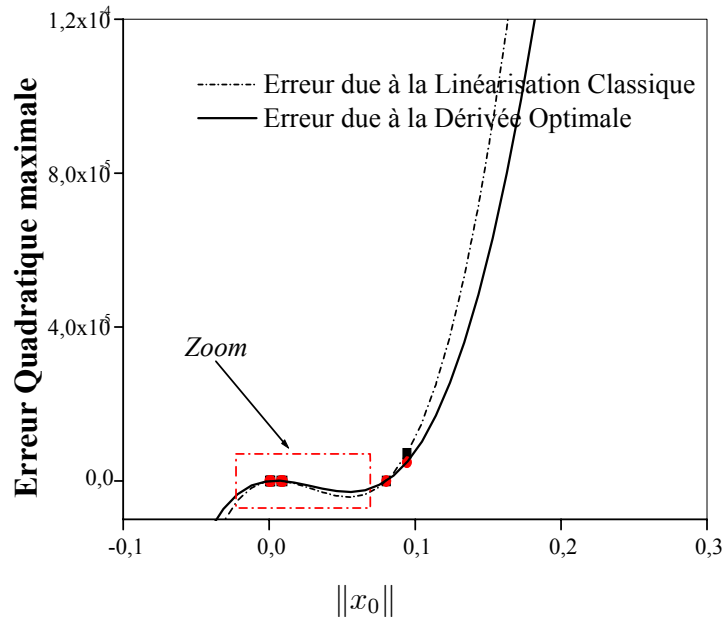
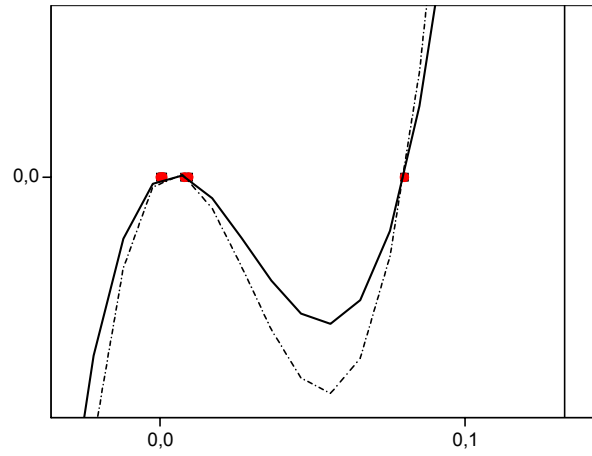


Figure (III.5)

Erreur Quadratique maximale en fonction de $\|x_0\|$.



Zoom de la partie où se produit l'inversion de la qualité de l'approximation.

3.5 Analyse des résultats

Après les représentations graphiques des erreurs quadratiques maximale, on a pu déduire à partir des figures (III.2), (III.3) et (III.5) et les tableaux (II.1), (II.2) et (II.3) vue dans le chapitre 2 et les résultats obtenus par *F. Belkhouche* [69] les analyses suivantes:

- La représentation de l’erreur quadratique maximale en fonction de $\|x_0\|$ relatif à la linéarisation classique ainsi qu’à la dérivée optimale nous permet de scinder notre courbe en deux parties distinctes :
 - 1- La première partie ou l’erreur quadratique maximale due à la linéarisation classique est inférieure à celle due à la dérivée optimale sur un intervalle de $\|x_0\| < 0,43$ près. Dans ce cas la linéarisation classique donne une meilleure approximation que la dérivée optimale.
 - 2- La deuxième partie ou l’erreur quadratique maximale due à la linéarisation classique devient nettement supérieure à celle due à la dérivée optimale sur un intervalle $\|x_0\| > 0,43$, c’est la dérivée optimale qui est meilleure.
- Le deuxième exemple (fig (III.3)) ainsi que le troisième (fig (III.5)) nous permettent de confirmer les résultats du premier exemple pour des valeurs respectives de $\|x_0\| = 0,34$ et $\|x_0\| = 0,007$.
- Pour une condition initiale x_0 donnée, l’approximation par la dérivation optimale est meilleure dans un voisinage de la donnée initiale, tandis que la linéarisation classique est meilleure au voisinage de l’origine.

