

MODELISATION MATHÉMATIQUE, MODELISATION PHYSIQUE, MODELISATION NUMÉRIQUE.

T. BENOUAZ

Laboratoire de Physique Electronique et Modélisation, Faculté des Sciences, Université
Abou Bakr Belkaïd Tlemcen, Algérie

Email : t_benouaz@mail.univ-tlemcen.dz

Abstract : Le but de cette Communication est d'essayer de faire la part des choses entre Modélisation physique, Modélisation mathématique et modélisation numérique.

I _ INTRODUCTION

Pour répondre aux questions que nous nous posons au sujet d'un phénomène, nous construisons une image utilisant les concepts physiques que nous savons élaborer. Nous appellerons cette image, le **modèle physique** du phénomène. Plusieurs modèles physiques du même phénomène peuvent être ainsi élaborés : par exemple, un écoulement de gaz dans une tuyère sera « modélisé » en le considérant comme un ensemble de N atomes, dont chacun est repéré en position et vitesse (espace de phases R^{6N}) ou bien comme un fluide (continu), avec les notions de masse spécifique, pression, etc. Le type de modèle physique choisi dépend des questions que le physicien se pose concernant le phénomène.

A partir du modèle physique, on construira avec les concepts mathématiques, espace R^3 (position), vecteur (vitesse v), tenseur ou scalaire (pression), fonctions réelles positives sur cet espace (densités en phases), etc., une image mathématique du modèle physique. Cette image sera appelée le **modèle mathématique**. Elle n'est pas, en général, unique, et suivant les questions que l'on se pose, on utilisera telle ou telle image mathématique de notre modèle physique. Ainsi l'écoulement du gaz dans la tuyère pour le modèle physique du fluide continu, sera représenté par le modèle de Navier-Stokes non linéaire ou bien par le modèle de Stokes linéaire, ou encore par le modèle d'Euler.

Nous emploierons le mot « modéliser » pour désigner la construction d'un modèle.

II _ MODELE PHYSIQUE

II_1_ Equation de la Chaleur.

Dans ce premier cas, on va d'abord appliquer les lois de la physique. Ce qui va nous permettre d'obtenir le Modèle Physique caractérisant l'Equation de la Chaleur.

1) Conservation de la chaleur:

En chaque point: $\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = s$

q = quantité de chaleur/unité de volume (Jm^{-3})

\vec{j} = Courant de chaleur ($Jm^{-3}s^{-1}$)

s = source de chaleur (=0)

Il y a conservation car en l'absence de sources ($s=0$), q ne peut changer qu'en créant un courant de chaleur. Le courant \vec{j} "emporte" la chaleur si $(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) > 0$. Dans un volume V fixé.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V d^3x q = \int_V d^3x \frac{dq}{dt} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \int d^2S \vec{I}_n \cdot \vec{j}$$

= - (flux de \vec{j} sortant), où d^2S est un élément de surface sur le bord de V .

2) Relations à la température:

Une variation de température entraîne une variation de la quantité de chaleur :

$$dq = \rho C_p dT$$

si ρ = densité (kg/m^3) est la densité C_p = capacité calorifique ($J/^\circ K/kg$)

Le flux de chaleur est induit par une différence spatiale de température (Loi de Fourier):

$$\vec{j} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

Le signe "-" est dû au fait que le courant de chaleur va du plus chaud au plus froid

Le $\vec{\nabla}$ est dû au fait que le courant de chaleur est proportionnel au gradient de température.

la constante de proportionnalité κ est la conductivité thermique du matériau ($W/^\circ K/m$) (\approx conductivité électrique pour les métaux: e^- transportent à la fois électricité et chaleur..). A titre indicatif, κ vaut 390 pour le cuivre et 0,025 pour l'air fixé, on a une variation de la chaleur totale.

En insérant ces deux relations dans l'équation de conservation, on arrive à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -D(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})T = 0$$



À laquelle toute distribution de température physique $T[x, y, z, t]$ doit obéir.

Dans cette équation,

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} T = \Delta T \doteq \partial_x^2 T + \partial_y^2 T + \partial_z^2 T$$

est le Laplacien scalaire, et D est le coefficient de diffusion thermique (m^2/s) valant.

$$\frac{\kappa}{\rho C_p} = \frac{390}{3 \cdot 5 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-4}, \text{ pour le cuivre.}$$

$$\frac{\kappa}{\rho C_p} = \frac{0.025}{24,500 \cdot 10^6 \times 29 \cdot 2} = 2 \cdot 10^{-5}, \text{ pour l'air.}$$

Son interprétation microscopique est simple: $D \approx v\lambda$ est le produit de la vitesse moyenne des particules transportant la chaleur par leur libre parcours moyen λ entre 2 collisions.

Enfin, les solutions sont obtenues par Résolution analytique de l'équation de la chaleur (Si elle est linéaire) et par Résolution numérique (Si elle est non- linéaire).

Dans ce dernier cas, nos étudiants appliqueront une des méthodes numériques dont ils sont friands : M D F, M E F, Logiciel Matlab.

