الملتقى الدولي الثامن حول الفيزياء الطاقوية
8ème Séminaire International sur la Physique Energétique
8th International Meeting on Energetical Physics
Centre Universitaire de Béchar–Algérie, 11 et 12 Novembre 2006

ELABORATION D'UN MODELE MATHEMATIQUE POUR L'ETUDE DE L'EQUILIBRE MAGNETOHYDRODYNAMIQUE (MHD) D'UN PLASMA DE TOKAMAK

***Sifia.BELGHERRAS*[1], *Tayeb.BENOUAZ*[1], *Fouzia.BOUAYED*[1].**

Department of Physic, Faculty of Science
University A.B.B Tlemcen
Tlemcen, Algeria
Sifia_electronique@yahoo.fr

Abstract— **: Cet article porte sur l'étude de l'interaction d'un champ magnétique avec un plasma dans un tokamak.**
L'objectif est de déterminer l'état d'équilibre, autrement dit l'état où on aura un bon confinement, en utilisant pour cela les équations de la MHD.
Keywords: MHD, tokamak, magnetic confinement, frontières libres.

I. INTRODUCTION

Le tokamak est une machine conçue pour réaliser la fusion thermonucléaire contrôlée, cette réaction exige un bon confinement, autrement dit il faut que les lignes du champ se referment sur elles mêmes, pour cela on utilise ce qu'on appelle la MHD qui permet de donner une idée sur la géométrie du plasma.
Dans notre étude, on trouve que la simplification des équations de la MHD idéale conduit à l'équation de Grad Shafranov, sa résolution se fait dans un espace orthogonal des flux, où elle se réduit à un Laplacien. Ces simplifications nous permettent de proposer un modèle mathématique qui décrit l'équilibre d'un plasma de tokamak. Pour la résolution numérique de ce problème, on utilise la méthode des éléments finis.

II. INTERACTION D'UN MILIEU CONDUCTEUR AVEC UN CHAMP MAGNETIQUE

L'évolution du champ magnétique dans un milieu conducteur, supposé ici un plasma est traduit par l'équation suivante (1) :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = r\vec{o}t(\vec{V} \wedge \vec{B}) + \eta.\Delta\vec{B} \qquad (1)$$

Où :
$\vec{B}$: Champ magnétique(Tesla) ;
$\vec{V}$: Vitesse de propagation. ($m.s^{-1}$)
$\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$: Coefficient de diffusion magnétique ($m.s^{-1}$).

Elle est obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation d'induction [1].
Les deux termes qui figurent dans l'équation (1) décrivent deux mécanismes différents : la convection et la diffusion.
Le premier terme dépend de la vitesse du fluide, le second est proportionnel à la résistivité.
Supposons maintenant que le deuxième terme de l'équation (1) est nul, ce cas limite est obtenu en considérant que la conductivité électrique σ est infinie. C'est-à-dire que le plasma est parfaitement conducteur (cas du tokamak). Dans ce cas on se place dans le cadre de la magnétohydrodynamique(MHD), où le champ évolue par convection, autrement dit il est entraîné par la matière, cela est traduit par l'équation (2)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = r\vec{o}t(\vec{V} \wedge \vec{B}) \qquad (2)$$

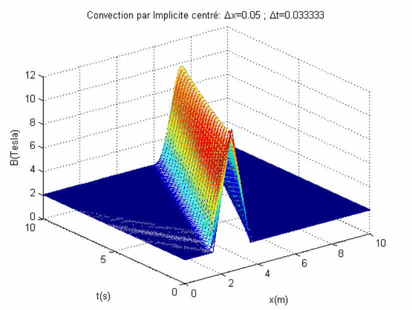

Fig. 1. Evolution du champ magnétique par convection

La convection c'est un moyen de transport d'énergie, cette dernière se transforme en chaleur et qui peut être convertie en électricité

La magnétohydrodynamique (MHD) est un phénomène qui sert à déplacer les molécules et les atomes ionisés par l'action des forces de Laplace (Magnétique et électrique), où les équations de la MHD s'obtiennent par la linéarisation des équations de l'hydrodynamique et des équations de Maxwell [3].
Les équations de la MHD idéale (non résistive), où le plasma est parfaitement conducteur et compressible est données par :

$$\begin{cases} div(\vec{B}) = 0 \\ r\vec{o}t(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \\ \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = r\vec{o}t(\vec{V} \wedge \vec{B}) \\ \vec{j} \wedge \vec{B} = gr\vec{a}d(p) \end{cases}$$