Ces deux aspects reflètent le fait que la linéarisation par la dérivation au sens de Fréchet (lorsqu’elle existe et lorsqu’elle est hyperbolique) constitue la meilleure approximation au voisinage de l’origine l’origine.

Applications

- Ecueils à la bonne utilisation
de la linéarisation Classique**

Chapitre 4

Applications - Ecueils à la bonne utilisation de la linéarisation classique

4.1 Introduction

Quel que soit le but recherché (compréhension d'un phénomène, simulation, prédiction, synthèse d'une loi de commande, etc.) la connaissance d'un système dynamique requiert une modélisation mathématique de plus en plus précise. La recherche de cette précision conduit souvent à une modélisation sous forme d'équations différentielles à structure non linéaire, soit parce que, des phénomènes non linéaires jouent un rôle dominant, soit parce que dans certaines conditions de fonctionnement, le système voit ses caractéristiques dynamiques varier et qu'il est nécessaire d'en tenir compte pour l'analyse de la stabilité ou pour la conception d'une loi de commande qui présente certaines propriétés de robustesse. Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la relation entre la linéarisation classique et la dérivée optimale, et on a vu que la linéarisation classique présente un moyen important, qui souvent permet de donner une bonne approximation.

Cependant des inconvénients liés à l'utilisation de cette méthode existent en particulier

dans les cas suivants :

- i)* - La matrice au sens de Fréchet au point d'équilibre n'existe pas, c'est le cas où la fonction non linéaire définissant l'équation n'est pas régulière.
- ii)* La matrice jacobienne au point zéro est nulle.
- iii)* La matrice jacobienne est stable et non pas asymptotiquement stable.

Dans ce chapitre, nous allons voir à travers quelques exemples que la dérivation optimale peut être une alternative.

4.2 Applications

4.2.1 Cas où la fonction n'est pas différentiable en 0

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + \alpha \cdot \sin(|y|) \\ \frac{dy}{dt} = -y + \alpha \cdot \sin(|x|) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), |\alpha| < 1 \quad (4.1)$$

Ce système comporte une non-linéarité de type valeur absolue, donc non différentiable en zéro.

Pour $\alpha = 0.5$, la matrice jacobienne de F en x_0 s'écrit

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0.4388 \\ 0.2701 & -1 \end{bmatrix}, (x_0, y_0) = (1, 0.5).$$

Après 5 itérations, la procédure de calcul de la dérivée optimale donne pour $\varepsilon = 10^{-6}$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.0153 & 0.5086 \\ 0.3262 & -0.7964 \end{bmatrix}, (x_0, y_0) = (1, 0.5). \quad (4.2)$$

Les figures (4.1), (4.2) représentent les courbes des composantes $(x(t), y(t))$ de la solution des systèmes (4.1), (4.2), en fonction du temps