Donc : le schéma Directeur de la Modélisation est presque parfait : car, on a tous les éléments de la chaîne

II_2_Modèle dit de l'Amplificateur chaotique.

Le Deuxième cas est celui d'un Modèle dit de l'Amplificateur chaotique.

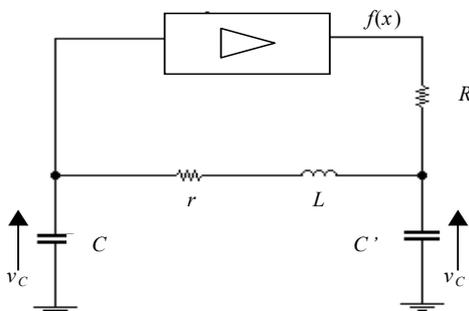


Figure (a)
Circuit de l'amplificateur chaotique

Là aussi, on applique les lois de la physique ; à savoir les lois de Kirchoff : (nœuds, mailles).

Nœuds : Mouvement de charges (conservation de la quantité d'électricité)

Mailles : tensions

On obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x - \delta y + z \\ \frac{dz}{dt} = \gamma[\alpha f(x) - z] - \sigma y \end{cases} \quad (1)$$

Avec:

$$\begin{aligned} x &= v_c & \gamma &= \frac{\sqrt{LC}}{RC'} \\ y &= \sqrt{\frac{L}{C}} i & \text{Et } \delta &= r \sqrt{\frac{C}{L}} \\ z &= v_c & \sigma &= \frac{C}{C'} \end{aligned} \quad (2)$$

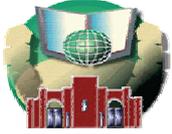
La non linéarité exprimée par $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} -0.528 & \text{si } x \leq -1.2 \\ x(1-x^2) & \text{si } |x| < 1.2 \\ +0.528 & \text{si } x > 1.2 \end{cases} \quad (3)$$

Les points d'équilibre peuvent être obtenus par la résolution du système $\dot{X} = 0$ qui conduit à

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \Rightarrow x = z \\ \gamma[\alpha f(x) - x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\alpha} x \end{cases} \quad (4)$$

Les points d'équilibre sont donc donnés par l'intersection de la caractéristique non linéaire $f(x)$ et la droite de charge de pente $1/\alpha$ (où α représente le gain.)



$$x(1 - x^2) = \frac{1}{\alpha} x$$

$$\Rightarrow x \left(1 - x^2 - \frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ où } x^2 = 1 - \frac{1}{\alpha} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}$$

Pour $\alpha \leq 1$, on obtient un seul point d'équilibre à l'origine (0, 0, 0). En revanche, si α augmente, deux autres points apparaissent (P+, P-), ayant les coordonnées

$$\pm \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}$$

III. MODELE MATHEMATIQUE.

Dans les systèmes écologiques, la fonction de réponse traduit la manière dont le prédateur s'adapte aux changements de la densité de la proie. Parmi les modèles les plus classiques, il y a la fonction de type Michaelis-Menten ou de type Holling II.

Récemment, les modèles traditionnels ont été mis en question par de nombreux biologistes : Arditi et Guinzburg, Arditi, Guinzburg et Akcakaya, Gutierrez. Une réponse ratio-dépendante a été mise en évidence par Arditi. Une réponse ratio dépendante est une réponse qui dépend du rapport entre la proie et le prédateur. Ce type de réponse correspond notamment au partage de la ressource entre les prédateurs. Un exemple de modèle ratio dépendant est le système [1]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx) - \frac{cxy}{my + x} \\ \frac{dy}{dt} = y \left(-d + \frac{fx}{my + x} \right) \end{cases}$$

Un problème rencontré dans le traitement de ces équations est l'absence de régularité au voisinage de l'origine. Il n'est pas possible d'analyser par la méthode traditionnelle de linéarisation le comportement au voisinage de l'origine. Cet obstacle peut nuire sérieusement à la bonne compréhension d'un modèle. Il y a des méthodes qui permettent de contourner en partie cet obstacle, notamment celle de la valeur propre non linéaire. Leur mise en oeuvre est toutefois fort délicate et suppose une bonne connaissance de l'analyse fonctionnelle, sans commune mesure avec les techniques

de développement de Taylor que l'on utilise dans le cas de points critiques réguliers.

Pour l'application aux équations ratio-dépendantes, l'écologie n'est pas le seul domaine, des modèles existent aussi en épidémiologie. A titre d'exemple, considérons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - x) - \frac{xy}{y + x} \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y + \frac{kxy}{y + x} \end{cases}$$

C'est un modèle de type proie-prédateur ratio-dépendant utilisé par B.D. Aggarwala [4] (Université de Cagliari, 2001) pour une étude épidémiologique (développement du virus HIV au Canada). Si nous voulons simplement, étudier le comportement d'un tel modèle à l'origine, on s'aperçoit que ce n'est pas possible car la fonction non linéaire représentant l'équation différentielle n'est pas dérivable en ce point, or dans le cas de l'HIV / AIDS, ce point représente l'anéantissement de la société. L'étude du comportement au voisinage de ce point est très importante.