(3)

III. APPLICATION

Dans un plasma de Tokamak, les lignes du champ magnétique doivent se fermer sur elles mêmes pour avoir un bon confinement, pour cela on considère que le plasma est entouré d'une certaine épaisseur de vide lequel est entouré d'une paroi conductrice, puis on applique un fort champ magnétique. On distingue deux groupes d'équations : celles qui décrivent le plasma sont les équations de la MHD et celles qui décrivent le vide sont les équations de Maxwell.

Confinement magnétique du plasma

Le confinement dans un plasma de tokamak est essentiellement contrôlé par les pertes diffusives de particules, où le champ magnétique agit sur une particule via la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad (7)$$

Si les composantes du vecteur de vitesse sont perpendiculaires au champ cela donne lieu à une force, tel que la particule est accélérée avec une accélération constante, où elle exécutera un mouvement circulaire, dans ce cas la particule aura un confinement parfait. Or dans la direction parallèle au champ, la particule ne subit aucune force, elle ne sera pas confinée. Le mouvement total sera la somme d'un mouvement rectiligne sans accélération superposé à un mouvement circulaire qui donne naissance à un mouvement en hélice. Autrement dit la particule décrit une hélice autour de la ligne du champ magnétique, on se trouve alors dans une configuration où la direction du champ magnétique est purement toroïdale (voir figure2).

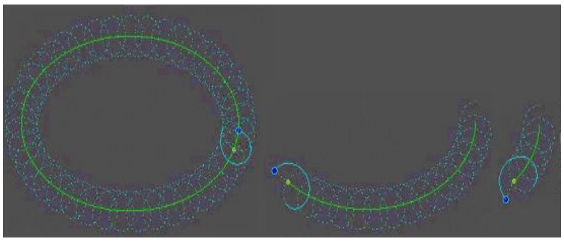

Fig. 2.trajectoire de la particule dans un champ magnétique

L'équilibre à l'intérieur du plasma

Pour pouvoir contrôler le confinement du plasma dans un tokamak on utilise les équations de la MHD. La résolution de ce système d'équations dans un plasma est associée à des conditions aux limites adéquates qui conduisent à l'équation de Grad Shafranov.

Pour pouvoir simplifier l'équation de Grad Shafranov , on utilise le principe d'orthogonalisation où les lignes de flux sont des contours emboîtés les uns dans les autres, alors il semble possible de les utiliser comme un maillage. Cette famille des contours est axisymétrique, alors il vient de déterminer un espace de flux.

L'équation de grad Shafranov dans l'espace de flux est donnée par :

$$\Delta\left(\frac{\psi}{R}\right) = -\left(\mu R \frac{dp}{d\psi} + \frac{F}{R}\frac{dF}{d\psi}\right) \qquad (4)$$

La résolution dans l'espace de flux est équivaut à résoudre l'équation de Laplace, autrement dit l'équation de Grad Shafranov se réduit à un Laplacien.

$$\nabla^2 U = 0 \qquad (5)$$

IV. FORMULATION DU PROBLEME

Afin de déterminer le comportement de flux du champ magnétique dans le plasma, nous proposons un modèle mathématique qui décrit le confinement du plasma dans un tokamak:

$$\begin{cases} -\Delta u = j & dans \;\; w \\ -\Delta u = 0 & \Omega/w \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \qquad (6)$$

j : densité du courant.

u : flux du champ magnétique.

w : Région occupé par le plasma, Ω domaine total et $\partial\Omega$ la frontière.