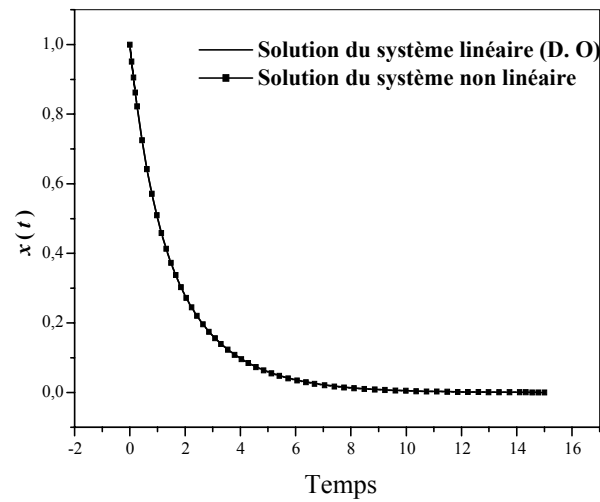


Figure (4.1)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (1, 0.5)$$

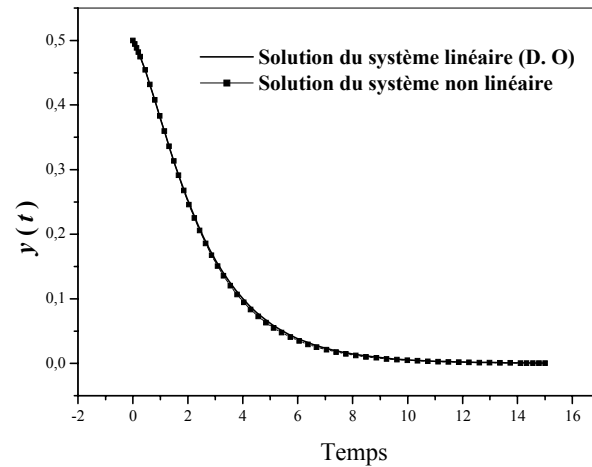


Figure (4.2)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (1, 0.5)$$

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non-linéaire.

4.2.2 Cas où la différentielle en zéro est nulle

Dans cet exemple, nous allons considérer un système pour lequel $DF(0) = 0$.

Considérons le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x^4}{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{y^4}{x^2 + y^2} \end{cases}, \quad (x_0, y_0) = (1, 0.5). \quad (4.3)$$

La dérivée étant nulle au point $(0, 0)$, on ne peut donc déduire le comportement de la solution de l'équation non-linéaire de celle de la linéarisation en ce point.

Avec $DF(x)$ calculée en (x_0, y_0)

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1,1209 & 0,6127 \\ 0,3085 & -0,7844 \end{bmatrix}, \quad (x_0, y_0) = (1, 0.5)$$

et après sept itérations, la procédure de calcul de la dérivée optimale donne pour $\varepsilon = 10^{-6}$:

$$\tilde{A}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1,1030 & 0,6127 \\ 0,3085 & -0,7844 \end{bmatrix}, \quad (x_0, y_0) = (1, 0.5). \quad (4.4)$$

Les figures (4.3), (4.4) représentent les courbes des composantes $(x(t), y(t))$ de la solutions des systèmes (4.3), (4.4) en fonction du temps.

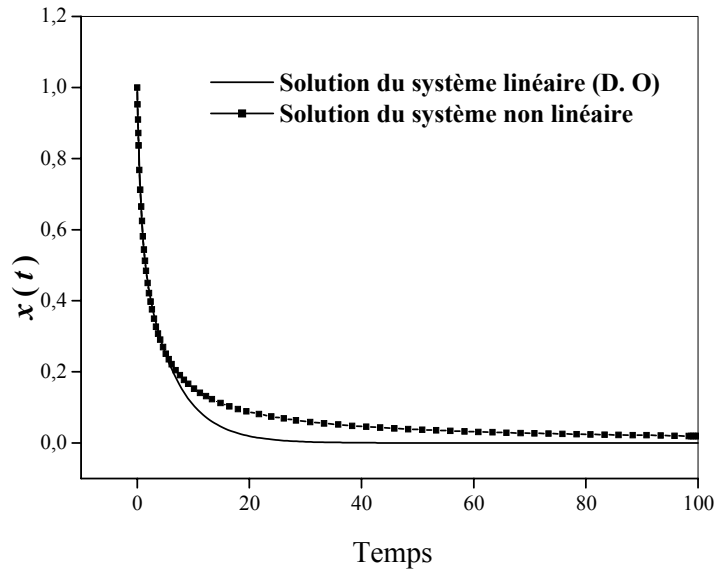


Figure (4.3)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales
 $(x_0, y_0) = (1, 0.5)$