Appliquons maintenant, la procédure de dérivée optimale en ce point (à l'origine). Avec $x(0) = (0.09; 0.399)$, c'est à dire au voisinage de l'origine. et $(a, k, \alpha) = (0.31; 0.62; 0.33)$, il vient:

Avec la matrice initiale

$$A_0 = DF(x_0) = \begin{bmatrix} -0.6473 & -0.27123 \\ 0.33051 & -0.141837 \end{bmatrix}$$

La procédure donne après 7 itérations, la dérivée optimale suivante

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.2715 & -0.0444 \\ 0.2 & -0.2273 \end{bmatrix}$$

Les graphes présentés ci dessous représentent les courbes obtenues à partir du système non-linéaire et celui de la dérivation optimale.

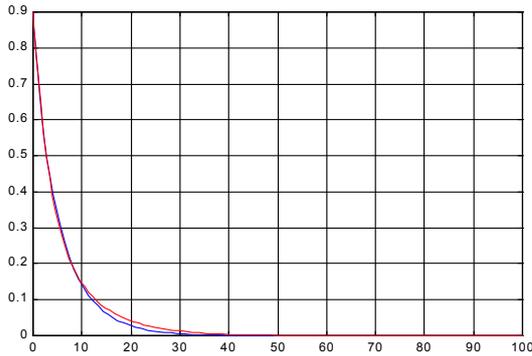


Figure1: Les courbes représentent la solution $x(t)$ en fonction du temps du système non linéaire (0.1) et celui donnée par la dérivée optimale (0.2)

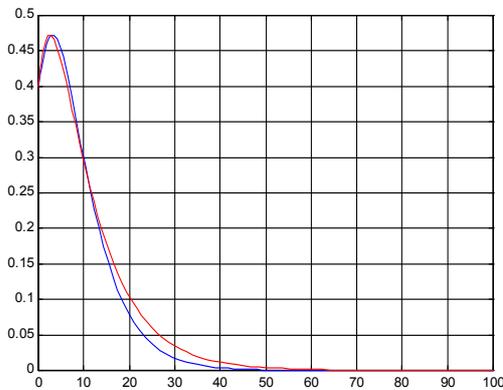


Figure2: Les courbes représentent la solution $y(t)$ en fonction du temps du système non linéaire (0.1) et celui donnée par la dérivée optimale (0.2).

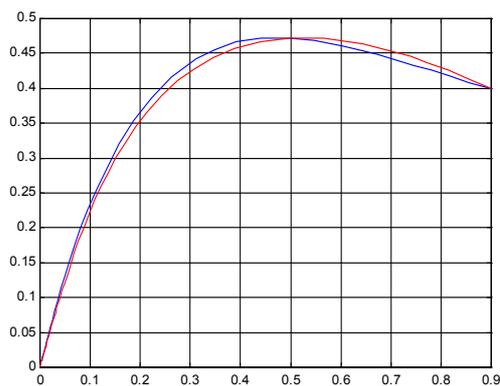


Figure3: Les courbes représentent la solution $y(t)$ en fonction de $x(t)$ du système non linéaire (0.1) et celui donnée par la dérivée optimale (0.2)

On remarque que les deux solutions ont un comportement similaire au voisinage de l'origine. Cette étude montre qu'il existe de réelles perspectives pour l'utilisation de cette notion de dérivée en tant qu'alternative pour la

Modélisation dans le cas de problèmes non réguliers pour l'étude du comportement des solutions ainsi que celui de la stabilité des modèles ratio dépendants

IV_CONCLUSION

A travers ces trois exemples, on a voulu montrer que il y a beaucoup de différence entre modèle physique, modèle mathématique et la notion de modèle numérique qui lui est lié à la notion de données statistiques, et qui peut être un support à la construction d'un modèle mathématique.

Bibliographie

- [1] Dongmei Xiao, Sigui Ruan, (2001), Global dynamics of a ratio-dependent predator-prey system.
- [2] F. Beresovskaya, G. Karev, R. Arditi, (2001), Parametric analysis of the ratio-dependent predator-prey model.
- [3] Sze-Bi Hsu, Tzy-Wei Hwang, Yang Kuang (2001), Rich dynamics of a ratio-dependent one-prey two-predators model.
- [4] B.D. Aggarwala, (2001), The Fascinating Predator-Prey Equation and Development of HIV / AIDS in Canada, Vol. 5, Issue 2, Pacific Institute for the Mathematical Sciences.
- [5] A. Jordan et al, (1987), Optimal Linearization Method Applied to the Resolution of State Equation, RAIRO-APII, 21, pp. 175-185.
- [6] A. Jordan et al, (1987), Optimal Linearization of Non-Linear State Equation, RAIRO-APII, 21, pp. 263-271.
- [7] T. Benouaz et O. Arino, (1995), Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique, Publications de l'U.A, CNRS 1204, No.95/10.
- [8] T. Benouaz et O. Arino, (1995), Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [9] T. Benouaz and O. Arino, (1995), Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure, Appl. Math. and Comp sci., N° 1, Vol. 5, pp 33-48.