Ce modèle contient des équations de type EDP, alors pour la résolution de ce système d'équation, on utilise la méthode des éléments finis

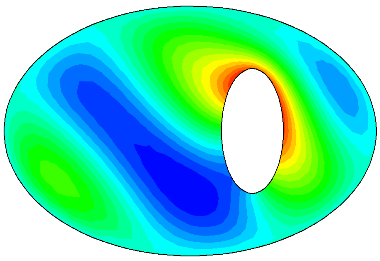

Fig. 3.Confinement du plasma par un champ magnétique non uniforme

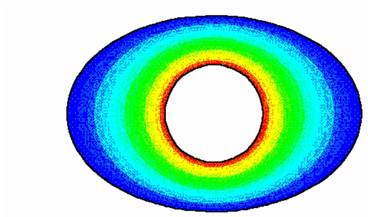

Fig. 4 .Confinement du plasma par un champ magnétique uniforme

Dans la figure2 on observe que l'intensité du champ magnétique n'est pas uniforme, où le plasma se dérige vers la région où l'intensité est faible, par contre dans la figure4 où l'intensité du champ magnétique est uniforme, le plasma se trouve au centre et aura la forme d'un tore.

Supposons que le plasma a la géométrie d'un disque, où $j = \lambda$ *un paramètre* $\in \Re$,

$$\Omega = B(0,1) \subset \Re^2 \ \text{un disque}$$

Si Ω a la géométrie d'un disque, le modèle mathématique se réduit à

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{1}{r}u' = -\lambda & si\ 0 \prec r \prec r_0 \\ u'' + \dfrac{1}{r}u' = 0 & r_0 \prec r \prec 1 \\ u(1) = 0,\ u'(0) = 0,\ u(r_0) = 1 \end{cases} \qquad (7)$$

Cherchant des solutions radiales, c'est-à-dire $u = u(r)$ où r le rayon de disque.

$$u(r) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{2} r_0^2 \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) & \text{dans le vide} \\ 1 + \dfrac{\lambda}{4}\left(r_0^2 - r^2\right) & \text{dans le plasma} \end{cases} \qquad (8)$$

Tel qu'on peut tracer ces solutions pour voir le comportement de flux du champ magnétique dans le plasma et dans le vide

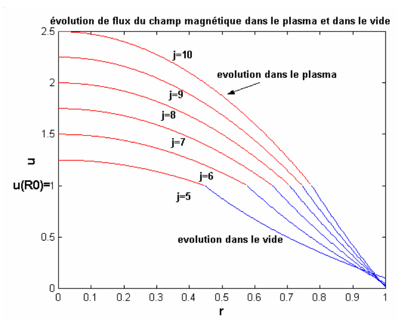

Fig. 5. Comportement de flux de champ magnétique dans le plasma et dans le vide

On observe dans la figure6 pour différent valeur de j, on aura un ensemble de contours emboîtés les uns dans les autres, on conclut que ces contours représentent les surfaces magnétiques confinant le plasma en une structure toroïdale.

V. Conclusions

A partir de cette étude, on conclut que la MHD est un outil très puissant lorsqu'il s'agit de traiter les problèmes d'équilibre dans un plasma de tokamak, tel que pour avoir l'équilibre il faut avoir un bon confinement, pour cela il faut appliquer un fort champ magnétique.

La modélisation des équations de la MHD permet de traduire le confinement d'un plasma par un problème à frontière libre.

Pour avoir un bon confinement, il faut que le champ magnétique soit uniforme, et le plasma doit avoir la configuration d'un disque.

Si le plasma a la géométrie d'un disque, la densité de flux de champ magnétique est maximal au sein du plasma et faible dans le vide, tel que la valeur de flux est toujours constante $u(r_0) = 1$ sur la frontière du plasma.

References

[1] Pantellini, F., «La magnétohydrodynamique ». 2000, Univ.Jussieu.
[2] Bhamidipati,J.R and El-Kaddah,N. «calculation of electromagnetic field and melt shape in the magnetic suspension melting process.MHD in process Metallurgy,TMS PUBl.,California». (1992).
[3] F.El Dabachi,K.Morgan,A.K.Parrott and J.Periaux, «Approximations and Numerical Methods for the solutions of Maxwell's Equations »
[4] Jean-Loup Delacroix, Abraham Bers, « Physique des plasmas».
[5] José-Phillippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger, « Electromagnetisme, fondamental et applications ». Editions.Dunod
[6] J.Wesson, Tokamk (Clarendon Press, Oxford, 1997)
[7] T.S.Taylor, Plasma Phys.CONTr.Fusion 39, B47 (1997).
[8] G.Vlad et al.., Nucl. Fusion 38, 557 (1998).