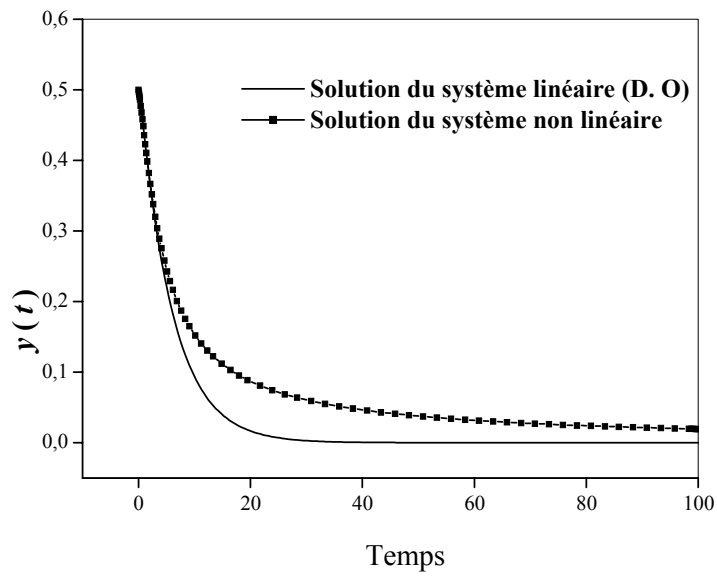


Figure (4.4)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales
 $(x_0, y_0) = (1, 0.5)$

4.2.3 Cas d'un noeud

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - \frac{2y}{\text{Ln}(x^2 + y^2)} \\ \frac{dy}{dt} = -y + \frac{2x}{\text{Ln}(x^2 + y^2)} \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0.5), \quad (4.5)$$

dans le disque unité ouvert $x^2 + y^2 < 1$. Observons que $\frac{2y}{\text{Ln}(x^2 + y^2)}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 au voisinage de $(0, 0)$. Elle admet en effet une limite égale à 0 à l'origine, ainsi que ses dérivées partielles :

$$\frac{-4xy}{(x^2 + y^2)(\text{Ln}(x^2 + y^2))^2} \frac{2}{\text{Ln}(x^2 + y^2)} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)(\text{Ln}(x^2 + y^2))^2}.$$

Il en est de même pour le terme $\frac{2x}{\text{Ln}(x^2 + y^2)}$. L'origine est donc un point singulier.

La linéarisation au 1er ordre donne :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}, (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \quad (4.6)$$

qui admet pour valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Le système (4.6) présente donc un noeud propre stable. La linéarisée $DF(x)$ calculée en x_0 s'écrit

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} -1 & 3.524 \\ -1.4426 & -1 \end{bmatrix}, (x_0, y_0) = (0, 0.5).$$

Après 8 itérations la procédure de calcul de la dérivée optimale donne pour $\varepsilon = 10^{-6}$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.4957 & 1.2452 \\ -0.5193 & -1.1276 \end{bmatrix}, (x_0, y_0) = (0, 0.5) \quad (4.7)$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.3648 + 0.8194i \\ \lambda_2 = -1.3648 - 0.8194i \end{cases}$$

Comme $\text{Re}(\tilde{\lambda}_1), \text{Re}(\tilde{\lambda}_2) < 0$, la dérivée optimale fait apparaître l'origine comme un foyer stable, et l'origine est asymptotiquement stable comme le montre les figures (4.5), (4.6) et (4.7).

Les figures (4.5), (4.6) et (4.7) représentent les courbes des composantes $(x(t), y(t))$ de la solutions des systèmes (4.5), (4.7), en fonction du temps et le plan de phase.

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale obéit à la même dynamique que celle donnée par l'équation non linéaire.

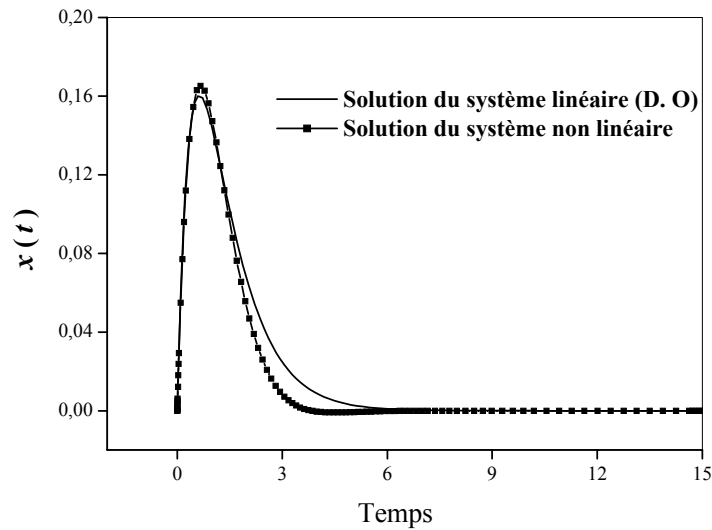


Figure (4.5)

Solution de la variable x en fonction du temps pour les conditions initiales

$$(x_0, y_0) = (1, 0.5)$$

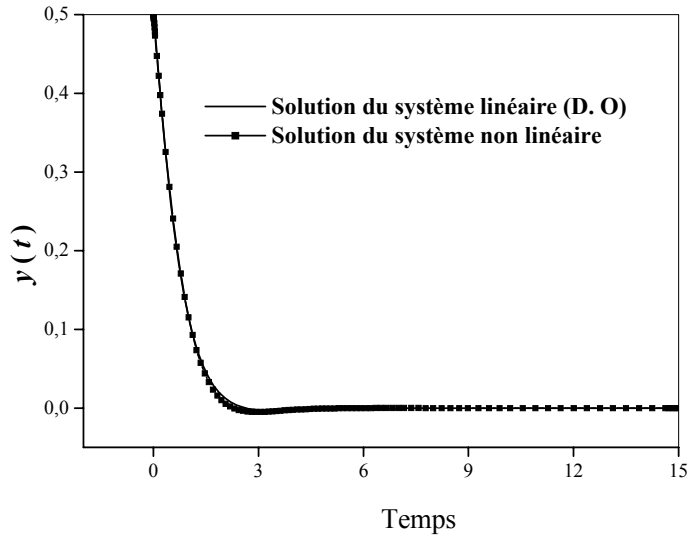


Figure (4.6)

Solution de la variable y en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1, 0.5)$

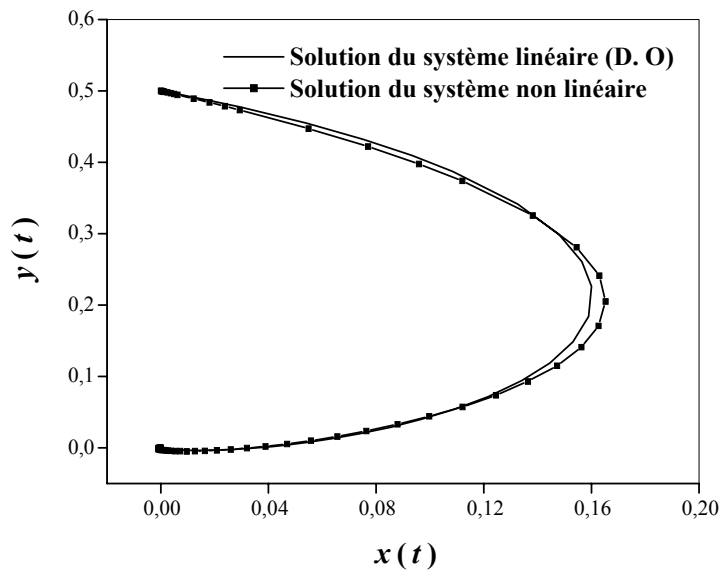


Figure (4.7)

Plan de phase $y(x)$ pour les conditions initiales $(x_0, y_0) = (1, 0.5)$

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Dans cette thèse, nous avons appliqué deux méthodes de linéarisation : la linéarisation classique et la dérivée optimale pour la résolution des équations différentielles ordinaires non-linéaires.

Les principaux résultats de notre travail sont les suivants :

- A partir des résultats acquis lors des applications faites dans le chapitre 2 concernant l'influence des conditions initiales, on conclut que le choix des conditions initiales s'impose dans l'utilisation de ces deux méthodes, ainsi que l'ordre d'approximation.
- On a montré par un calcul d'erreur quadratique, que tant qu'on est loin de l'origine la méthode de la dérivée optimale est meilleure mais à l'approche de l'origine il y a un point d'inversement où la linéarisation classique est meilleure (si elle existe et si elle est hyperbolique).
- Les écueils posés par la méthode de la linéarisation classique sont résolubles par la méthode de la dérivée optimale, ce que nous avons déduit dans le dernier chapitre de cette thèse.

Enfin, le travail entrepris dans le cadre de cette thèse ouvre une direction de recherche qui mérite à notre avis, d'être approfondi, en particulier:

- Faire cette comparaison dans le cas des systèmes non autonomes.
- Enfin, voir l'influence des conditions initiales dans le cas des systèmes non autonomes.

Bibliographie

- [1] **E. A. Coddington and N. Levinson**, (1955), *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc-Graw, New York.
- [2] **J. Cuningham**, (1958), *Introduction to Nonlinear Analysis*, Mc-Graw, New York.
- [3] **W. Ralston and Wilf**, (1960), *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, New York, pp110-120.
- [4] **R. E. Kalman, E. J. E. Bertran**, (1960), *Control System Analysis and Design via Second Method of Liapunov*, Journal of Basic Engineering, 371-393.
- [5] **V. Lakshmikantham and S. Leila**, (1969), *Differential and Integral Inequalities*, Volume II, Academic Press New York and London.
- [6] **J. Hale**, (1969), *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag.
- [7] **A. Fossard**, (1972), *Commande des Systèmes Multidimensionnels*, Dunod.
- [8] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations différentielles Ordinaires, Tome 1, Théorie Générale*, Masson et C^{ie}.
- [9] **B. Vujanovic**, (1973), *Application of the Optimal Linearization Method to the Heat Transfer Problem*, International, Int. Heat. Mass Transfer, vol.16, pp. 1111-1117.
- [10] **N. Rouche, J. Mawhin**, (1973), *Equations Différentielles Ordinaires, Tome II, Théorie Générale*, Masson et C^{ie}.

- [11] **V. Arnold**, (1974), *Equations Différentielles Ordinaires*, Edition Mir. Moscou.
- [12] **A. Volovoich**, (1974), *Linear Multivariable Systems*, New-York Springer.
- [13] **L. Pontriaguine, V. Boltianski, R. Gamkrélidzé, E.Michtchenko**, (1974), *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*, Edition Mir. Moscou.
- [14] **W. Rudin**, (1975), *Analyse Complexe et Réelle*, Masson et C^{ie}.
- [15] **B. Vujanovic, B. Balic**, (1975), *Application of Gauss principle of least constraint to the non-linear heat transfer problem*, Int. Heat. Mass Transfer, vol.13, pp. 721-730. Pergamon Press, Oxford.
- [16] **CH.Masselot**, (1975), *Electronique Non Linéaires 1*, Paris, Masson.
- [17] **L. Pontriaguine**, (1975), *Equations Différentielles Ordinaires*, Edition Mir. Moscou.
- [18] **J. CH. Gille, P. Decaulne, M. Pelegrin**, (1975), *Systèmes Asservis non Linéaires (Tome1 et Tome2)*, Dunod Automatique.
- [19] **N. Robert and Jr. Awiley**, (1976), *Non linear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, Interscience Publication.
- [20] **L. Pontriaguine**, (1976), *Les Equations différentielles Ordinaires*, Edition Mir. Moscou.
- [21] **H. Maurin**, (1976), *Programmation des Equations Linéaires*, Technique.
- [22] **J. Leilong-Ferrand and A. M. Arnaudies**, (1977), *Analyse Cours de Mathématique*, Tome 2 4^{ème} Edition, Dunod.
- [23] **J. Baranger**, (1977), *Introduction à l'Analyse Numérique*, Herman Paris, Collection Méthodes.

- [24] **J. C. Gille**, (1977), *Introduction aux Systèmes Asservis non Linéaires*, Dunod Université.
- [25] **J.HERVE**, (1981), *Electronique appliquée à la Transmission de l'Information: Conception et Calcul des Circuits Non Linéaires*, Paris, Masson.
- [26] **H. Reinhart**, (1982), *Equation Différentielle, Fondements et Applications*, Gauthier-Villars.
- [27] **K. Arbenz and A. Wohlhauser**, (1983), *Analyse Numérique*, Presse Polytechnique Romandes.
- [28] **Shmuel Kantorovitz**, (1983), *Spectral Theory of Banach Space Operators*, Berlin Heidelberg, New York, Tokyo.
- [29] **M. Hasler and J. Neiryneck**, (1985), *Circuits non Linéaires*, Presse Polytechnique Romandes.
- [30] **A. Z. Bensnane**, (1986), *Linéarisation Optimale des Equations d'Etat Non Linéaire*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [31] **J. C. Vaissière and J. P. Nougier**, (1986), *Programmes et Exercices sur les Méthodes Numérique*, Masson.
- [32] **A. Jordan et al**, (1986), *Transient State Temperature Distribution in a Cylindrical Electrical Conductor: Non Linear Effects*, Revue de Physique Appliquée, 21.
- [33] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal linearization method applied to the resolution of state equation*, RAIRO-APII, 21, 175-185.
- [34] **A. Jordan et al**, (1987), *Optimal linearization of non-linear state equation*, RAIRO-APII, 21, 263-271.
- [35] **R. Couty et J. Ezra**, (1988), *Analyse Numérique*, Tome I, Armand Colin-Collection.

- [36] **M. Sibony and J. CL. Mardon**, (1988), *Approximations et Equations Différentielles*, Herman.
- [37] **F. Verhulst**, (1989), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag.
- [38] **S. Derdadj**, (1990), *Analyse Numérique*, Office de Publication Universitaire.
- [39] **J. C. Vaissière and J. P. Nougier**, (Novembre 1990), *Programmes et Exercices sur les Méthodes Numérique*, Masson.
- [40] **N. Piskounov**, (1991), *Calcul Différentiel et Intégral*, Tome I (partie 2), Office de Publication Universitaire.
- [41] **M. Baumahrtat and A. Gourdin**, (1993), *Méthodes Numériques Appliquées*, Office de Publication Universitaire.
- [42] **A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot**, (1993), *Systèmes non Linéaires (Tome1: Modélisation-Estimation)*, Masson.
- [43] **A. J. Fossard, D. Normand-Cyrot**, (1993), *Systèmes Non Linéaires (Tome3: Commande)*, Masson.
- [44] **J. P. Aubin**, (1994), *Initiation à l'Analyse Appliquée*, Masson.
- [45] **J. P. Demailly**, (1994), *Analyse Numérique et Equations Différentielles*, Office de Publication Universitaire.
- [46] **R. Théodor**, (1994), *Initiation a l'Analyse Numérique*, Paris, Masson.
- [47] **D. Estep and D. French**, (1994), *Global Error Control for the Continuous Galerkin Finite Ordinary Differential Equations*, Mathematical Modeling and Numerical Analysis Vol.28 pp.815-852.

- [48] **N. F. Rulkov, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbnel**, (1994), *Tracking Unstable Orbits in Chaos Using dissipative feedback Control*, Physical review E, Vol 50, N°1.
- [49] **T. Benouaz et O. Arino**, (1994), *Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-linéaire*, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [50] **T. Tienlang**, (1995), *Electronique Numérique*, Paris, Masson.
- [51] **T. Benouaz and O. Arino**, (1995), *Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure*, Appl. Math. and Comp sci., N°1, Vol. 5, pp 33-48.
- [52] **T. Benouaz et O. Arino**, (1995) *Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique*, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N°. 95/10.
- [53] **T. Benouaz**, (16-20 June 1995), *Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by an Optimal Procedure*, Proceedings of the 2nd International Conference on Differential Equations, Marrakech, Maroc.
- [54] **T. Benouaz**, (13-17 August 1995), *Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation: The Scalar Case*, Proceedings of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp.19-22 , Plovdiv, Bulgaria.
- [55] **J. P. Corriou**, (1996) , *Commande des Procédés*, Techniques et Documentations.
- [56] **T. Benouaz**, (3-5 December 1996), *Lyapunov Function Generated by Least Square Approximation*, Deuxième Conférence Maghrébine sur l'Automatique Vol.1 pp.73-75, Tlemcen.
- [57] **T. Benouaz and O. Arino**, (1996), *Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary Differential Equation*, Computers Math. Applic., Vol. 31, N°8, pp 69-84.

- [58] **T. Benouaz**, (1996), *Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire*, Thèse de Doctorat d'Etat, Tlemcen.
- [59] **R. Sepultine, M. Janckovich and P. Kokotovich**, (1997), *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag London.
- [60] **S. Murashige and K. Aihara**, (1997), *Coexistence of Periodic Roll Motion and Chaotic one in Forced Flooped ship*, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 8, No. 619-626.
- [61] **K. Eguchi and T. Inoue**, (1997), *A Current-Mode Analog Chaos Circuit Realizing a Hénon map*. *IEICE Trans. Electron.*, Vol. E80-c, NO. 7.
- [62] **S. A. Lazzouni**, (1998), *Analyse des Aspects Qualitatifs de Certaines Classes de Circuits Electroniques Non linéaires*, Thèse de Magister, Tlemcen.
- [63] **C. Robinson**, (1998), *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, CRC Press.
- [64] **T. Benouaz and O. Arino**, (1998), *Optimal Approximation of the Initial Value Problem*, *Computers Math. Applic.*, Vol. 36, N°1, pp 21-32.
- [65] **G. Conte, C. H. Moog and A.M. Perdon**, (1999), *Lecture Notes in Control Systems*, Springer-Verlag London.
- [66] **M. F. Bendahmane**, (2000), *Contribution à l'Etude des Systèmes Non linéaires avec Excitation*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [67] **A. Chikhaoui**, (2000), *Contribution à l'Etude de la Stabilité des Systèmes Non linéaires*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [68] **T. Benouaz**, (2000), *Optimal Derivative of a Nonlinear Ordinary Differential Equation*, *Equadiff 99, International Conference on Differential Equations*, Vol. 2, pp 1404-1407, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

- [69] **F. Belkhouche**, (2001), *Contribution à l'Etude de la Stabilité Asymptotique par la Dérivée Optimale*, Thèse de Magistère, Tlemcen.
- [70] **N. G. Sabri**, (2001), Etude du Phénomène de Polarisation Rotatoire-Effet Faraday, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen.
- [71] **T. Benouaz et F. Belkhouche**, (7 – 8 mai 2001) Etude Numérique des Bifurcations Elementaires par la Méthode de Dérivation Optimale – Linéarisation à la Valeur de Bifurcation, Deuxièmes Journées de Mathématiques, Tlemcen.
- [72] **T. Benouaz et F. Belkhouche** (4 – 6 juin 2001), Etude de la Bifurcation Engendrée par une Transition de Phase, Application à un Condensateur Non Linéaire, Congrès Euro-Méditerranéen de la Matière Condensée, Tlemcen.
- [73] **T. Benouaz and M. F. Bendahmane**, (2002), *Least Square Approximations of a Non Linear O. D. E. with Excitations*, to Appear in Computers and Mathematics with applications.